NOVOBÁTZKY – NEUGEBAUER

THEORETISCHE ELEKTRIZITÄTSLEHRE UND WELLENOPTIK

VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

NOVOBÁTZKY – NEUGEBAUER

THEORETISCHE ELEKTRIZITÄTSLEHRE UND WELLENOPTIK

DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

NOVOBÁTZKY – NEUGEBAUER

THEORETISCHE ELEKTRIZITÄTSLEHRE UND WELLENOPTIK

HOCHSCHULBÜCHER FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN VON FRANZ X. EDER UND ROBERT ROMPE

BAND 26

THEORETISCHE ELEKTRIZITÄTSLEHRE UND WELLENOPTIK

VON

KARL F. NOVOBÁTZKY – THEOBALD NEUGEBAUER

PROFESSOREN AN DER EÖTVÖS UNIVERSITÄT, BUDAPEST

1957

VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

BERLIN

Novobátzky – Neugebauer
ELEKTRODINAMIKA ÉS OPTIKA
TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST 1951

Die Übersetzung und wissenschaftliche Bearbeitung
lag in den Händen der Autoren

Verantwortlicher Verlagsredakteur: I. Scholz

Printed in Germany
Lizenz-Nr. 206 · 435/44/56
Satz und Druck: VEB Offizin Andersen Nexö in Leipzig III/18/38

VORWORT

Das vorliegende Hochschullehrbuch ist im wesentlichen als zweite verbesserte Auflage des im Jahre 1951 erschienenen ungarischen Lehrbuches zu betrachten. Der Zweck dieses Buches war es, der studierenden Hochschuljugend als verläßlicher Hilfsberater in ihrem Fachstudium zur Seite zu stehen. Diese begrenzte Zielsetzung erforderte, außer den Erfahrungen der eigenen Lehrtätigkeit, auch die einschlägige Fachliteratur im ausgiebigen Maße zu benutzen. Das Originelle bedeutet nach dem Ausspruch von Joos, besonders in einem Lehrbuch, nicht immer das Bessere.

Was die Gliederung des Stoffes betrifft, sei erwähnt, daß der erste Teil alle jene Erscheinungen zusammenfaßt, zu deren Erklärung die atomistische Struktur der Elektrizität belanglos ist. Elektrische Raum- und Flächendichte werden hier als stetige Größen, dielektrische Zahl und magnetische Permeabilität als gegebene Konstanten behandelt. Der konsequente Aufbau der Statik gewährleistet die stufenweise Einführung der Grundbegriffe, wie elektrisches und magnetisches Feld, Ladung, Potential, Kapazität, die im Abschnitt des stationären Stromes durch die Begriffe der Stromdichte und Leitfähigkeit, im quasistationären Gebiet durch die Induktionskoeffizienten ihre natürliche Ergänzung finden. Ziel des schrittweisen Aufstieges ist die Herleitung der Maxwellschen Gleichungen. In straffer Kürze wird gezeigt, daß dieses Gleichungssystem, im Vereine mit entsprechenden Materialgleichungen, die gesamte Statik und stationäre Strömung einschließlich der Grenzbedingungen umfaßt und daher als Ausgangspunkt einer axiomatischen Elektrodynamik benutzt werden kann.

Die allgemeinen Auseinandersetzungen werden von der Erörterung konkreter Beispiele begleitet, teils um das Verständnis der abstrakten Theorie zu fördern, teils auch wegen der praktischen Wichtigkeit der behandelten Fälle. Als Anwendungen der fertigen Theorie sind zu erwähnen die Behandlung der in Isolatoren und Leitern fortschreitenden ebenen Wellen sowie die an Drähten entlanggleitenden Lecherschen Wellen. Eng anschließend an diese Erscheinungen sollte im ersten Teile auch die Reflexion und Brechung ebener Wellen behandelt werden. Da die bezüglichen Gesetzmäßigkeiten jedoch den Ausgangspunkt der Wellenoptik bilden, wurde – um Wiederholungen zu vermeiden – dieser Abschnitt der Optik angegliedert.

Bezüglich des allgemeinen Charakters des zweiten, dritten und vierten Teiles sei erwähnt, daß wir überall getrachtet haben, die naturwissenschaftliche Seite des Gegenstandes zu betonen. Damit sei selbstverständlich nicht gesagt, daß wir die mathematische Seite als unwichtig betrachten, doch sind schon viele Lehrbücher vorhanden, welche die hier behandelten Gegenstände mathematisch mit größter Strenge behandeln, und deshalb denken wir, daß ein Lehrbuch,

welches die besprochenen Teile der Physik ganz von ihrer naturwissenschaftlichen Seite und in Zusammenhang mit den übrigen Naturwissenschaften und der Technik bespricht, nicht überflüssig sein wird.

Von den neuesten Resultaten der Physik haben wir die antiferromagnetischen, die ferrimagnetischen und die ferroelektrischen Erscheinungen in Zusammenhang mit der Abbéschen Theorie der Bildentstehung im Mikroskop, die neueren Versuche zur Vervollkommnung des Mikroskopes, bei der Besprechung des Feldes des mit großer Geschwindigkeit sich bewegenden Elektrons, den Grundgedanken der Theorie der Cerenkovstrahlung, außerdem in der Optik einige biologische Hinweise (z. B. Interferenzfarben von Lebewesen) usw. auch schon in einem Lehrbuch zu behandeln als notwendig gefunden. Von einer ausführlichen Besprechung dieser Fragen konnte selbstverständlich keine Rede sein, der Leser findet jedoch in der „Literaturauswahl“ am Ende des Werkes Hinweise darauf, wo er sich über die erwähnten Fragen weiter orientieren kann. Ebenso haben wir im Text erwähnt, wo die klassischen Resultate nach der Quantenmechanik ergänzungsbedürftig sind. Die „Literaturauswahl“ ermöglicht dem Leser auch in dieser Hinsicht eine weitere Orientierung.

Budapest, Institut für theoretische Physik der Roland Eötvös Universität, Februar 1957.

K. F. Novobátzky　　　　Th. Neugebauer

INHALTSVERZEICHNIS

Teil I. Elektrostatik

Von K. F. NOVOBÁTZKY

Teil II. Die Grundlagen der Elektronentheorie

Von T. NEUGEBAUER

Teil III. Die Anwendungen der Theorie

Von T. NEUGEBAUER

Teil IV. Optik

Von T. NEUGEBAUER

TEIL I

ELEKTROSTATIK

DAS ELEKTROSTATISCHE FELD IM VAKUUM

§ 1. Grunderscheinungen

Die elektrostatischen Grunderscheinungen waren teilweise schon im Altertum bekannt. Die innige Berührung zweier verschiedener Körper, wie sie am leichtesten durch Aneinanderreiben erreicht wird, verleiht beiden Körpern charakteristische Eigenschaften. Reibt man z. B. eine Glasstange mit amalgamiertem Leder, Bernstein oder Ebonit mit Fell, so wird sowohl der geriebene Körper als auch das Reibzeug einer gewissen Kraftäußerung fähig, die sich durch das Anziehen leichter Körper äußert. Das ganze Erscheinungsgebiet erhielt eine Benennung, die vom griechischen Namen des Bernsteins abgeleitet wurde (Elektron). Nach landläufigem Wortgebrauch sind Glasstange und Leder „*elektrisch*" geworden. Dieser Zustand wird unserer Vorstellung nach durch eine „Substanz" hervorgerufen, die man Elektrizität nennt.

Grundlegend ist die Erfahrung, daß zwei mit Leder geriebene Glasstangen eine *abstoßende Wirkung* aufeinander ausüben, dagegen eine solche Glasstange und eine mit Fell geriebene Ebonitstange *einander anziehen*. Die einfachste Deutung dieser Tatsache besteht darin, daß man zweierlei Arten von Elektrizität annimmt, die man durch die Worte „*positiv*" bzw. „*negativ*" unterscheidet. Der abstoßenden Wirkung gleichartiger Elektrizität steht die Anziehung verschiedenartiger Elektrizitäten gegenüber.

Auch in den kleinsten Teilen neutraler Körper nimmt man das Vorhandensein gleicher Mengen positiver und negativer Elektrizität an, die nach außen hin keine Wirkung ausüben. Bei einer Berührung zweier neutraler Körper wird das Gleichgewicht dieser Verteilung gestört. Da die „Elektrizität" der mit Leder geriebenen Glasstange nach altem Übereinkommen *positiv* genannt wird, tritt nach unserer jetzigen Vorstellung bei der Berührung negative Elektrizität vom Glas auf das Leder über, so daß nach der Berührung auf der Glasstange überschüssige positive, am Leder überschüssige negative Elektrizität vorhanden ist. Die Berührung bewirkt daher nur eine teilweise Trennung, nicht aber eine Erzeugung beider Elektrizitäten.

Man weiß heute, daß beide Arten der Elektrizität atomistische Struktur besitzen. Ihre Träger sind die Elektronen und Ionen. Im ersten Teil dieses Buches wird von dieser Erkenntnis kein Gebrauch gemacht.

Überschreitet man den Vorstellungskreis mechanischer Wirkungen nicht, so muß es eigentümlich anmuten, daß die elektrische Anziehung und Abstoßung,

die im höchsten Vakuum unverändert fortbesteht, ohne materielle Vermittlung vor sich geht. Dies erschien früher so undenkbar, daß man zu willkürlichen Hypothesen griff. Man nahm an, daß sowohl der kosmische Raum als auch alle Körper von einer Materie erfüllt seien, die man *elektromagnetischen Äther* nannte und als Analogon des optischen Äthers ansah. Später ergab sich die Identität beider Äther. Der Äther spielte in der Elektrodynamik immer nur eine oberflächliche Rolle. Nie gelang es, ihn mit vernünftigen mechanischen Eigenschaften auszustatten, die zur Erklärung der elektrodynamischen Erscheinungen geeignet gewesen wären. Im Gegenteil, er verhinderte die Deutung einiger Erscheinungen, z. B. des MICHELSONschen Experimentes. Heute lassen wir die Ätherhypothese fallen. Die physikalischen Größen beziehen wir auf ein beliebiges Inertialsystem. Die Kraftwirkung ohne materielle Vermittlung aber erklären wir uns, indem wir dem Raum bestimmte geometrische Struktureigenschaften zuschreiben, die durch elektrische Körper hervorgerufen werden und die den Zustand jedes anderen elektrischen Körpers beeinflussen. Einen solchen mit physikalischen Eigenschaften ausgestatteten Raum nennt man *Kraftfeld.*

§ 2. Das COULOMBsche Gesetz

Die erste genaue Messung des elektrischen Kraftfeldes wurde von COULOMB (1736–1806) durchgeführt. Mit einer Drehwaage bestimmte er die Kräfte, die kleine geladene Körper in solchen Entfernungen, die groß gegenüber ihren linearen Abmessungen sind, aufeinander ausüben. Die Körper können dann in erster Näherung als punktförmig angesehen werden. Auf solche Punktladungen bezieht sich sein Gesetz:

Die Kraft, die die Punktladungen e_1 und e_2 aufeinander ausüben, ist den Ladungen direkt, dem Quadrat des Abstandes umgekehrt proportional:

$$|\mathfrak{K}| = f \cdot \frac{|e_1 e_2|}{r^2}.$$

Die Kraft wirkt abstoßend, wenn e_1 und e_2 gleiche Vorzeichen haben, anziehend, wenn das Vorzeichen verschieden ist. Bemerkenswert ist, daß man aus der Wechselwirkung dreier kleiner Körper ihre Ladungen bestimmen kann. Man hat

$$|\mathfrak{K}_{12}| = f \frac{|e_1 e_2|}{r_{12}^2}; \quad |\mathfrak{K}_{23}| = f \frac{|e_2 e_3|}{r_{23}^2}; \quad |\mathfrak{K}_{31}| = f \frac{|e_3 e_1|}{r_{31}^2}.$$

Dividiert man das Produkt der ersten und dritten Gleichung durch die zweite Gleichung, so ergibt sich

$$e_1^2 = \frac{1}{f} \frac{r_{12}^2 r_{31}^2}{r_{23}^2} \frac{|\mathfrak{K}_{12}| \cdot |\mathfrak{K}_{31}|}{|\mathfrak{K}_{23}|}.$$

Die Kräfte mißt man in dyn, die Abstände in cm. Der Zahlenwert des Proportionalitätsfaktors kann beliebig gewählt werden, da die Ladungseinheit noch

nicht festgelegt ist. Unsere Festsetzung lautet: Im Vakuum ist $f = 1$. Dadurch ist e_1^2 vollkommen bestimmt, und das COULOMBsche Gesetz nimmt die Form an

$$|\mathfrak{K}| = \frac{|e_1 e_2|}{r_{12}^2}.$$

Ist $e_1 = e_2 = e$, so folgt $e^2 = r_{12}^2 |\mathfrak{K}|$. *Einheit der Ladung ist diejenige Elektrizitätsmenge, die auf eine gleiche im Abstand von* 1 *cm die Kraft* 1 *dyn ausübt.* Dies ist die absolute elektrostatische Einheit der Ladung. Der Kürze wegen möge im folgenden eine mit der positiven Einheitsladung versehene kleine Kugel *Einheitspol* genannt werden. $\left(\right.$HEAVISIDE setzt $f = \frac{1}{4\pi}$. Seine Ladungseinheit ist demnach das $\sqrt{4\pi}$-fache der elektrostatischen. Wir halten uns ausschließlich an das absolute elektrostatische Maßsystem.$\left.\right)$

§ 3. Feldstärke

Man denke sich im Raume eine beliebige Anzahl elektrischer Körper vorhanden. Ihre Ladungen erzeugen ein elektrisches Feld. Wir stellen uns die Aufgabe, das Feld auszumessen. Zu diesem Zwecke erteilen wir einer kleinen Kugel die Ladung e und bestimmen an verschiedenen Punkten des Raumes die ponderomotorische Kraft $\mathfrak{K}$, die auf diese wirkt. Auf diese Weise wird jedem Punkte des Raumes in Form eines gerichteten Pfeiles ein Kraftvektor zugeordnet. Dieses Vektorfeld hängt aber nicht nur von den felderzeugenden Ladungen der Körper ab, sondern auch von der Ladung des Probekügelchens. Erteilt man ihm die Ladung e', so bleibt zwar die Kraftrichtung an jedem Ort dieselbe, ihre Größe verändert sich aber im Verhältnis der beiden Ladungen: $\mathfrak{K}' = \frac{e'}{e}\,\mathfrak{K}$. Schreibt man diese Gleichung in der Form $\frac{\mathfrak{K}'}{e'} = \frac{\mathfrak{K}}{e}$, so sieht man, daß das Verhältnis $\frac{\mathfrak{K}}{e}$ unabhängig von der Ladung der Probekugel ist und ausschließlich das Feld kennzeichnet. *Der Vektor* $\frac{\mathfrak{K}}{e}$ *wird elektrische Feldstärke genannt und mit* $\mathfrak{E}$ *bezeichnet.* Man hat

$$\mathfrak{K} = e \cdot \mathfrak{E}. \tag{1}$$

Die ponderomotorische Kraft, die das Feld auf eine ruhende Ladung ausübt, ist gleich dem Produkt von Ladung und Feldstärke. Anschaulichkeitshalber wird die Feldstärke oft etwas nachlässig als die auf den Einheitspol einwirkende ponderomotorische Kraft bezeichnet. Die Dimension von $\mathfrak{E}$ ist aber nicht die einer Kraft. Diese Definition gibt nur die Größe der Feldstärke richtig wieder. Vergißt man das nicht, so kann man sich getrost ihrer bedienen.

Die Komponenten der Feldstärke in einem Rechtssystem seien $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{E}_z$. Das Feld wird statisch genannt, wenn die erzeugenden Ladungen unverändert und unbewegt bleiben. Die Komponenten der Feldstärke sind dann Funktionen der drei Raumkoordinaten, aber unabhängig von der Zeit:

$$\mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}_x\,(x, y, z) \text{ usw.}$$

Die MAXWELLsche Theorie betrachtet die Feldstärke als Fundamentalgröße, aus der alle anderen elektrischen Größen abgeleitet werden können.

§ 4. Kraftlinien

In einem Punkt A des elektrischen Feldes sei die Feldstärke $\mathfrak{E}_A$ durch einen gerichteten Pfeil veranschaulicht. Von A ausgehend, schreite man in Richtung des Pfeiles zu einem sehr naheliegenden Punkt B weiter. In diesem hat die Feldstärke $\mathfrak{E}_B$ schon eine etwas veränderte Richtung und Größe. Ebenso gehe man zum benachbarten Punkt C über und konstruiere dort den Pfeil $\mathfrak{E}_C$ usw. Es ist klar, daß die Pfeile $\mathfrak{E}_A, \mathfrak{E}_B, \mathfrak{E}_C, \ldots$ eine einhüllende Kurve bestimmen, die man Kraftlinie nennt. Jede Kraftlinie besitzt einen bestimmten Richtungssinn, ihre Tangenten sind daher gerichtete Geraden und geben die Richtung der im Berührungspunkt auftretenden Feldstärke. Durch die Angabe der Kraftlinien kann das Feld graphisch dargestellt werden. Noch ist die Größe der einzelnen Feldstärken nicht ersichtlich. Kommt man aber überein, daß die Dichte der gezeichneten Kraftlinien – die Anzahl der Linien, die senkrecht durch einen Quadratzentimeter gehen – mit der Maßzahl der Feldstärke übereinstimmt, so ist die Darstellung vollständig. Wir nehmen deshalb an, daß der elektrischen Ladung $+e\,4\pi e$ Kraftlinien entspringen. Die von der Punktladung e auslaufenden Kraftlinien werden bekanntlich durch das zu e gehörige Strahlsystem dargestellt. In der Entfernung r verteilen sich daher die Kraftlinien gleichmäßig auf der Kugeloberfläche $4\pi r^2$. Ihre Dichte ist $\frac{4\pi e}{4\pi r^2} = \frac{e}{r^2}$. Dies ist aber nach dem COULOMBschen Gesetz gerade die Feldstärke in der Entfernung r. Der Vektor $\mathfrak{N}$ der Kraftliniendichte ist tatsächlich gleich der Feldstärke: $\mathfrak{N} = \mathfrak{E}$.

Der große praktische Vorteil der Kraftlinien besteht darin, daß man mit ihrer Hilfe auf Grund der Anschauung oft Probleme lösen kann, die sonst umständliche Rechnungen erfordern würden.

§ 5. Das erste Grundgesetz der Elektrostatik

Gibt man ein beliebiges Linienintegral mit bestimmtem Richtungssinn auf einer geschlossenen Kurve vor, dann ist jedes Linienelement ein Vektor $d\mathfrak{s}$. Durch direktes Ausmessen lassen sich die Feldstärken in dicht beieinanderliegenden Punkten der Linie bestimmen. Bildet man nun das Linienintegral der Arbeit des Feldes längs der geschlossenen Kurve

$$J = \oint (\mathfrak{E}, d\mathfrak{s}) = \oint (\mathfrak{E}_x\, dx + \mathfrak{E}_y\, dy + \mathfrak{E}_z\, dz),$$

so zeigt die Rechnung, daß es immer verschwindet. Es folgt daraus, daß es in der Elektrostatik keine geschlossenen elektrischen Kraftlinien gibt. Denn längs einer Kraftlinie wäre $(\mathfrak{E}, d\mathfrak{s})$ positiv, da $\mathfrak{E}$ und $d\mathfrak{s}$ gleiche Richtung haben. Im Sinne des STOKESschen Satzes folgt

$$\oint (\mathfrak{E}, d\mathfrak{s}) = \int_f \mathrm{rot}_n\, \mathfrak{E}\, df = 0,$$

wobei f eine beliebige durch die Linie begrenzte Fläche bedeutet. Man kann die Linie in der Umgebung eines Ortes so wählen, daß sie nur ein Flächenelement

df begrenzt. Dann reduziert sich das STOKESsche Integral auf den Integranden. Da auch die Stellung des Flächenelementes beliebig sein kann, muß der Ortsvektor rot $\mathfrak{E}$ selbst verschwinden:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0. \tag{2}$$

Das elektrostatische Feld ist wirbelfrei. Daraus folgt, daß die Feldstärke der negative Gradient einer skalaren Funktion Φ (x, y, z) ist:

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \Phi. \tag{2'}$$

Die Wirbelfreiheit des Feldes bezeichnet man als erstes Grundgesetz der Elektrostatik. Φ ist das elektrostatische Potential. Durch das Feld ist es nur bis auf eine willkürliche additive Konstante bestimmt. Die Gleichung $\Phi(x, y, z) = C$ bestimmt die Schar der Äquipotentialflächen. Die Kraftlinien sind die Trajektorien dieser Schar. Vom analytischen Standpunkt betrachtet, bedeutet es eine große Vereinfachung, daß das Feld statt der drei Komponenten der Feldstärke durch einen einzigen Skalar beschrieben werden kann.

§ 6. Das zweite Grundgesetz der Elektrostatik

Man kann dem Übereinkommen, daß die Ladung de die Quelle von $4\pi de$ Kraftlinien sei, leicht eine formelmäßige Fassung geben. Man legt um die Ladung eine geschlossene Fläche f mit der äußeren Normalen $\mathfrak{n}$. Bedeutet $\mathfrak{N}_n$ die Komponente der Kraftliniendichte in bezug auf $\mathfrak{n}$, so wird die aus der Fläche tretende Kraftlinienzahl

$$\int \mathfrak{N}_n \, df = 4\pi \, de \quad \text{oder} \quad \int \mathfrak{E}_n \, df = 4\pi \, de. \tag{3}$$

Das Produkt $\mathfrak{E}_n \, df$ nennt man den durch df hindurchgehenden Kraftfluß. Die Gleichung (3) besagt dann, daß der durch eine geschlossene Fläche tretende Kraftfluß, d. h. der Unterschied zwischen aus- und eintretendem Fluß, gleich dem 4π-fachen der durch die Fläche umschlossenen Ladung ist. Befindet sich keine Ladung im Innern, so ist der gesamte Kraftfluß Null. Die Ladung ist die Quelle des Kraftflusses. Nach dem GAUSSschen Satz läßt sich Gleichung (3) schreiben

$$\int \operatorname{div} \mathfrak{E} \, d\tau = 4\pi \, de.$$

Bedeutet $d\tau$ jenes Volumelement, in welchem die Ladung de wirklich vorhanden ist, während die übrigen Volumenelemente keine Ladung besitzen, so besteht das Integral aus einem Glied. Es folgt

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} \, d\tau = 4\pi \, de$$

oder

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi \frac{de}{d\tau} = 4\pi \varrho; \tag{4}$$

ϱ bedeutet die räumliche Ladungsdichte.

In vielen Fällen breitet sich die Elektrizität aber nicht räumlich, sondern flächenhaft aus. Hat das Flächenelement df die Ladung de, so heißt der

Quotient $\omega = \frac{de}{df}$ die Flächendichte. Wie lautet dann der allgemeine Satz des Kraftflusses (3)? Durch Parallelverschiebung des Elementes df längs der äußeren und inneren Normalen entsteht ein kleiner Zylinder, in dessen Innerem df liegt. Die Höhe dieses Zylinders kann von so hoher Ordnung klein gemacht werden, daß die Mantelfläche gegenüber df vernachlässigt werden kann. Dann reduziert sich das Integral in Gleichung (3) auf zwei Glieder, die sich auf die untere und obere Fläche beziehen:

$$(\mathfrak{E}_{n_1} + \mathfrak{E}_{n_2})\, df = 4\pi\, de \quad \text{oder} \quad \mathfrak{E}_{n_1} + \mathfrak{E}_{n_2} = 4\pi\omega. \tag{5}$$

$\mathfrak{n}_1$ und $\mathfrak{n}_2$ sind die äußeren Normalen der beiden Basisflächen. Sie besitzen entgegengesetzte Richtung. Deshalb sind auch $\mathfrak{E}_{n_1}$ und $\mathfrak{E}_{n_2}$ in entgegengesetzten Richtungen gebildete Komponenten. Indem man die Normale auf irgendeiner Seite der Fläche df errichtet, diese Seite mit *1*, die gegenüberliegende mit *2* bezeichnet und die Komponente der Feldstärke bezüglich dieser Normalen $\mathfrak{n}$ durch $(\mathfrak{E}_n)_1$ bzw. $(\mathfrak{E}_n)_2$ kennzeichnet, läßt sich Gleichung (5) schreiben

$$(\mathfrak{E}_n)_1 - (\mathfrak{E}_n)_2 = 4\pi\omega. \tag{6}$$

Bei Richtungsumkehr der Normalen müssen zugleich die Ordnungszahlen der Seiten gewechselt werden, so daß die letztere Gleichung unverändert bleibt. Der anschauliche Inhalt der Gleichung (5) ist folgender: Geht man mit dem Aufpunkt durch ein geladenes Flächenelement hindurch, so erleidet die Normalkomponente der Feldstärke eine sprunghafte Änderung, die gleich dem 4π-fachen der Flächendichte ist. Die linke Seite von (5) wird Flächendivergenz genannt.

Die Gleichungen (4) und (5) enthalten das zweite Grundgesetz des elektrostatischen Feldes. Die erste Gleichung gilt im Falle räumlicher, die zweite im Falle flächenhafter Verteilung. Mit Hilfe des Potentials läßt sich Gleichung (4) schreiben als

$$-\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = 4\pi\varrho \quad \text{oder} \quad \Delta\Phi = -4\pi\varrho, \tag{7}$$

wobei Δ den LAPLACEoperator bedeutet. Gleichung (5) nimmt die Form

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_1 - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_2 = -4\pi\omega \tag{8}$$

an.

Die unmittelbare physikalische Bedeutung des Potentials liegt darin, daß es aussagt, in welcher Richtung der positive Einheitspol in einem elektrostatischen Felde bewegt wird. Da die Bewegung in der Richtung von $\mathfrak{E}$ erfolgt und $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\Phi$ ist, so stimmt die Bewegungsrichtung mit derjenigen des Potentialabfalls überein. In kommunizierenden Röhren fließt das Wasser in der Richtung des abnehmenden Niveaus, bei der Wärmeleitung die Wärme in der Richtung des Temperaturgefälles. Niveau und Temperatur bilden das hydrostatische bzw. thermodynamische Analogon des Potentials. Negative Ladung bewegt sich natürlich in Richtung des Potentialanstieges.

Es sei der Wert des Potentials im Punkte *1* gleich Φ_1, im Punkte *2* gleich Φ_2. Bewegt die Feldstärke den positiven Einheitspol auf beliebigem Wege von *1* nach *2*, so leistet sie folgende Arbeit:

$$A = \int_1^2 (\mathfrak{E}_x\, dx + \mathfrak{E}_y\, dy + \mathfrak{E}_z\, dz) = -\int_1^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\, dz\right)$$

$$= -\int_1^2 d\Phi = \Phi_1 - \Phi_2.$$

Die negative Potentialdifferenz ist gleich jener Arbeit, die von der Feldstärke geleistet wird, wenn sie den Einheitspol vom Orte des Anfangspotentials zum Ort des Endpotentials hin bewegt. Wir zeigen im folgenden, daß das Potential in großer Entfernung von den Ladungen gleich Null gesetzt werden kann. Dann bedeutet das Potential an einer gegebenen Stelle jene Arbeit, die von der Feldstärke geleistet wird, wenn der Einheitspol von der betreffenden Stelle ins Unendliche fortbewegt wird.

§ 7. Leiter

Erfahrungsgemäß genügt in Leitern die kleinste Feldstärke, um die positiven und negativen Ladungen zu trennen und in entgegengesetzten Richtungen in Bewegung zu setzen. Elektrisches Gleichgewicht kann daher in Leitern nur dann bestehen, wenn im Sinne der Gleichung (2′) in jedem inneren Punkte (einschließlich der Flächenpunkte) das Potential den gleichen Wert hat. Aus Gleichung (7) folgt dann sofort, daß im Innern des Leiters $\varrho = 0$ ist. Die dem Leiter erteilte Ladung breitet sich ausschließlich auf der Oberfläche aus. Das ganze Innere des Leiters ist ein äquipotentieller Raumteil, seine Oberfläche eine Äquipotentialfläche. Im Inneren gibt es keine Kraftlinien, sie entspringen an der Oberfläche und stehen senkrecht darauf. Die Flächendichte läßt sich leicht mittels des Potentials ausdrücken. Bedeutet in Gleichung (8) $\mathfrak{n}$ die äußere Normale, dann verschwindet $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_2$, da das Potential im Inneren konstant ist. Daher wird

$$\omega = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_1 \tag{9}$$

und die Gesamtladung des Leiters

$$e = -\frac{1}{4\pi}\int \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_1 df. \tag{10}$$

Wir greifen ein Element df der geladenen Oberfläche heraus. Wäre es allein im Raum vorhanden, so wären die Feldverhältnisse aus Symmetriegründen auf beiden Seiten spiegelbildlich gleich. Nach Gleichung (5) würde das bedeuten, daß $\mathfrak{E}_{n_1} = 2\pi\omega$, $\mathfrak{E}_{n_2} = 2\pi\omega$ ist. Im Falle der geschlossenen Oberfläche ist aber $\mathfrak{E}_{n_2} = 0$, was nur dadurch möglich ist, daß die übrigen Oberflächenladungen an der Stelle df eine nach der äußeren Normalen weisende Feldstärke hervorrufen, deren Größe ebenfalls $2\pi\omega$ beträgt. Diese ist es, die den resultierenden

Wert von $\mathfrak{E}_{n_1}$ auf $4\pi\omega$ erhöht und das nach innen weisende $\mathfrak{E}_{n_2}$ verschwinden läßt. Es folgt daraus, daß die auf df sitzende Ladung ωdf unter der Einwirkung einer nach außen gerichteten Feldstärke vom Betrage $2\pi\omega$ steht. Auf die Ladung wirkt daher die Kraft

$$|d\mathfrak{K}| = 2\pi\omega^2\, df$$

oder der nach außen gerichtete Druck

$$p = \frac{|d\mathfrak{K}|}{df} = 2\pi\omega^2.$$

Eine geladene Seifenblase wird durch diesen elektrostatischen Druck, der dem Oberflächendruck entgegenwirkt, vergrößert.

§ 8. Bestimmung des Potentials

Die Hauptaufgabe der Elektrostatik ist die Bestimmung des Potentials. Ist das Potential als Funktion der Koordinaten bekannt, so erhält man aus den zwei Grundgesetzen (2′) und Gleichung (7) bzw. Gleichung (8) durch einfache Differentiation sowohl die Feldstärke als auch die räumliche Dichte und Flächendichte. Die Aufgabe ist sehr leicht, wenn die Dichteverteilung gegeben ist, aber wesentlich schwerer, wenn nur die Gesamtladung der einzelnen Leiter gegeben und die Verteilung unbekannt ist.

Wir beginnen mit der leichteren Aufgabe. Der Punkt, in dem man das Potential bestimmen will, heißt bekanntlich Aufpunkt. Seine Koordinaten sind x, y, z. Die Koordinaten der einzelnen Ladungselemente werden mit ξ, η, ζ bezeichnet. Der Abstand des Aufpunktes vom Ladungselement ist

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}\,,$$

das Volumenelement $d\tau = d\xi\, d\eta\, d\zeta$. Gegeben sind die Funktionen $\varrho(\xi, \eta, \zeta)$ und $\omega(\xi, \eta, \zeta)$.

Das Potential einer einzelnen Punktladung wird durch das COULOMBsche Gesetz gegeben. Die Ladung e übt auf den Einheitspol im Aufpunkt die Kraft

$$\mathfrak{K} = \frac{e}{r^2}\,\mathfrak{r}'$$

aus, wo $\mathfrak{r}'$ der Einheitsvektor ist, der von der Ladung zum Aufpunkt hinweist. Die rechte Seite ist offenbar der negative Gradient des Ausdruckes $\frac{e}{r} + A$. Daher gilt für das Potential:

$$\Phi = \frac{e}{r} + A.$$

Der Wert der Konstante A bleibt unbestimmt und ist nur durch Normierung des Potentials gegeben. Wir kommen überein, das Potential einer Punktladung im Unendlichen gleich Null zu setzen. Dann ist $A = 0$ und

$$\Phi = \frac{e}{r}. \tag{11}$$

Vom Unendlichen aus betrachtet, schrumpft auch eine endlich ausgedehnte Ladungskonfiguration punktartig zusammen, so daß die Aussage gilt: Das Potential einer endlich ausgebreiteten Ladung konvergiert im Unendlichen wenigstens in dem Maße gegen Null wie $1/r$.

Für mehrere Punktladungen hat man nach dem Superpositionsprinzip

$$\Phi = \sum_i \frac{e_i}{r_i}. \tag{12}$$

Sind die Ladungen teils räumlich, teils flächenartig ausgebreitet, dann gilt

$$\Phi(x, y, z) = \int_\tau \frac{\varrho}{r}\, d\tau + \int_f \frac{\omega}{r}\, df.$$

Es ist klar, daß auch das COULOMBsche Gesetz in den zwei Grundgesetzen der Elektrostatik enthalten sein muß. Es wurde nur deshalb an die Spitze der Betrachtungen gestellt, um die Einheit der Ladung, die zur Definition der Feldstärke notwendig ist, festzusetzen. Es muß also Gleichung (12), die im wesentlichen das COULOMBsche Gesetz zum Ausdruck bringt, aus unseren Grundgleichungen ableitbar sein. Das ist tatsächlich so. Offenbar handelt es sich um die Auflösung der Gleichungen (7) und (8), wenn ϱ und ω gegebene Funktionen der Koordinaten sind. Zur Lösung benutzen wir den GREENschen Satz in folgender Form:

$$\int_\tau (U \Delta V - V \Delta U)\, d\tau = \int_f \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n}\right) df. \tag{13}$$

Das linksseitige Integral bezieht sich auf ein beliebiges Volumen τ, das rechtsstehende auf seine Oberfläche f. Der Satz ist nur anwendbar, wenn U und V mit ihren Differentialquotienten im gewählten Raumgebiet regulär sind. Man fixiere darin den Aufpunkt $P(x, y, z)$. Der Abstand jedes anderen Punktes von diesem wird mit r bezeichnet. Es sei $U = \frac{1}{r}$. Dann ist $\Delta U = 0$. Da aber das so gewählte U im Aufpunkt nicht regulär ist, lege man um P als Zentrum eine kleine Kugel mit dem Radius R und schalte dadurch P aus der Gesamtheit der Punkte des Raumes τ aus. Dadurch erhält der Raum zwei Grenzflächen: die Kugelfläche g und die äußere Fläche f, die dem beliebigen Volumen τ zugeordnet ist. Von nun an bedeutet V das gesuchte Potential Φ. Gleichung (13) nimmt dann die Form

$$\int_\tau \frac{\Delta \Phi}{r}\, d\tau = \int_f \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right) df + \int_g \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right) dg$$

an. Da $\mathfrak{n}$ die äußere Normale bedeutet, wird an der Kugeloberfläche

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=R}, \quad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{1}{R^2}, \quad dg = R^2 d\Omega,$$

wo $d\Omega$ den von P ausgehenden elementaren Raumwinkel bedeutet. Wenn daher R gegen Null konvergiert, so nimmt das Integral über die Kugeloberfläche den Wert $-4\pi\Phi_P$ an. Es folgt dann

$$\Phi_P = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_\tau \frac{\Delta\Phi}{r}\,d\tau + \frac{1}{4\pi}\int\limits_f \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)df. \tag{14}$$

Die bisherigen Erwägungen wurden durch die spezielle Wahl von U veranlaßt. Es ist aber möglich, daß Φ selbst bzw. seine Differentialquotienten, längs gewisser Flächen sprunghafte Änderungen aufweisen. Dann sind diese Diskontinuitätsflächen durch eng angelegte Hilfsflächen ebenfalls aus dem Raum τ auszuschalten. Wir betrachten zuerst jenen einfachen Fall, wo diese Komplikation nicht auftritt, sondern Φ und seine Differentialquotienten im τ-Raume regulär sind. Betrachtet man den Raum als unendlich, so ist f die unendlich ferne Kugeloberfläche, an der Φ wie $\frac{1}{r}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ und $\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}$ aber wie $\frac{1}{r^2}$ gegen Null konvergieren. Der Flächenintegrand in Gleichung (14) hat daher die Größenordnung $\frac{1}{r^3}$, während $df = r^2 d\Omega$ nur von zweiter Ordnung unendlich wird. Das Flächenintegral verschwindet daher. Es bleibt

$$\Phi_P = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_\tau \frac{\Delta\Phi}{r}\,d\tau.$$

Jetzt ziehen wir das erste Grundgesetz (7) heran und ersetzen $\Delta\Phi$ durch $-4\pi\varrho$. Dann wird

$$\Phi = \int\limits_\tau \frac{\varrho}{r}\,d\tau. \tag{15}$$

Die Gleichung (7) wird POISSONsche Gleichung genannt. In Gleichung (15) haben wir ihre Lösung.

Wenn nur in einem einzigen Element $d\tau$ eine Punktladung e auftritt, dann wird $\varrho\,d\tau = e$, und das Integral besteht aus einem Gliede. Es folgt

$$\Phi = \frac{e}{r}.$$

Man erkennt das COULOMBsche Potential. Das COULOMBsche Gesetz ist eine Folge der elektrostatischen Grundgesetze.

Bei der Behandlung des allgemeinen Falles wollen wir jetzt annehmen, daß $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ längs einer Fläche f eine sprunghafte Änderung erfahre. Um den GREENschen Satz anwenden zu können, muß – wie schon erwähnt – die Diskontinuitätsfläche durch eine beiderseits eng angelegte Hilfsfläche f' aus dem τ-Raume weggeschafft werden (Abb. 1). Das Flächenintegral in Gleichung (14)

bezieht sich dann auch auf f' als eine Grenzfläche des τ-Raumes. Zu berechnen ist also

$$\frac{1}{4\pi}\int_{f'} \frac{1}{r'}\frac{\partial \Phi}{\partial n'}\, df'.$$

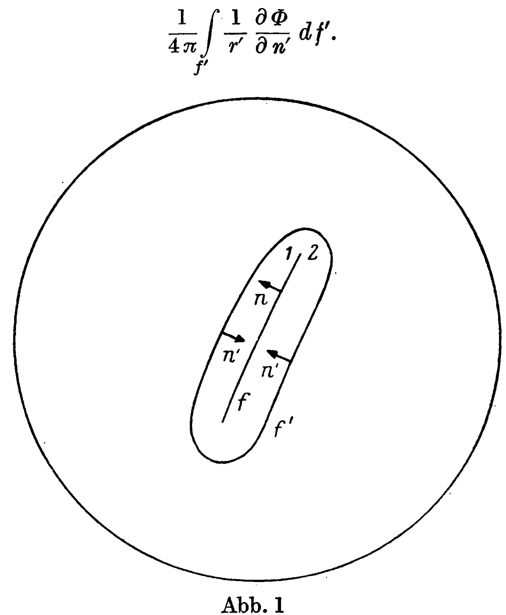


Abb. 1

Am besten nimmt man jetzt auf f eine gerichtete Normale $\mathfrak{n}$ an, die zugleich die Seite *1* und *2* der Fläche bestimmt. Die äußere Normale $\mathfrak{n}'$ von f' zeigt auf der Seite *1* gegen $\mathfrak{n}$, auf der Seite *2* ist sie gleichsinnig. Daher gilt für die Seite *1*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n'} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_1$$

und für die Seite *2*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n'} = +\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_2.$$

Zusammengefaßt ergibt sich im limes engster Anschmiegung

$$\frac{1}{4\pi}\int_{f'} \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial n}\, df = -\frac{1}{4\pi}\int_{f} \frac{1}{r}\left\{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_2\right\} df.$$

Physikalischen Inhalt erhält dieses rein mathematische Ergebnis durch das zweite elektrostatische Grundgesetz (8), aus dem folgt

$$\frac{1}{4\pi}\int_{f'} \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial n}\, df = \int_{f} \frac{\omega}{r}\cdot df.$$

Schließlich ist es möglich, daß sich Φ selbst an irgendeiner anderen Fläche f'' sprunghaft ändert. Dieser Fall tritt z. B. ein an der Berührungsfläche von Glas-

stange und Leder oder – was viel wichtiger ist – an der Grenzfläche von Metall und Elektrolyt. Solche Flächen werden Doppelschichten genannt. Sie werden später eingehend besprochen. Nach Gleichung (14) ist folgendes Integral zu bilden:

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{f''} \Phi \frac{\partial \frac{1}{r''}}{\partial n''}\, df''.$$

Nach den vorangegangenen Ausführungen erhält man für die Seite *1*

$$\frac{\partial \frac{1}{r''}}{\partial n''} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$$

und für die Seite *2*

$$\frac{\partial \frac{1}{r''}}{\partial n''} = +\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}.$$

Daher ist

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{f''} \Phi \frac{\partial \frac{1}{r''}}{\partial n''}\, df'' = \frac{1}{4\pi}\int_{f} (\Phi_1 - \Phi_2) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, df.$$

Die Größe $\frac{1}{4\pi}(\Phi_1 - \Phi_2)$ wird Moment der Doppelschicht genannt und soll mit ν bezeichnet werden.

Der GREENsche Satz ergibt zusammen mit den Grundgesetzen folgenden allgemeinen Ausdruck für das elektrostatische Potential:

$$\Phi = \int_{\tau} \frac{\varrho}{r}\, d\tau + \int_{f} \frac{\omega}{r}\, df + \int_{f} \nu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, df. \tag{16}$$

Die praktische Anwendung der Formel hängt davon ab, ob ϱ, ω, ν gegeben sind oder nicht.

Aus der gegebenen Ableitung zieht man folgende Schlüsse. 1. Wenn die Normalkomponente des Potentialgradienten an irgendeiner Fläche eine sprunghafte Änderung aufweist, dann ist der Beitrag dieses Sprunges zum Ausdruck des Potentials ein solcher, als ob auf der Fläche eine Ladung verteilt wäre. Die Maßzahl der Flächendichte ist

$$\omega = -\frac{1}{4\pi}\left\{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_2\right\} = \frac{1}{4\pi}\{(\mathfrak{E}_n)_1 - (\mathfrak{E}_n)_2\}. \tag{17}$$

2. — $\Delta\Phi$ oder div $\mathfrak{E}$ nimmt an der Bildung des Potentials in gleicher Weise teil wie die räumliche Dichte. Deshalb ist $\Delta\Phi$ als aktive räumliche Dichte zu betrachten, deren genauer Wert

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi}\Delta\Phi = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\mathfrak{E} \tag{18}$$

beträgt. 3. Der Sprung des Potentials an einer Fläche kennzeichnet eine Doppelschicht; denn er trägt zur Erzeugung der Feldstärke bei.

§ 9. Potential einer Kugel

Auf einer geladenen leitenden Kugel verteilt sich die Ladung aus Symmetriegründen gleichmäßig über die Oberfläche. ω hat an jeder Stelle der Oberfläche den gleichen Wert. Deshalb ist

$$\Phi = \omega \int_f \frac{df}{r}.$$

Der Halbmesser der Kugel sei R. Man lege den Kugelmittelpunkt in den Anfangspunkt des Koordinatensystems, den Aufpunkt P in die X-Achse im Abstande a vom Mittelpunkt. Senkrecht zur X-Achse konstruiere man eine Kugelzone. Jeder Punkt derselben möge den Abstand r von P haben (Abb. 2). Für die Zonenoberfläche und r gilt

$$df = 2\pi R\, d\xi, \quad r = \sqrt{R^2 + a^2 - 2a\xi}.$$

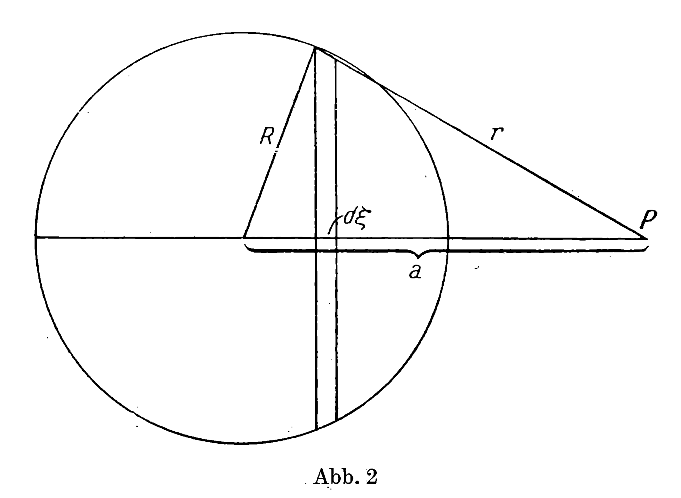


Abb. 2

Die Wurzel muß immer positiv genommen werden, da sie eine Strecke bedeutet. Für das Potential ergibt sich

$$\Phi = 2\pi R \omega \int_{-R}^{+R} \frac{d\xi}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2a\xi}} = -\frac{2\pi R}{a}\, \omega \sqrt{R^2 + a^2 - 2a\xi}\,\Big|_{-R}^{+R}$$

$$= -\frac{2\pi R\omega}{a} \left\{ \sqrt{R^2 + a^2 - 2aR} - \sqrt{R^2 + a^2 + 2aR} \right\}.$$

Liegt P außerhalb der Kugel ($a > R$), so ist der Wert der ersten Wurzel $a - R$, der der zweiten unabhängig von der Lage des Aufpunktes $a + R$. Daher gilt

$$\Phi_e = \frac{4\pi R^2 \omega}{a} = \frac{e}{a}, \tag{19}$$

wo e die Gesamtladung bedeutet. Auf einen äußeren Punkt wirkt die geladene Kugel so, als wäre ihre ganze Ladung im Mittelpunkt vereinigt. Ist hingegen P ein innerer Punkt ($a < R$), so wird die erste Wurzel $R - a$ und das Potential

$$\Phi_i = \frac{4\pi R^2 \omega}{R} = \frac{e}{R} = \text{const}. \tag{20}$$

Im ganzen Innern ist das Potential konstant. An der Oberfläche ($a = R$) wird $\Phi_e = \Phi_i$. Das Potential geht kontinuierlich durch die geladene Oberfläche.

§ 10. Kapazität, Kondensator

Bringt man einen ungeladenen metallischen Leiter in ein elektrisches Feld, so erfolgt ein ungeheuer schnell verlaufender Vorgang. Das Feld dringt in den Leiter ein, trennt die Ladungsträger entgegengesetzten Vorzeichens und führt die beweglichen, die Elektronen, der Feldrichtung entgegen von den Austrittsstellen der Kraftlinien zu den Eintrittsstellen hin. Dadurch entstehen zwei Flächenladungen entgegengesetzter Art, die ihrerseits ein zweites Feld erzeugen. Durch dieses wird das primäre im Inneren des Leiters vernichtet. Dieser Vorgang der Influenz endigt daher in einem Gleichgewichtszustand, der durch die Gesetze der Statik beschrieben werden kann. Uns interessiert augenblicklich nur jener Fall, in dem das Feld durch einen positiv geladenen Leiter erzeugt wird und die abgestoßene Influenzelektrizität des zweiten Leiters durch kurze Verbindung mit der Erde weggeschafft ist. Der Kraftfluß des ersten Leiters endigt ganz oder teilweise am zweiten. Ein solches System nennt man einen Kondensator. Seine Kapazität ist definitionsgemäß der Quotient

$$C = \frac{e}{\delta \Phi}. \tag{21}$$

Hier bedeutet e die Gesamtladung des positiven Leiters, $\delta\Phi$ die Differenz der inneren Potentiale der beiden Leiter. Denkt man sich einen geladenen Leiter allein im Raume anwesend, dann endigt sein Kraftfluß an der unendlich fernen Kugelfläche, an der das Potential Null ist. Es wird dann $\delta\Phi = \Phi_i$, d. h. gleich dem inneren Potential des Leiters, und der Quotient

$$C = \frac{e}{\Phi_i}$$

heißt die Kapazität des Leiters selbst. Aus der Form $\Phi_i = \frac{e}{C}$ ist ersichtlich, daß auf einen Leiter großer Kapazität eine beträchtliche Elektrizitätsmenge aufgespeichert werden kann, ohne daß sein Potential sehr hoch würde. Die

Kapazität gleicht dem Querschnitt eines Gefäßes. Je größer dieser ist, um so weniger hoch steigt eine gegebene Wassermenge. Nach Gleichung (20) wird die Kapazität einer Kugel

$$C = \frac{e}{\Phi_i} = R.$$

Die Kapazität einer Kugel ist gleich ihrem Halbmesser. Die absolute Einheit der Kapazität ist daher das Zentimeter. Lädt man eine Kugel vom Radius 1 cm mit der Einheitsladung auf, so ist auch das entstehende innere Potential gleich der Einheit. Der dreihundertste Teil davon heißt Volt. Bekanntlich ist die praktische Einheit der Ladung das Coulomb, das $3 \cdot 10^9$-fache der elektrostatischen Einheit. Volt und Coulomb entsprechen sehr gut den Anforderungen der Praxis. Fordert man jedoch, daß der Zusammenhang $e = C\Phi_i$ auch beim Gebrauch praktischer Einheiten bestehen bleibt, so muß man eine sehr große praktische Kapazitätseinheit, das Farad (F), definieren: $1\,\mathrm{F} = 9 \cdot 10^{11}$ cm, d. h. die Kapazität einer Kugel, deren Halbmesser 9 Millionen km beträgt. Das Mikrofarad ($1\,\mu\mathrm{F} = 10^{-6}\,\mathrm{F}$) entspricht der Kapazität einer Kugel von 9 km Halbmesser und ist in der Praxis gut zu gebrauchen. Die Kapazität der Erde ($R = 6370$ km) beträgt $708\,\mu$F.

Am Beispiel der Kugel ist ersichtlich, daß die Vergrößerung der Kapazität durch die Vergrößerung der Lineardimensionen der Kugel praktisch nicht zu erreichen ist; denn sie würde zu Ausdehnungen führen, die in der Praxis nicht zu gebrauchen sind. Das Kondensatorprinzip erlaubt jedoch, auch mit kleinen Geräten große Kapazitäten herzustellen. Der Kugelkondensator besteht aus zwei konzentrischen leitenden Kugelflächen. Der Halbmesser der inneren sei R_1, der der äußeren R_2. Erteilt man der inneren Kugel die Ladung $+e$, der äußeren die Ladung $-e$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn man sie mit der Erde verbindet, dann wird das Potential der inneren Kugelfläche

$$\Phi_i = \frac{e}{R_1} - \frac{e}{R_2}$$

und das der äußeren

$$\frac{e}{R_2} - \frac{e}{R_2} = 0.$$

Aus der ersten Gleichung erhält man

$$\frac{e}{\Phi_i} = C = R_1 \frac{R_2}{R_2 - R_1}. \tag{22}$$

Die Kapazität der inneren Kugel erscheint im Verhältnis $\frac{R_2}{R_2 - R_1}$ vergrößert.

§ 11. Potential einer unendlich ausgedehnten leitenden Ebene

Man lege die leitende Ebene in die YZ-Ebene des Koordinatensystems, den Aufpunkt P auf die X-Achse im Abstand x von der Ebene (Abb. 3). Da die

geometrischen Verhältnisse in jedem Punkte der Ebene dieselben sind, folgt die Unabhängigkeit der Flächendichte ω vom Orte. Man erhält daher

$$\Phi = \omega \int_f \frac{df}{r}.$$

Jene Punkte der Ebene, die den konstanten Abstand r von P haben, liegen im Inneren eines unendlich schmalen Kreisringes. Sein innerer Radius sei ϱ, seine Breite $d\varrho$. Sein Flächeninhalt ist dann $df = 2\pi\varrho d\varrho$. Da $\varrho^2 + x^2 = r^2$, folgt, daß $\varrho d\varrho = r dr$. Der Flächeninhalt wird $df = 2\pi r dr$. Es folgt: $\Phi = 2\pi\omega r \Big|_{|x|}^{\infty}$. Sieht man von der unendlichen Konstante ab, die doch keinen Einfluß auf grad Φ ausübt, so erhält man

$$\Phi = -2\pi\omega\,|x|.$$

$|x|$ bedeutet den positiven Anfangswert von r. Daher wird der Absolutwert genommen. Für die Feldstärke ergibt sich

$$\mathfrak{E}_x = 2\pi\omega \operatorname{sign} x, \quad \mathfrak{E}_y = 0, \quad \mathfrak{E}_z = 0.$$

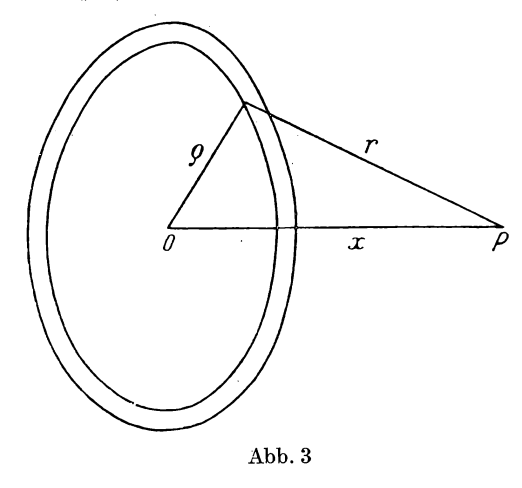


Abb. 3

Die Kraftlinien treten beiderseits senkrecht aus der Ebene und verlaufen parallel in Richtung der $+X$- bzw. $-X$-Achse. Die Verhältnisse in den beiden Halbräumen, die durch die Ebene getrennt sind, sind spiegelbildlich gleich. Ein Feld, dessen Kraftlinien parallele Geraden sind, heißt homogen.

Der Ebene stellen wir im Abstand $x = d$ eine zweite parallele Ebene gegenüber mit der Flächendichte $-\omega$. Ihr Potential wird nach dem Vorhergehenden $+2\pi\omega\,|x - d|$. Das gesamte Potential lautet damit

$$\Phi = 2\pi\omega\,\{|x - d| - |x|\}.$$

Links vor der ersten Ebene, wo x negativ ist, wird das Potential $2\pi\omega d$. Entsprechend dem konstanten Potential, gibt es dort keine Feldstärke. Rechts von der negativ geladenen Ebene wird das Potential $-2\pi\omega d$. Auch dort gibt es kein elektrisches Feld. Im Zwischenraum der beiden Ebenen gilt

$$\Phi = 2\pi\omega\,(d - 2x) \tag{23}$$

und die Feldstärke

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 4\pi\omega.$$

Das ganze homogene Kraftfeld beschränkt sich auf den Zwischenraum.

§ 12. Plattenkondensator

Annähernd dieselben Verhältnisse findet man vor, wenn man statt der unendlichen Ebenen zwei begrenzte und kongruente Ebenenstücke einander gegenüberstellt. Nur muß ihr Abstand d sehr klein gegen ihre Linearausdehnung sein. Abweichungen von der Homogenität des Feldes treten nur in der Nähe der Ränder auf. Diese Anordnung nennt man Plattenkondensator.

Der Flächeninhalt der einen Platte sei F. Auf der positiv geladenen sitzt die Ladung $e = F\omega$. Die Potentialdifferenz beträgt nach Gleichung (23) $4\pi\omega d$. Die Kapazität wird

$$C = \frac{F}{4\pi d}. \tag{24}$$

Ohne Bezugnahme auf die unendliche Ebene erhält man dasselbe Resultat auf folgendem Wege:

Der Kraftfluß, der senkrecht aus der positiven Platte tritt, ist

$$|\mathfrak{E}|\, F = 4\pi e, \quad \text{daraus folgt} \quad |\mathfrak{E}| = \frac{4\pi e}{F}.$$

Die Potentialdifferenz ist die Arbeit, die geleistet wird, wenn der Einheitspol von der positiven Platte zur negativen bewegt wird: $\delta\Phi = |\mathfrak{E}|\, d = \frac{4\pi e}{F}\, d$. Daraus folgt für die Kapazität

$$C = \frac{e}{\delta\Phi} = \frac{F}{4\pi d}.$$

§ 13. Dipol

Wir bestimmen das Potential einiger elektrischer Gebilde, die von theoretischem Interesse sind. Es mögen zwei entgegengesetzt gleiche Punktladungen betrachtet werden. Die gerichtete Länge, die von der Ladung $-e$ zu $+e$ zeigt, schreiben wir mit dem Vektorzeichen $\mathfrak{l}$. Der Vektor $\mathfrak{p} = e\mathfrak{l}$ wird elektrisches Moment des Gebildes genannt. Wir befassen uns hier mit dem speziellen Fall, in dem die zwei Punktladungen unendlich dicht benachbart sind, schreiben dann $d\mathfrak{l}$ für $\mathfrak{l}$, setzen aber voraus, daß infolge des sehr großen Wertes von e das Moment $\mathfrak{p} = e\,d\mathfrak{l}$ endlich bleibt. Das Gebilde heißt dann *Dipol*. Den Ort der negativen Ladung bezeichne der Punkt Q mit den Koordinaten ξ, η, ζ, die Koordinaten des Punktes Q', in dem die positive Ladung liegt, seien $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta + d\zeta$, und die des Aufpunktes P seien x, y, z. Zu den gebräuchlichen Zeichen übergehend, hat man

$$QP = r, \quad Q'P = r + dr, \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

Das Potential des Dipols wird dann

$$\Phi = -\frac{e}{r} + \frac{e}{r+dr} = -\frac{e\,dr}{r^2}.$$

Für dr ist zu setzen

$$dr = \frac{\partial r}{\partial \xi}\,d\xi + \frac{\partial r}{\partial \eta}\,d\eta + \frac{\partial r}{\partial \zeta}\,d\zeta, \quad \text{wobei} \quad \frac{\partial r}{\partial \xi} = -\frac{x-\xi}{r} \quad \text{usw.}$$

Daraus folgt

$$\Phi = -\frac{e}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\,d\xi + \frac{\partial r}{\partial \eta}\,d\eta + \frac{\partial r}{\partial \zeta}\,d\zeta\right).$$

Offensichtlich sind $e\,d\xi$, $e\,d\eta$, $e\,d\zeta$ die drei Komponenten des Momentes $\mathfrak{p}_x$, $\mathfrak{p}_y$, $\mathfrak{p}_z$. Daher gilt

$$\Phi = \left\{\mathfrak{p}_x \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{r} + \mathfrak{p}_y \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{1}{r} + \mathfrak{p}_z \frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{1}{r}\right\} = \left(\mathfrak{p}, \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r}\right). \tag{25}$$

Der Index Q am Gradientenzeichen bedeutet, daß der Gradient nach den Quellpunktskoordinaten, d.h. nach ξ, η, ζ, zu bilden ist. Da jedoch $\frac{\partial r}{\partial \xi} = -\frac{\partial r}{\partial x}$ ist, kann man auch schreiben

$$\Phi = -\left(\mathfrak{p}, \operatorname{grad}_P \frac{1}{r}\right). \tag{26}$$

Hier ist der Gradient nach den Koordinaten x, y, z des Aufpunktes zu bilden.

Mit dem Kraftliniensystem des Dipols wollen wir uns hier nicht besonders befassen, da es nach Definition des Dipols mit dem eines sehr kurzen Magneten übereinstimmt, das aus der Experimentalphysik gut bekannt ist.

Das Feld im Mittelpunkt des endlich ausgedehnten Dipols sei $\mathfrak{E}(\mathfrak{r})$. Das Kraftmoment bezüglich dieses Punktes wird

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} &= \left[\frac{\mathfrak{l}}{2}, e\mathfrak{E}\left(\mathfrak{r}+\frac{\mathfrak{l}}{2}\right)\right] + \left[-\frac{\mathfrak{l}}{2}, -e\mathfrak{E}\left(\mathfrak{r}-\frac{\mathfrak{l}}{2}\right)\right] \\ &= \left[\mathfrak{p}, \frac{\mathfrak{E}\left(\mathfrak{r}+\frac{\mathfrak{l}}{2}\right)+\mathfrak{E}\left(\mathfrak{r}-\frac{\mathfrak{l}}{2}\right)}{2}\right], \text{ im limes } \mathfrak{l} \to 0\text{: } \mathfrak{M} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{E}(\mathfrak{r})].\end{aligned}$$

Die translatorische Kraft, die auf den Dipol wirkt, ergibt sich zu

$$\mathfrak{K} = e\mathfrak{E}\left(\mathfrak{r}+\frac{\mathfrak{l}}{2}\right) - e\mathfrak{E}\left(\mathfrak{r}-\frac{\mathfrak{l}}{2}\right) = |\mathfrak{p}|\,\frac{\mathfrak{E}\left(\mathfrak{r}+\frac{\mathfrak{l}}{2}\right)-\mathfrak{E}\left(\mathfrak{r}-\frac{\mathfrak{l}}{2}\right)}{\mathfrak{l}}.$$

Beim Grenzübergang wird der zweite Faktor gleich dem Differentialquotienten des Feldes in der Richtung $\mathfrak{l}$ genommen. Die Komponenten der Kraft sind

$$\mathfrak{K}_x = (\mathfrak{p}, \operatorname{grad}\mathfrak{E}_x), \quad \mathfrak{K}_y = (\mathfrak{p}, \operatorname{grad}\mathfrak{E}_y), \quad \mathfrak{K}_z = (\mathfrak{p}, \operatorname{grad}\mathfrak{E}_z).$$

Demnach wirkt auf den Dipol eine translatorische Kraft nur in einem inhomogenen Felde, wie es z.B. STERN und GERLACH für magnetische Dipole benutzt haben.

§ 14. Doppelschicht

Längs einer Fläche f werden in kontinuierlicher Verteilung Dipole aneinandergereiht, und zwar so, daß ihre Momente überall in die Richtungen der Flächennormalen fallen. Die Fläche ist im allgemeinen nicht geschlossen. Von den zwei Normalrichtungen wird eine beliebig ausgewählt. Der Wert des Momentes eines Quadratzentimeters werde mit ν bezeichnet. Auf das Flächenelement df entfällt das Moment νdf. ν kann sich von Punkt zu Punkt ändern. Die Fläche wird Doppelschicht genannt, da sie entgegengesetzt gleiche Flächenbelegung besitzt. Das Potential der Doppelschicht wird nach Gleichung (25)

$$\Phi = \int \nu \, df \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r}; \tag{27}$$

ν bezeichnet man als Moment der Doppelschicht. Die Doppelschicht heißt homogen, wenn ν konstant ist. Nach dem Vorgang von GAUSS kann man dem Potential eine sehr anschauliche Form geben. Der Ausdruck $\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}$ kann geschrieben werden

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dn}.$$

Wir setzen voraus, daß der Aufpunkt P auf der positiven Seite des Elementes df liegt. Nach dieser Seite soll definitionsgemäß auch die Richtung der Normalen weisen. Der Vektor $\mathfrak{r}$ ist immer nach P gerichtet. In diesem Falle wird nach Abb. 4 $\frac{dr}{dn} = -\cos(n, r)$, da dr negativ ist, so daß

$$\Phi = \int \nu \frac{df \cos(n, r)}{r^2}$$

wird. Andererseits ist $df \cos(n, r)$ die Projektion von df auf die Oberfläche jener Kugel, deren Mittelpunkt in P liegt und die durch df geht. Dies ist leicht einzusehen, da $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{r}$ die Normalen der beiden Flächen sind. Vorübergehend heiße die Projektion df_r

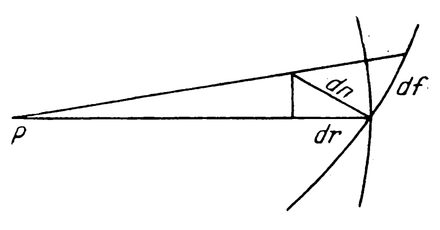


Abb. 4

$$df_r = df \cos(n, r).$$

Konstruiert man von P einen Kegel um df, dann schneidet dieser aus der Kugel mit dem Halbmesser r gerade df_r heraus. Es sei $d\Omega$ der Raumwinkel, unter dem df_r und auch df von P aus sichtbar sind, dann folgt

$$d\Omega = \frac{df_r}{r^2} = \frac{df \cos(n, r)}{r^2}.$$

Liegt jedoch P auf der negativen Seite von df, so ist der von df herstammende Potentialanteil $-\nu d\Omega$; denn in diesem Falle ist

$$\frac{dr}{dn} = +\cos(n, r).$$

Es gelte, daß im ersten Falle $d\Omega$ positiv, im zweiten negativ zu nehmen sei. Dann hat man ganz allgemein

$$\Phi = \int \nu \, d\Omega \tag{28}$$

und für eine homogene Doppelschicht

$$\Phi = \nu \Omega .$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß das Potential der Doppelschicht, wenn der Aufpunkt von der negativen Seite des Elementes df zur positiven hindurchgeht, einen Sprung von $4\pi\nu$ erleidet. Aus einfachen Betrachtungen folgt, daß sich beim Durchgang jedes $d\Omega$ stetig ändert, nur das zu df gehörige nicht. Bei vollkommener Annäherung der negativen Seite von df durch den Aufpunkt erscheint df unter dem Raumwinkel -2π, nach dem Durchgang unter 2π. Der Sprung des Winkels beträgt 4π, dem der Potentialsprung $4\pi\nu$ entspricht.

Die Differentialquotienten von Φ ändern sich dagegen stetig beim Durchgang.

Die Darstellung des Potentials durch den Raumwinkel führt unmittelbar zu folgenden Sätzen. Das Potential einer homogenen geschlossenen Doppelschicht ist in jedem inneren Punkt $4\pi\nu$, oder $-4\pi\nu$, in jedem äußeren Null. Weder im Inneren noch im Äußeren einer solchen Doppelschicht herrscht ein Feld.

Eine Doppelschicht entsteht immer dann, wenn zwei verschiedene Körper in Berührung gebracht werden. Reiben wir Glas mit Leder, so geht unser Bestreben ausschließlich dahin, die Berührung auf einer möglichst großen Fläche herzustellen. Durch den Übergang der Glaselektronen auf das Leder erhält die Oberfläche des Glases eine positive, die des Leders eine negative Belegung. Beide zusammen bilden eine Doppelschicht. Dieselbe Erscheinung tritt bei der Berührung zweier Metalle auf. Die Potentialdifferenz hängt von der Natur der Metalle und von der Temperatur ab. Die zwei Flächen bilden einen Kondensator mit sehr kleinem „Plattenabstand" δ. Die Kapazität beträgt

$$C = \frac{F}{4\pi\delta} .$$

Werden die Flächen auf den Abstand d gebracht, so fällt die Kapazität auf den Wert $\frac{F}{4\pi d}$. Die Potentialdifferenz steigt dann im Verhältnis $\frac{d}{\delta}$ an. Daher kommt es, daß zwischen Glas und Leder eine Potentialdifferenz von mehreren tausend Volt auftritt. Da bei den Metallen das Auseinanderziehen nicht in jedem Punkte zugleich erfolgen kann, gleicht sich die Potentialdifferenz an den noch vorhandenen Berührungsstellen aus und sinkt auf den Wert der ursprünglichen Doppelschicht. Darum erhält man mit Metallplatten eine viel geringere Potentialdifferenz als mit Isolatoren.

Unsere frühere Feststellung, daß im Inneren von Leitern das Potential überall gleich sei, gilt nur für homogene und durchweg gleichtemperierte Leiter.

§ 15. Influenz

Es sollen einige Fälle der Influenz mit Hilfe der Bildpunktmethode behandelt werden, der man sich oft mit großem Vorteil bedient. Gegeben sei eine leitende Kugel mit dem Halbmesser R. Außerhalb dieser, im Abstande d vom Mittelpunkt O, befinde sich eine Punktladung e (Abb. 5). Ihr Ort sei durch den Punkt A gekennzeichnet. Gefragt wird nach dem Feld, das durch die Influenzwirkung der Ladung e hervorgerufen wird. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden: 1. Die gleichnamige Influenzelektrizität wird zur Erde abgeleitet, die Kugel besitzt das innere Potential Null. 2. Die Kugel ist isoliert und hat eine gegebene Ladung.

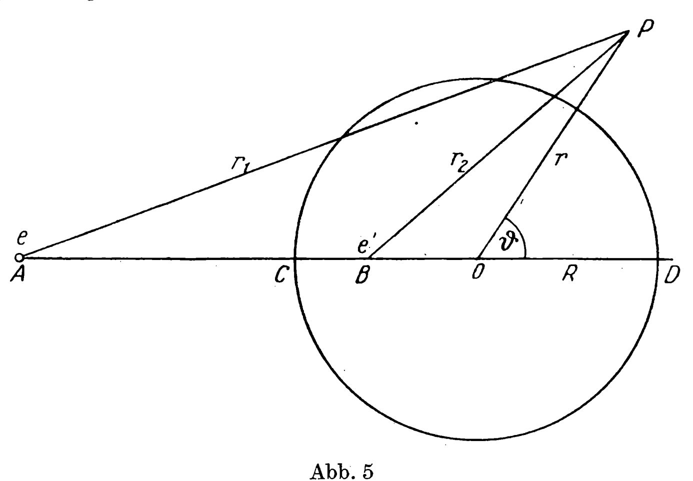


Abb. 5

Wir behandeln zuerst den Fall 1. Im Inneren der Kugel zwischen A und O nehmen wir den Bildpunkt B in der Entfernung d' vom Mittelpunkt an, denken uns dort eine Hilfsladung $-e'$ angebracht und fragen, ob nicht durch geeignete Wahl von e' und d' der Potentialwert Null auf der Kugel erzwungen werden kann. Für den zunächstliegenden Kugelpunkt C muß dann gelten

$$\frac{e}{d-R} - \frac{e'}{R-d'} = 0$$

und für den am weitesten entfernt liegenden Kugelpunkt D

$$\frac{e}{d+R} - \frac{e'}{d'+R} = 0.$$

Aus diesen zwei Gleichungen folgt

$$d' = \frac{R^2}{d}, \quad e' = \frac{R}{d}\,e. \tag{29}$$

Der Aufpunkt P habe bezüglich O die Polarkoordinaten r, ϑ. Seine Abstände von den zwei Ladungen seien r_1 und r_2. Es ist

$$\left.\begin{aligned} r_1^2 &= d^2 + r^2 + 2dr\cos\vartheta, \\ r_2^2 &= d'^2 + r^2 + 2d'r\cos\vartheta = \frac{R^4}{d^2} + r^2 + 2\frac{R^2}{d}r\cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Liegt P auf der Kugel ($r = R$), dann soll gelten

$$\frac{e}{r_1} - \frac{e'}{r_2} = 0 \quad \text{oder} \quad r_1 R = r_2 d.$$

Nach (30) ist diese Gleichung identisch erfüllt; das Potential ist auf der ganzen Kugeloberfläche Null. Für einen äußeren Punkt gilt dann

$$\Phi_e = \frac{e}{r_1} - \frac{e'}{r_2}, \tag{31}$$

das innere Potential soll gleich dem Randpotential Null sein. Der Kraftfluß, der durch die Oberfläche geht, ist nach dem zweiten elektrostatischen Grundgesetz $-4\pi e'$. Wäre die positive Influenzelektrizität noch auf der Kugel, so würde noch ein positiver Kraftfluß hinzutreten. Da dies nicht der Fall ist, entsprechen unsere Ergebnisse wirklich der ersten Annahme. Die influenzierte Oberflächendichte ergibt sich aus Gleichung (9).

Der Fall 2 ist am einfachsten für eine ladungslose Kugel zu erledigen. Der von der Hilfsladung $-e'$ herstammende Kraftfluß $-4\pi e'$ muß dann durch einen gleich großen positiven vernichtet werden, aber in solcher Weise, daß die Konstanz des Oberflächenpotentials nicht zerstört wird. Dies erreicht man, indem man eine zweite Hilfsladung e' in den Mittelpunkt bringt. Das äußere Potential wird dann

$$\Phi_e = \frac{e}{r_1} - \frac{e'}{r_2} + \frac{e'}{r}, \tag{32}$$

das innere wieder gleich dem Randpotential. Die zwei Hilfsladungen $-e'$ und $+e'$ im Abstand d' bilden einen endlich ausgedehnten Dipol mit dem Moment

$$|\mathfrak{p}| = e'd' = e\frac{R^3}{d^2}. \tag{33}$$

Die Kugel ist jetzt wirklich ladungslos, auf ihrer Oberfläche sind die Influenzladungen beider Art vorhanden. Das Randpotential ist

$$\frac{e'}{R} = \frac{e}{d}.$$

Das ist das Potential der äußeren Ladung e im Mittelpunkt O, wenn man sich die Kugel wegdenkt. Wir wenden unsere Resultate auf zwei spezielle Fälle an.

§ 16. Punktladung gegenüber einer leitenden Ebene

Die Punktladung befinde sich im Abstand a von der Ebene. Dieser Fall ergibt sich aus dem Vorhergehenden, wenn man den Mittelpunkt der Kugel ins Unendliche rücken und zugleich d und R über alle Grenzen wachsen läßt, so daß

$$d - R = a$$

wird. Man hat dann im limes

$$\frac{R}{d} = 1, \quad e' = e, \quad R - d' = \frac{R}{d}(d - R) = a.$$

Die Hilfsladung ist entgegengesetzt gleich der wirklichen und befindet sich im Spiegelpunkt derselben. Die positive Influenzelektrizität denken wir uns abgeleitet. Das Potential wird dann

$$\Phi = \frac{e}{r_1} - \frac{e}{r_2}.$$

Es ist gültig für den „äußeren" Raum, d. h. für den Halbraum, in dem die wirkliche Ladung liegt. Auf der Ebene ist das Potential Null. Das „innere" Potential im zweiten Halbraum soll ebenfalls als verschwindend betrachtet werden. Wir wollen die Dichte der negativen Influenzelektrizität auf der leitenden Ebene berechnen. Es sei $\mathfrak{n}$ die nach dem ersten Halbraum weisende Normale. Nach Gleichung (9) ist

$$\omega = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{e}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1^2}\frac{\partial r_1}{\partial n} - \frac{1}{r_2^2}\frac{\partial r_2}{\partial n}\right) = -\frac{e}{2\pi}\frac{a}{r_1^3}.$$

Die Flächendichte ist der dritten Potenz des Abstandes von der Punktladung umgekehrt proportional. Die gesamte Ladung ergibt sich in der Form

$$\int \omega\, df = -\frac{e a}{2\pi}\int\limits_a^\infty \frac{df}{r_1^3}.$$

Für df schreibt man am besten wie in § 11 $2\pi r_1\, dr_1$. Dann folgt unmittelbar

$$\int \omega\, df = -e.$$

Das bedeutet, daß alle Kraftlinien, die von der Punktladung e ausgehen, auf der Ebene endigen. Wie wir sahen, ist das bei einer Kugel von endlichem Halbmesser nicht der Fall. Dort tritt vom Kraftfluß $4\pi e$ nur der Anteil $4\pi e'$ in die Fläche ein. Das Verhältnis beider ist $\frac{e'}{e} = \frac{R}{d}$.

Die Influenz verhindert das genaue Ausmessen des Feldes durch ein Probekügelchen. Wird dieses zu nahe an einen geladenen Leiter herangebracht, so entstehen beträchtliche Influenzladungen auf demselben, die sein ursprüngliches Feld verändern. Man mißt dann das veränderte Feld. Gering wird die Störung

nur, wenn die Ladung des Probekörpers sehr klein ist und sein Abstand vom Leiter groß. Unsere Darlegungen illustrieren die Verhältnisse sehr anschaulich. Eine ungeladene Ebene erzeugt natürlich kein Feld, die Probeladung e sollte mithin keine Kraft erfahren. Tatsächlich aber steht sie unter der Einwirkung der Bildladung $-e$, sie zeigt die Kraft $\frac{e^2}{(2a)^2}$ an. Nur wenn e klein und a groß ist, wird angenähert das richtige Feld gemessen.

§ 17. Leitende Kugel im homogenen Felde

Die Kugel sei isoliert und ohne Ladung (Abb. 6). Wir haben es somit mit dem Fall 2 zu tun. Das homogene Feld erhalten wir, indem wir die äußere Punkt-

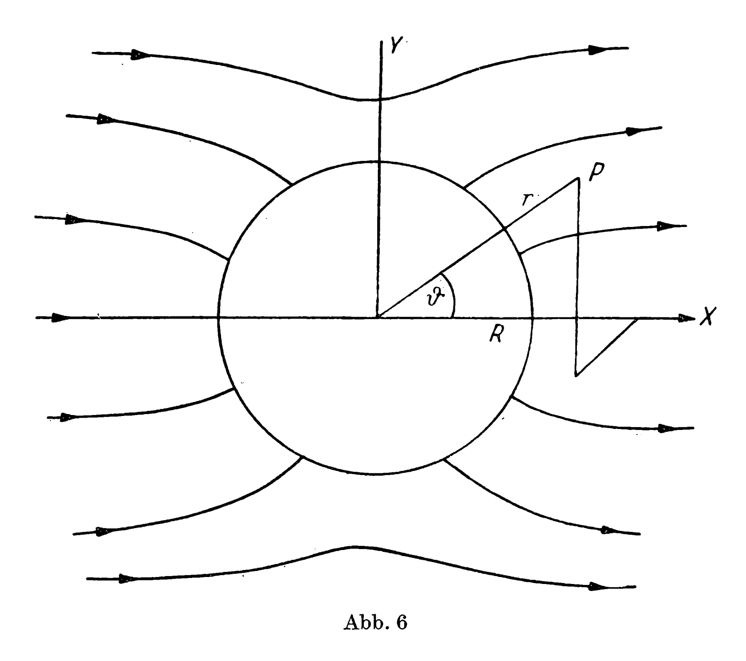


Abb. 6

ladung ins Unendliche rücken lassen, ihre Ladung aber in solcher Weise vergrößern, daß der ursprüngliche Wert des Feldes im Punkte O: $\frac{e}{d^2} = |\mathfrak{E}_0|$ unverändert bleibt. Für $d \to \infty$ wird das Feld natürlich homogen, und sein Potential lautet $-|\mathfrak{E}_0|\, x$. Dies ist an die Stelle von $\frac{e}{r_1}$ in Formel (32) zu setzen. Nach Gleichung (29) wird $d' = \frac{R^2}{d} = 0$, der Bildpunkt rückt in den Mittelpunkt der Kugel und vereinigt sich mit der dortigen Hilfsladung zu einem unendlich gering ausgedehnten Dipol mit dem Moment $|\mathfrak{p}| = \frac{e}{d^2} R^3$ oder $\mathfrak{p} = \mathfrak{E}_0 R^3$. Für das

zweite und dritte Glied in Gleichung (32) ist mithin das Potential dieses Dipols zu schreiben. Setzt man es aus Gleichung (26) ein, so wird das äußere Gesamtpotential

$$\Phi_e = -|\mathfrak{E}_0|\, x - \left(\mathfrak{p}, \operatorname{grad}_P \frac{1}{r}\right) = -|\mathfrak{E}_0| \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) x \tag{34}$$

oder in Polarkoordinaten

$$\Phi_e = -|\mathfrak{E}_0| \left(r - \frac{R^3}{r^2}\right) \cos\vartheta. \tag{34'}$$

An der Oberfläche der Kugel ($r = R$) wird es Null. Dieser Wert gilt für den ganzen Innenraum. Da im vorliegenden Falle $\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)_1 = \frac{\partial}{\partial r}$ wird, erhält man aus Gleichung (9) für die Oberflächendichte

$$\omega = \frac{3}{4\pi} |\mathfrak{E}_0| \cos\vartheta. \tag{35}$$

Daraus ist ersichtlich, daß die dem Felde zugewandte Seite der Kugel $\left(\vartheta > \frac{\pi}{2}\right)$ negativ, die abgewandte $\left(\vartheta < \frac{\pi}{2}\right)$ positiv geladen ist. Für zwei Zonen, die symmetrisch zur YZ-Ebene liegen und demnach zu den Werten ϑ, $\pi - \vartheta$ gehören, ist die Dichte entgegengesetzt gleich. Die Gesamtladung ist daher Null. In sehr großer Entfernung von der Kugel können die Influenzladungen das äußere homogene Feld nicht merklich beeinflussen. Tatsächlich erhält man aus Gleichung (34) für $r \to \infty$ und beliebiges x

$$\Phi_e = -|\mathfrak{E}_0|\, x,$$

also das ungestörte homogene Feld.

§ 18. Influenzvektor

Die Influenzwirkung kann man zur Definition eines neuen Vektors benutzen. Zwei kleine und kongruente leitende Scheiben werden in Deckungslage an isolierenden Griffen in das Feld gebracht. Durch Influenz erhalten sie entgegengesetzt gleiche Ladungen. Nachdem man sie an Ort und Stelle getrennt, wird die Ladung der positiven Scheibe in einem Faradayschen Becher gemessen. Der Quotient aus Ladung und Fläche gibt die Flächendichte, die die Scheibe im Felde besaß. Durch Versuch kann die Stellung des Scheibenpaares leicht ermittelt werden, in der die Flächendichte ω maximal wird. Die äußere Normale der positiven Scheibe weist dann in eine bestimmte Richtung, in der wir den Zahlenwert $4\pi\omega$ auf die Normale auftragen. Auf diese Weise wird ein Vektorfeld bestimmt. Zur Deutung unseres Vorgehens benutzen wir die Formel (6). Das dortige $\mathfrak{n}$ möge die äußere Normale der positiven Scheibe bedeuten. Es wird dann $(\mathfrak{E}_n)_2 = 0$ und $4\pi\omega = \mathfrak{E}_n$. Die Versuche zeigen ohne weiteres, daß das Maximum von ω dann auftritt, wenn die Normale in die Feldrichtung zeigt. Es ist daher $\mathfrak{E}_n = |\mathfrak{E}|$.

Voraussetzung der Messung ist, daß die Verwendung der Scheiben den Verlauf des Feldes an der betreffenden Stelle nicht merklich beeinflußt. Durch THOMSONsche Schutzringe kann das in guter Näherung erreicht werden.

Als Ergebnis folgt, daß die durch die ponderomotorische Kraft definierte Feldstärke $\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{K}}{e}$ durch Influenz die Flächendichte $\omega = \frac{1}{4\pi}\,|\mathfrak{E}|$ erzeugt. Den soeben eingeführten Vektor vom Betrage $4\pi\omega$ nennt man Verschiebungsvektor oder Vektor der elektrischen Induktion. Sein allgemein übliches Zeichen ist $\mathfrak{D}$. Im Vakuum ist, wie wir sahen, $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$. Wichtig wird er jedoch im folgenden Abschnitt der Dielektrika.

DIELEKTRIKA

§ 19. Grundgesetze

Unsere bisherigen Erörterungen bezogen sich auf Vorgänge im Vakuum. Wie ändern sich nun die erhaltenen Resultate, wenn man die Ladungen in einen Isolator bringt? Gase isolieren vorzüglich, von den Flüssigkeiten ist z.B. Paraffinöl zu nennen. Diese Körper verändern das im Vakuum bestehende Feld in bestimmter Art, erweisen sich aber als felddurchlässig. Deshalb nannte FARADAY (1791–1867) die Isolatoren Dielektrika. Viele der festen Dielektrika besitzen Kristallstruktur. Solche sollen hier ausgeschlossen werden. Ihr Studium ist besonders in der Optik von Bedeutung. Hier betrachten wir ausschließlich isotrope Dielektrika.

Grundlegend ist folgender Versuch. Mit der COULOMBschen Drehwaage bestimmen wir die Kraft, die die beiden Ladungen e_1 und e_2 im Abstand r aufeinander ausüben:

$$|\mathfrak{K}| = \frac{|e_1 \cdot e_2|}{r^2}.$$

Nun füllen wir den Glaszylinder, der die Waage umgibt, mit irgendeinem flüssigen Dielektrikum. Die ponderomotorische Kraft wird jetzt merklich kleiner. Wir wiederholen den Versuch mit beliebigen flüssigen oder gasartigen Isolatoren. Das Ergebnis bleibt stets dasselbe, die ponderomotorische Kraft sinkt. Das Maß der Verringerung hängt jedoch nicht vom Abstand der Ladung ab, es ist eine charakteristische Konstante des Dielektrikums. Das COULOMBsche Gesetz lautet daher

$$|\mathfrak{K}| = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{|e_1 \cdot e_2|}{r^2}. \tag{36}$$

ε ist stets positiv und größer als Eins. Es ist die dielektrische Konstante des Stoffes. Die entsprechende Konstante des Vakuums ist natürlich 1.

Die Feldstärke wird auch im Dielektrikum als die auf die Einheitsladung wirkende Kraft definiert. Schreibt man in Gleichung (36) $e_1 = e$, $e_2 = 1$, so folgt

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{e}{r^2}\,\mathfrak{r}'.$$

$\mathfrak{r}'$ ist der Einheitsvektor, der von der Ladung zum Aufpunkt mit dem Einheitspol weist. Wie ersichtlich, ist die Feldstärke der negative Gradient des Ausdruckes

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon} \frac{e}{r}. \tag{37}$$

Φ ist daher das Potential der Punktladung e. Da ein beliebiges elektrisches Gebilde aus gering ausgedehnten Ladungselementen zusammengesetzt gedacht werden kann, folgt, daß das Feld auch im Dielektrikum aus einem Potential ableitbar ist.

Wir wollen unsere bisherigen empirischen Aussagen etwas straffer fassen. Der Versuch mit der Drehwaage zeigt, daß sich das COULOMBsche Kraftgesetz nur dann ergibt, wenn die beiden geladenen Kugeln sowohl vom Glas- als auch vom Luftrande des flüssigen Dielektrikums weit genug entfernt sind. Das weist auf einen Einfluß der Ränder hin. Wir folgern daraus, daß Gleichung (36) und Gleichung (37) nur für ein homogenes und unendlich ausgebreitetes Dielektrikum Gültigkeit besitzen. Der allgemeine Fall, den wir uns vor Augen halten müssen, besteht darin, daß der Raum außerhalb der geladenen Leiter von beliebig vielen und verschiedenen Dielektrika ausgefüllt sein kann (unter denen natürlich auch das Vakuum vorkommen kann). Es gilt nun, die zwei Grundgesetze der Elektrostatik den Gegebenheiten entsprechend zu formulieren.

Das erste Grundgesetz bleibt vollkommen unverändert. Das Linienintegral der Feldstärke über eine geschlossene Kurve verschwindet. Es ist belanglos, durch wie viele Dielektrika die Kurve hindurchgeht. Die Erfahrung zeigt, daß die Feldstärke keine Arbeit leistet, wenn der Einheitspol längs einer solchen Kurve entlanggeführt wird. Aus dem STOKESschen Satz folgt dann sofort die Wirbelfreiheit der elektrischen Feldstärke und die Existenz eines Potentials:

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \Phi. \tag{38}$$

Anders steht es mit dem zweiten Grundgesetz. Schon für ein einziges Dielektrikum zeigt Gleichung (37), daß zur Bildung des Potentials nicht die ganze Ladung e, sondern nur der Bruchteil $e' = \frac{e}{\varepsilon}$ beiträgt. Das bedeutet, daß aus der geschlossenen Oberfläche f, die die Ladung e enthält, nicht der Kraftfluß $4\pi e$, sondern $4\pi e'$ austritt. Bildlich gesprochen, entspringen der Ladung e $4\pi e'$ Kraftlinien. Die Gleichungen (3), (4) und (6) erhalten daher folgende Formen:

$$\int \mathfrak{E}_n df = 4\pi e', \quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = -\Delta\Phi = 4\pi\varrho', \quad (\mathfrak{E}_n)_1 - (\mathfrak{E}_n)_2 = 4\pi\omega'. \tag{39}$$

Die Größen e', ϱ', ω' werden freie Ladung bzw. freie Dichten genannt, im Gegensatz zu e, ϱ, ω, die man wahre Ladung bzw. wahre Dichten nennt. Die wahren Größen sind die wirklichen Daten des Problems. Liegen diese Ladungen oder Dichten in einem der anwesenden Dielektrika mit der Konstante ε, so sind die entsprechenden freien Größen

$$e' = \frac{e}{\varepsilon}, \quad \varrho' = \frac{\varrho}{\varepsilon}, \quad \omega' = \frac{\omega}{\varepsilon}. \tag{40}$$

Da auch von Rändern, die nicht aufgeladen wurden, Kraftwirkungen ausgehen, darf man die Möglichkeit nicht ausschließen, daß freie Elektrizität nicht unbedingt als Bruchteil einer wahren auftreten muß. Im allgemeinen wird man daher die Gleichungen (39) als Definitionsgleichungen der freien Größen betrachten. Einen Ersatz für das zweite Grundgesetz bilden sie nicht.

Die Begriffsbildung der freien Dichten ist vollkommen berechtigt; denn im Falle der Dielektrika treten nach obigem im Potentialausdruck (16) die freien Dichten an die Stelle der wahren. Die Gleichung lautet dann

$$\Phi = \int \frac{\varrho'}{r}\, d\tau + \int \frac{\omega'}{r}\, df + \int \nu' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, df, \tag{41}$$

wo ϱ' und ω' durch Gleichung (39), ν' durch die Gleichung $\nu' = \frac{1}{4\pi}(\Phi_1 - \Phi_2)$ definiert sind.

Um die neue Form des zweiten Grundgesetzes zu erhalten, muß man die Erfahrung heranziehen. Auch im Dielektrikum kann man die eben besprochene Messung mit zwei leitenden Scheiben durchführen, mithin auch hier auf Grund der Influenzwirkung des Feldes einen $\mathfrak{D}$-Vektor definieren. Der Versuch führt zu folgendem Ergebnis:

1. Die äußere Normale der positiven Scheibe muß auch jetzt in die Richtung des Feldes gelegt werden, damit auf der Scheibe eine maximale Influenzladung entstehe. Der $\mathfrak{D}$-Vektor weist in die Richtung des Feldes.

2. Man führe den Versuch in einem beliebigen Dielektrikum aus. Zum gewählten Dielektrikum gehöre die Konstante ε. Dann wird die Flächendichte der Scheibe nicht $\frac{1}{4\pi}|\mathfrak{E}|$ wie im Vakuum, sondern $\frac{1}{4\pi}\varepsilon\,|\mathfrak{E}|$. Daraus folgt sofort

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}. \tag{42}$$

Nebenbei sei bemerkt, daß in kristallinen Medien $\mathfrak{D}$ auch der Richtung nach nicht mit $\mathfrak{E}$ übereinstimmt. Dort gelten die Relationen

$$\mathfrak{D}_x = \varepsilon_{11}\mathfrak{E}_x + \varepsilon_{12}\mathfrak{E}_y + \varepsilon_{13}\mathfrak{E}_z;\quad \mathfrak{D}_y = \varepsilon_{21}\mathfrak{E}_x + \varepsilon_{22}\mathfrak{E}_y + \varepsilon_{23}\mathfrak{E}_z;$$
$$\mathfrak{D}_z = \varepsilon_{31}\mathfrak{E}_x + \varepsilon_{32}\mathfrak{E}_y + \varepsilon_{33}\mathfrak{E}_z. \tag{43}$$

Für stückweise konstante Werte von ε und für Orte, die im Inneren eines homogenen Dielektrikums liegen, folgt aus den Gleichungen (39)

$$\int \mathfrak{D}_n\, df = 4\pi e, \tag{44}$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{D} = -\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad}\Phi) = 4\pi\varrho, \tag{45}$$

$$(\mathfrak{D}_n)_1 - (\mathfrak{D}_n)_2 = 4\pi\omega. \tag{46}$$

Wir lassen jedoch die Beschränkungen fallen und messen diesen Gleichungen allgemeine Gültigkeit bei; denn sie werden durch die Erfahrung nicht nur für

konstantes, sondern auch für kontinuierlich oder diskontinuierlich veränderliches ε gut bestätigt. Sie stellen die allgemeine Fassung des zweiten Grundgesetzes dar. Für das Vakuum gehen sie der Reihe nach in die Gleichungen (3), (4), (6) über.

Die Gleichung (44), aus der die Gleichungen (45) und (46) rechnerisch folgen, besagt, daß der Induktionsfluß, der einer geschlossenen Fläche entströmt, gleich dem 4π-fachen der eingeschlossenen wahren Ladung ist. Nach Gleichung (39) sind die freien Ladungen die Quellen des Kraftflusses, nach Gleichung (44) die wahren Ladungen die Quellen des Induktionsflusses.

§ 20. Kapazität des Plattenkondensators

Es möge die Kapazität des Plattenkondensators bestimmt werden, wenn das Vakuum zwischen den Platten durch ein Dielektrikum mit der Konstante ε ersetzt wird. Die Kapazität vergrößert sich dabei. Die Beobachtung dieses Anstieges spielte in der Geschichte der Physik eine wichtige Rolle. Vor FARADAY dachte man sich den Isolator erschöpfend durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß er die Elektrizität nicht leite. Die Änderung der Kapazität war es, die FARADAY vermuten ließ, daß das Dielektrikum an der Ausbildung des Feldes aktiven Anteil habe.

Man gebe der einen Belegung die positive Ladung e. Die $4\pi e$ Induktionslinien, die von ihr ausgehen, erzeugen in der gegenüberliegenden Belegung die Ladung $-e$. Die positive Influenzelektrizität möge zur Erde abgeleitet werden. Parallel mit den Induktionslinien laufen die $\frac{4\pi e}{\varepsilon}$ Kraftlinien, und ihre Dichte, die zugleich die Feldstärke ergibt, wird

$$|\mathfrak{E}| = \frac{1}{\varepsilon}\frac{4\pi e}{F}.$$

Die Potentialdifferenz der Platten ist gleich der Arbeit, die die Feldstärke leistet, wenn der Einheitspol den Plattenabstand d durchläuft:

$$\delta\Phi = \frac{1}{\varepsilon}\frac{4\pi e}{F}d.$$

Somit wird die Kapazität

$$C = \frac{e}{\delta\Phi} = \varepsilon\frac{F}{4\pi d}. \tag{47}$$

Im Vergleich mit dem leeren Kondensator ist die Kapazität ε-mal so groß. Leer oder mit Luft gefüllt bedeutet praktisch dasselbe; denn die Dielektrizitätskonstante der Luft ist 1,0006, unterscheidet sich also kaum von 1. Die Messung der Kapazität einmal im Vakuum, das anderemal mit dem Dielektrikum im Zwischenraum bildet eine bequeme und genaue Art der Messung von ε. Ja man könnte auch die Definition von ε direkt auf den Kondensatorversuch gründen und daraus die Schwächung des Feldes einer Ladung im Dielektrikum ableiten. Die Überlegung wäre dann folgende: Da die Ladung in beiden Fällen die-

selbe ist, kann die Kapazität im zweiten Fall nur dadurch ε-mal so groß geworden sein, daß die Potentialdifferenz der Belegung auf den ε-ten Teil abgenommen hat. Dies wird übrigens durch ein angelegtes Elektrometer direkt nachgewiesen. Im ersten Falle ist

$$\delta\Phi = |\mathfrak{E}|\, d, \quad \text{im zweiten} \quad \delta\Phi' = |\mathfrak{E}'|\, d.$$

Aus

$$\delta\Phi' = \frac{1}{\varepsilon}\,\delta\Phi \quad \text{folgt unmittelbar} \quad \mathfrak{E}' = \frac{1}{\varepsilon}\,\mathfrak{E}.$$

Wir sind in § 19 den umgekehrten Weg gegangen, da er die Grundtatsache der Feldverkleinerung schärfer hervorhebt.

§ 21. Grenzbedingungen

Wie schon am Schluß des § 14 erwähnt wurde, entsteht bei der Berührung zweier verschiedener Körper eine Doppelschicht. Das gilt natürlich auch für Dielektrika. Es treten z. B. vom Glas auf das Leder Elektronen über und bilden dort eine negative Schicht. Der Überschuß positiver Ladung an der Glasfläche bildet die andere Schicht. Der Vorgang geht auch dann vor sich, wenn die Grenzfläche keiner äußeren Feldwirkung ausgesetzt ist. Elektronen und Ionen sind Träger wahrer Elektrizität. Greift man daher ein Element einer Doppelschicht heraus, so stehen sich dort wahre und entgegengesetzt gleiche Dichten $+\omega$ und $-\omega$ gegenüber. Tritt der Aufpunkt durch die Dichtebelegung $+\omega$ hindurch in das Innere der Schicht, so erleidet die Normalkomponente des Verschiebungsvektors $\mathfrak{D}_n$ nach Gleichung (46) den Sprung $4\pi\omega$. Beim Weiterschreiten des Aufpunktes durch die negative Belegung wird dieser Sprung durch den entgegengesetzten wieder rückgängig gemacht. In Wirklichkeit aber ist die Dicke der Doppelfläche von atomarer Dimension, so daß es keinen praktischen Sinn hat, von ihrem Inneren zu sprechen. Man spricht ganz einfach vom Durchgang des Aufpunktes durch die Doppelschicht. Dann erleidet $\mathfrak{D}_n$ keine Änderung. Ladet man die Grenzfläche auch nicht mit einer geriebenen Glas- oder Ebonitstange auf, so hat man nach Gleichung (46) ganz allgemein

$$(\mathfrak{D}_n)_1 = (\mathfrak{D}_n)_2 \tag{48}$$

oder

$$\varepsilon_1(\mathfrak{E}_n)_1 = \varepsilon_2(\mathfrak{E}_n)_2. \tag{49}$$

Während also $\mathfrak{D}_n$ unverändert durch die Grenzfläche zweier Dielektrika hindurchgeht, erleidet dort $\mathfrak{E}_n$ einen Sprung.

Umgekehrt verhalten sich die Tangentialkomponenten. Hier führt das erste Grundgesetz der Statik zum Ziele. Abb. 7 zeigt die Grenzfläche der beiden Dielektrika. Wir bilden den Ausdruck der Arbeit, die geleistet werden muß, wenn der Einheitspol längs der geschlossenen Linie $ABB'A'A$ einmal herumgeführt wird. Die Seiten AA' und BB' seien von höherer Ordnung klein als die Seiten $AB = A'B' = d$. Dann wird die Arbeit längs AB gleich $(\mathfrak{E}_t)_1 d$, längs

BB' gleich $\Phi_1 - \Phi_2$, am Rückwege entlang $B'A'$ gleich $-(\mathfrak{E}_t)_2 d$ und schließlich beim Übergang $A'A$ gleich $\Phi_2 - \Phi_1$. Es besteht daher die Forderung

$$\{(\mathfrak{E}_t)_1 - (\mathfrak{E}_t)_2\}\, d = 0,$$

und daraus folgt

$$(\mathfrak{E}_t)_1 = (\mathfrak{E}_t)_2. \tag{50}$$

Die Tangentialkomponente der Feldstärke geht stetig durch die Grenzfläche. Schreiben wir die Gleichung in der Form

$$\frac{1}{\varepsilon_1}(\mathfrak{D}_t)_1 = \frac{1}{\varepsilon_2}(\mathfrak{D}_t)_2, \tag{51}$$

so ist ersichtlich, daß die Tangentialkomponente von $\mathfrak{D}$ an der Grenze eine sprunghafte Änderung erleidet.

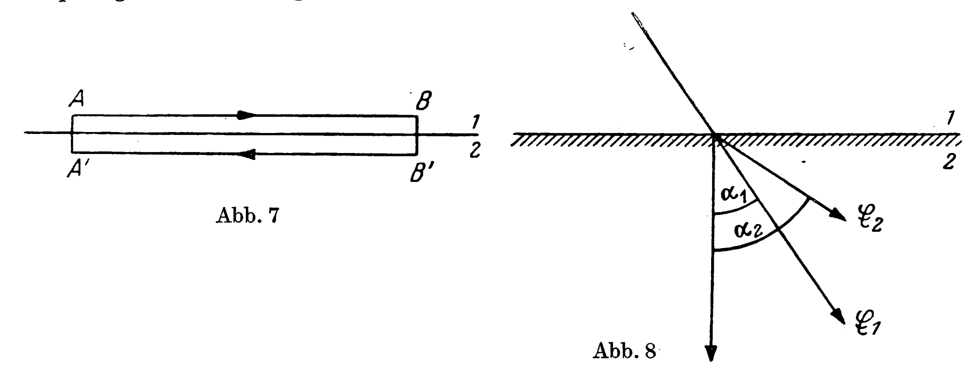


Abb. 7

Abb. 8

Die Gleichungen (49) und (50) bestimmen das Brechungsgesetz der Kraftlinien an der Grenzfläche zweier Dielektrika. Der Einfall der Kraftlinien erfolge vom ersten gegen das zweite Dielektrikum. Das Einfallslot ist dann ebenfalls vom ersten in das zweite hinein gerichtet (im Gegensatz zu n). Das einfallende Feld $\mathfrak{E}_1$ bilde mit dem Lot den Winkel α_1, das gebrochene $\mathfrak{E}_2$ den Winkel α_2 (Abb. 8). Dann wird

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\mathfrak{E}_t}{-(\mathfrak{E}_n)_1}, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\mathfrak{E}_t}{-(\mathfrak{E}_n)_2}, \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\alpha_1 : \operatorname{tg}\alpha_2 = (\mathfrak{E}_n)_2 : (\mathfrak{E}_n)_1.$$

Aus Gleichung (49) folgt

$$\operatorname{tg}\alpha_1 : \operatorname{tg}\alpha_2 = \varepsilon_1 : \varepsilon_2. \tag{52}$$

Ist $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, so ist der Brechungswinkel α_2 größer als der Einfallswinkel α_1. Die gebrochene Feldstärke liegt weiter vom Einfallslot ab. Dies entspricht nach unmittelbarer Anschauung einer Vergrößerung der Kraftliniendichte im zweiten Dielektrikum.

Für die entsprechende Induktionslinie ist der Einfallswinkel ebenfalls α_1, der Brechungswinkel sei β. Es folgt dann

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{(\mathfrak{D}_t)_1}{-\mathfrak{D}_n}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{(\mathfrak{D}_t)_2}{-\mathfrak{D}_n}, \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\alpha_1 : \operatorname{tg}\beta = (\mathfrak{D}_t)_1 : (\mathfrak{D}_t)_2,$$

und nach Gleichung (51)

$$\operatorname{tg}\alpha_1 : \operatorname{tg}\beta = \varepsilon_1 : \varepsilon_2.$$

Es ist mithin $\beta = \alpha_2$. Die Induktionslinien befolgen dasselbe Brechungsgesetz. Sie könnten ja sonst nicht mit den Kraftlinien zusammenfallen.

Endlich müssen wir als eigentümlichstes Merkmal der Dielektrika hervorheben, daß sich an ihrer Berührungsfläche immer eine freie elektrische Flächendichte herausbildet, auch wenn keine Spur einer wahren Flächenladung vorhanden ist. Denn ein Sprung der Normalkomponente des Feldes tritt an den Grenzflächen nach Gleichung (49) auch dann auf. Die Dichte

$$\omega' = \frac{1}{4\pi}\{(\mathfrak{E}_n)_1 - (\mathfrak{E}_n)_2\} \tag{53}$$

ist auch dann nicht Null. Aus dieser Dichte entspringt ein Kraftfluß, aber kein Induktionsfluß. Es wäre daher fehlerhaft, $\frac{\omega}{\varepsilon}$ als allgemeinen Ausdruck der freien Dichte zu betrachten.

Im Paragraphen über die Polarisation erhalten alle freien Ladungen eine einfache und sehr anschauliche Erklärung.

§ 22. Kondensator mit zwei Isolierschichten

Den einfachsten Fall, der in das Gebiet unserer Ausführungen gehört, stellt der Kondensator dar, dessen Zwischenraum mit zwei Dielektrika ausgefüllt ist. Die Grenzfläche beider sei den Belegungen parallel. Die Kraftlinien, die aus der positiven Belegung mit der Ladung e senkrecht austreten, treffen auch die Grenzfläche senkrecht und gehen ohne Brechung durch die zweite Schicht. Ähnlich verhalten sich die Induktionslinien, so daß auch in diesem Fall auf der anderen Belegung die Ladung $-e$ auftritt, nachdem die positive Influenzelektrizität abgeleitet wurde. Die Konstanten der Schichten seien ε_1, ε_2, ihre Dicken d_1, d_2, der Flächeninhalt einer Belegung F. In der ersten Schicht ist die Kraftliniendichte $\frac{4\pi e}{F\varepsilon_1}$, in der zweiten $\frac{4\pi e}{F\varepsilon_2}$. Sie repräsentieren zugleich die entsprechenden Feldstärken. Die Arbeit, die diese beim Übergang des Einheitspols leisten, ergibt die Potentialdifferenz $\delta\Phi$ der Belegungen. Mithin ist

$$\delta\Phi = \frac{4\pi e}{F\varepsilon_1} d_1 + \frac{4\pi e}{F\varepsilon_2} d_2 = \frac{4\pi e}{F}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right),$$

und die Kapazität des Kondensators wird

$$C = \frac{e}{\delta \Phi} = \frac{F}{4\pi \left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right)}. \tag{54}$$

Wir wollen noch die freien Ladungen berechnen. An der positiven Belegung ergibt sich dafür $\frac{e}{\varepsilon_1}$, an der negativen $\frac{-e}{\varepsilon_2}$. Die an der Grenzfläche auftretende freie Ladung ist nach Gleichung (53) zu berechnen. Für den Normalsprung des Feldes in dieser Gleichung erhält man aus (49)

$$(\mathfrak{E}_n)_1 - (\mathfrak{E}_n)_2 = \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1\right) (\mathfrak{E}_n)_2.$$

In unserem Fall ist die Normale $\mathfrak{n}$, von der Grenzfläche ausgehend, in das Innere des Dielektrikums *1* gerichtet und daher

$$(\mathfrak{E}_n)_2 = -\frac{4\pi e}{F \varepsilon_2}.$$

Es folgt nun

$$\omega' = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1\right)\frac{4\pi e}{F\varepsilon_2} = -\frac{e}{F}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right).$$

Die freie Ladung selbst wird

$$e' = F \cdot \omega' = -e\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right).$$

Fügt man die freien Ladungen der Belegungen hinzu, so erhält man als Summe Null.

§ 23. Analytische Bestimmung des Feldes

Die Daten des Problems lassen sich folgendermaßen veranschaulichen: Im Raume sind verschiedene Leiter vorhanden, die der Reihe nach mit den Elektrizitätsmengen $e_1, e_2, \dots$ aufgeladen wurden. Der Raum zwischen den Leitern ist mit Isolatoren ausgefüllt, denen die Konstanten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ zugehören.

Zu bestimmen ist das Potential des Feldes.

Die zu lösende Differentialgleichung lautet nach (45)

$$\operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} \Phi = -4\pi\varrho \quad \text{oder} \quad \varepsilon \Delta\Phi + (\operatorname{grad}\Phi, \operatorname{grad}\varepsilon) = -4\pi\varrho.$$

Wahre räumliche Dichten sind jedoch nirgends vorhanden. Für die räumlich stückweise konstanten ε wird $\operatorname{grad} \varepsilon = 0$. Es verbleibt daher: $\varepsilon_1 \Delta\Phi = 0$, d. h. $\Delta\Phi = 0$ im Raume des ersten Isolators; $\varepsilon_2 \Delta\Phi = 0$, d. h. $\Delta\Phi = 0$ im Raume des zweiten Isolators usw. Da $\Delta\Phi$ auch im Inneren der Leiter verschwinden muß, besteht für den ganzen Raum die Forderung

$$\Delta\Phi = 0 \quad (\text{Laplacesche Gleichung}). \tag{55}$$

Die zu erfüllenden Grenzbedingungen sind folgende:

1. An der Oberfläche eines Leiters muß Φ einen konstanten Wert annehmen.
2. Das Integral der Flächendichte

$$\omega = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{D}_n = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial n}, \tag{56}$$

erstreckt über die Oberfläche je eines Leiters, muß dessen vorgeschriebene Ladung e ergeben.

3. An der Grenzfläche zweier Dielektrika muß gemäß Gleichung (49) gelten:

$$\varepsilon_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_1 = \varepsilon_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_2. \tag{57}$$

4. An allen Grenzflächen muß gelten

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_1 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_2. \tag{58}$$

Die letztere Forderung wird oft durch die schärfere ersetzt, daß an der Grenzfläche der Isolatoren

$$\Phi_1 = \Phi_2 \tag{59}$$

sei. Gleichung (58) ist dann sicher erfüllt. Gleichung (59) besagt, daß man die geringe Potentialdifferenz der Doppelschicht, die sich an der Grenzfläche immer ausbildet, einfach vernachlässigt.

Die Grenzbedingungen sind derart kompliziert, daß die Lösung des Problems nur in den einfachsten Fällen gelingt.

§ 24. Polarisation

Wie schon erwähnt, entsteht an der Grenzfläche zweier Dielektrika eine freie Dichte, wenn dort ein Feld vorhanden ist. Wir suchen nach einer modellmäßigen Erklärung dieser Dichte, die uns zugleich Aufschluß über den physikalischen Sinn der freien Elektrizität geben soll.

Da wir den Gedanken einer Erzeugung von Elektrizität entschieden ablehnen, bleibt nichts anderes übrig, als vorauszusetzen, daß auch im Isolator eine Trennung der beiden Elektrizitäten auf kleine Abstände hin möglich sei. Die Trennung erfolgt unter der Einwirkung der lokalen Feldstärke, so wie sie im Inneren des Dielektrikums vorhanden ist. Die positive Elektrizität folgt der Feldstärke, die negative bewegt sich in der entgegengesetzten Richtung, aber nur auf einen sehr kleinen Abstand, sonst hätte man ja einen Leiter vor sich. Man nimmt deshalb an, daß auf die getrennten elektrischen Mengen eine quasielastische Kraft wirkt, die, mit der Entfernung zunehmend, die Trennung auf molekulare Dimensionen beschränkt. Diesen Vorgang, der im ganzen Dielektrikum vor sich geht, nennt man dielektrische Polarisation. Wird das Feld abgeschaltet, so kehrt das Medium in seinen Anfangszustand zurück.

Abb. 9 zeigt die Kontur eines Dielektrikums, in das die Feldlinien eingezeichnet sind. An einer Stelle denken wir uns einen kleinen Zylinder, dessen Grundflächen vom Betrage df auf den Feldlinien senkrecht stehen. Seine Höhe sei dl. Infolge der Polarisation erhält die linke Fläche, an der das Feld eintritt, die negative Ladung $-de' = -\omega' df$, die rechte, an der das Feld austritt, die positive Ladung $de' = \omega' df$. Dadurch entsteht ein Dipol, dessen Moment $d\mathfrak{p}$ in die Richtung des Feldes fällt. Sein Betrag ist

$$|d\mathfrak{p}| = \omega' df \cdot dl = \omega' d\tau.$$

Wir schreiben diese Gleichung in der Vektorform

$$d\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cdot d\tau \tag{60}$$

und bemerken, daß $|\mathfrak{P}| = \omega'$ ist. Der Vektor $\mathfrak{P}$, den man kurz den Vektor der Polarisation nennt, fällt in die Richtung von $\mathfrak{E}$ und hat nach Gleichung (60) die Bedeutung einer Momentendichte. Anschaulicher gesprochen, bedeutet $\mathfrak{P}$ das elektrische Moment der Volumeneinheit. Da der Vorgang der Polarisation durch das Feld verursacht wird, muß es eine Beziehung zwischen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{P}$ geben. Um diese herzuleiten, gehen wir auf den Plattenkondensator, dessen Belegungen durch ein Dielektrikum getrennt sind, zurück. Die positive Belegung besitzt die Ladung e und sollte daher die wahre Dichte $\omega = \frac{e}{F}$ aufweisen. Tatsächlich aber tritt die geringere freie Dichte $\omega' = \frac{1}{\varepsilon} \frac{e}{F}$ auf. Wie ist diese Verkleinerung der Dichte zu erklären? Die Antwort liegt auf der Hand. Das eindringende Feld erzeugt in der dielektrischen Schicht eine Polarisation. Dadurch entsteht auf jener Seite der Schicht, die an die positive Belegung grenzt, die negative Dichte $-|\mathfrak{P}|$. Man hat daher die Gleichung

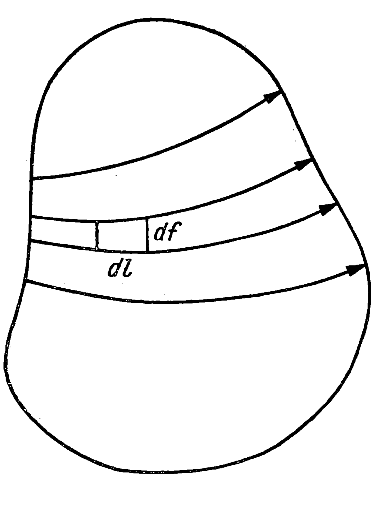


Abb. 9.

$$\frac{e}{F} - |\mathfrak{P}| = \frac{1}{\varepsilon} \frac{e}{F},$$

und aus dieser folgt

$$|\mathfrak{P}| = \frac{e}{F} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}.$$

Nun bedeutet $\frac{4\pi e}{F}$ die Dichte der Induktionslinien, d.h. den Betrag $|\mathfrak{D}|$. Die Gleichung wird daher

$$|\mathfrak{P}| = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} |\mathfrak{D}|$$

und allgemeiner, da sowohl $\mathfrak{P}$ als auch $\mathfrak{D}$ die Richtung des Feldes haben,

$$\mathfrak{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon}\,\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\,\mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi}\,(\mathfrak{D} - \mathfrak{E}). \tag{61}$$

Die zweite Gleichung ist die physikalisch bedeutsamste. Sie statuiert einen linearen Zusammenhang zwischen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{E}$. Der Proportionalitätsfaktor heißt dielektrische Suszeptibilität des Dielektrikums und wird mit $\varkappa$ bezeichnet. Man hat somit

$$\mathfrak{P} = \varkappa\,\mathfrak{E} \quad \text{und} \quad \varkappa = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}. \tag{62}$$

Was vom Kondensator gesagt wurde, gilt natürlich ganz allgemein. Wird ein geladener Körper in ein Dielektrikum gebracht, so wird dieses durch das Feld, das von der Ladung ausgeht, polarisiert. Es entsteht an der Berührungsfläche des Isolators eine Flächenladung entgegengesetzten Vorzeichens. Diese überlagert sich der wahren Ladung. Dadurch entsteht die freie Ladung von geringerem Betrage.

Beim Kondensator liegen die Verhältnisse insofern einfach, als die Grenzfläche des Isolators auf den Feldlinien senkrecht steht. Allgemein ist dies nicht der Fall. Wir betrachten deshalb noch einmal den elementaren Zylinder, setzen aber jetzt voraus, daß die innere Normale $\mathfrak{n}$ der einen Grundfläche, z. B. der linken, mit dem Feld den Winkel $(\mathfrak{n}\mathfrak{P})$ einschließt. Dann wird im Vergleich zum ersten Fall der Flächeninhalt $\frac{df}{\cos(\mathfrak{n}\,\mathfrak{P})}$. Die Elektrizitätsmenge $-de'$ erzeugt jetzt die kleinere Dichte

$$\omega' = -\,|\mathfrak{P}|\cos(\mathfrak{n}, \mathfrak{P}) = -\,\mathfrak{P}_n. \tag{63}$$

Die Formel behält ihre Gültigkeit auch für eine eventuelle schiefe Lage der rechten Grundfläche. Man sieht das sofort ein, wenn man bedenkt, daß dort $\mathfrak{P}_n$ negativ, ω' daher positiv wird. In Gleichung (63) haben wir somit den allgemeinen Ausdruck der Flächendichte, die an der Grenzfläche des Dielektrikums durch Polarisation entsteht, vorausgesetzt, daß die Normale $\mathfrak{n}$ ins Innere des Dielektrikums gerichtet ist.

Man kann Gleichung (63) benutzen, um den Ausdruck (53) jener Dichte, die an der Grenzfläche zweier Dielektrika auftritt, herzuleiten. Der Ansatz lautet

$$\omega' = -\mathfrak{P}_{n_1} - \mathfrak{P}_{n_2} = -\{(\mathfrak{P}_n)_1 - (\mathfrak{P}_n)_2\},$$

wobei jetzt $\mathfrak{n}$ in das Innere des ersten Dielektrikums weist. Nach der dritten Formel der Gleichung (61) folgt

$$\omega' = \frac{1}{4\pi}\{(\mathfrak{E}_n)_1 - (\mathfrak{E}_n)_2\} - \frac{1}{4\pi}\{(\mathfrak{D}_n)_1 - (\mathfrak{D}_n)_2\}.$$

Das zweite Glied auf der rechten Seite fällt nach Gleichung (48) weg. Man erhält wieder die Gleichung (53).

Über die Feldverhältnisse im Inneren des polarisierten Dielektrikums erhält man durch Bildung des Potentials Aufschluß. Da jedes Volumenelement einen

Dipol vom Moment $\mathfrak{P}\,d\tau$ darstellt, so folgt aus Gleichung (25)

$$\Phi = \int \left(\mathfrak{P}, \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r}\right) d\tau.$$

Benutzt man die leicht ableitbare Formel

$$\operatorname{div}\left(\frac{\mathfrak{P}}{r}\right) = \frac{1}{r} \operatorname{div}\mathfrak{P} + \left(\mathfrak{P}, \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right),$$

so erhält man, wenn auf $\int \operatorname{div}\left(\frac{\mathfrak{P}}{r}\right) d\tau$ der GAUSSsche Satz mit innerer Normale n angewendet wird:

$$\Phi = -\int \frac{\mathfrak{P}_n}{r}\, df - \int \frac{\operatorname{div}\mathfrak{P}}{r}\, d\tau. \tag{64}$$

Das erste Glied rechts liefert uns den schon bekannten Satz, daß die Oberfläche des Isolators mit der Flächendichte $-\mathfrak{P}_n$ belegt ist. Das zweite Glied sagt aus, daß $-\operatorname{div}\mathfrak{P}$ als räumliche freie Dichte zu betrachten sei: $\varrho' = -\operatorname{div}\mathfrak{P}$. Ist das Dielektrikum homogen, d. h. ε konstant, so folgt aus Gleichung (61)

$$\operatorname{div}\mathfrak{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} \operatorname{div}\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\, \varrho.$$

In einem solchen Dielektrikum erzeugt also die Polarisation keine räumliche Dichte, es sei denn, daß man von außen wahre Ladung hineinbringt.

Wäre die Polarisation $\mathfrak{P}$ als Funktion der Variabeln ξ, η, ζ bekannt, dann wäre die Bestimmung des Feldes auf einfache Integration zurückgeführt. In Wirklichkeit ist aber stets ein äußeres Feld $\mathfrak{E}_e$ gegeben, in das das Dielektrikum hineingebracht wird. Durch die Ausbildung der freien Flächenladung folgt dann eine ganz andere Feldstruktur, so daß die Bestimmung des resultierenden Feldes $\mathfrak{E}$ eine komplizierte Aufgabe ist. Auf dieses $\mathfrak{E}$ aber bezieht sich die Relation

$$\mathfrak{P} = \varkappa \mathfrak{E}.$$

Bisher wurde vorausgesetzt, daß die Moleküle des Dielektrikums keine fertigen Dipole sind, sondern erst durch die trennende Wirkung des Feldes zu solchen werden. Auf diese dielektrische Polarisation kann die Wärmebewegung der Moleküle keinen Einfluß haben, da auch bei Veränderung der Molekülllage die Polarisation doch immer der Feldrichtung folgt. Beim Abschalten des Feldes erlischt die Polarisation. Hysteresiserscheinungen gibt es nicht.

Man kennt jedoch Dielektrika, deren Moleküle als fertige Dipole zu betrachten sind. Die elektrischen Schwerpunkte ihrer positiven und negativen Bestandteile fallen nicht zusammen. In Abwesenheit eines elektrischen Feldes entsteht wegen der Ungeordnetheit der Dipolachsen kein resultierendes Moment. Wird jedoch ein Feld angelegt, dann ordnen sich die Dipole in Richtung des angelegten Feldes, so daß ein Moment entsteht. Dieses wächst im gleichen Sinne mit der Feldstärke, ist aber der Temperatur umgekehrt proportional. Man nennt die Erscheinung parelektrische Polarisation. Auch diese verschwindet, wenn die Feldwirkung aufhört.

Man kann jedoch Dielektrika herstellen, bei denen dies nicht der Fall ist. Nach HEAVISIDE bringt man geschmolzenes Harz in ein starkes elektrisches Feld. Die fertigen Dipole des Harzes stellen sich dann in die Feldrichtung ein. In dieser Lage läßt man das Harz erstarren. Dadurch werden die Momente fixiert, und das Harz behält auch nach Abschalten des Feldes ein makroskopisches Dipolmoment. Solche Körper werden Elektrete genannt. Das Elektret ist als das elektrische Ebenbild des permanenten Magneten zu betrachten.

Bei einzelnen Kristallformen kommt es auch vor, daß sich im Laufe der Kristallisation die einzelnen Molekularmomente von selbst ordnen. Das bekannteste dieser natürlichen Elektrete ist der Turmalinkristall.

Manchmal wird in Kristallen durch Herbeiführung elastischer Spannungen ein gewisser Ordnungszustand erreicht. So z. B. zeigt Quarz ein Dipolmoment, welches der Deformation des Kristallgitters proportional ist. Diese Erscheinung ist unter dem Namen Piezoelektrizität bekannt.

Es sei noch bemerkt, daß der Verschiebungsvektor $\mathfrak{D}$ in der Elektronentheorie eine sehr oberflächliche Rolle spielt. Dort arbeitet man beinahe ausschließlich mit Feld und Polarisation. In der klassischen Theorie bewahrt er jedoch seine primäre Stellung der Polarisation gegenüber, wie das aus den Grundgesetzen und besonders aus der relativistischen Fassung der elektrodynamischen Grundgleichungen klar hervorgeht.

Anschließend sollen in einigen einfachen Fällen Feld und Polarisation berechnet werden.

§ 25. Punktladung gegenüber einem dielektrischen Halbraum

Das Dielektrikum erstreckt sich in der Richtung der negativen Z-Achse ins Unendliche, seine obere Grenzfläche sei die XY-Ebene. Die Punktladung e befinde sich im positiven Teil der Z-Achse im Abstand a von der Oberfläche des Dielektrikums. Im oberen, leeren Teil des Raumes werde das Potential mit Φ_1, im Raume des Dielektrikums mit Φ_2 bezeichnet. Wir behaupten, daß sich Φ_1 zusammensetzt aus dem Potential der Ladung e und einer Ladung

$$e' = -e\,\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}$$

im Spiegelbilde von e. Ist daher r die Entfernung des Aufpunktes von e, r' die von e', so wird

$$\Phi_1 = \frac{e}{r} - \frac{e}{r'}\,\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}.$$

Im Raume des Dielektrikums hingegen sei

$$\Phi_2 = \frac{2e}{\varepsilon + 1}\,\frac{1}{r}.$$

Es ist klar, daß Φ_1 und Φ_2 die LAPLACE-Gleichung erfüllen. An der Grenzebene wird wegen $r' = r$ auch $\Phi_1 = \Phi_2$. Daraus folgt die Gleichheit der tangen-

tialen Feldkomponenten an beiden Seiten der Grenze. Endlich ist noch zu zeigen, daß auch die Forderung bezüglich der Normalkomponenten

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_1 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_2 \varepsilon$$

erfüllt ist. Die zwei Differentialquotienten sind durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial n}\right)_1 = -\frac{e}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial n} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\frac{\partial r'}{\partial n}\right),$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial n}\right)_2 = -\frac{2e}{\varepsilon + 1}\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}.$$

Hier ist

$$\frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{a}{r}, \quad \frac{\partial r'}{\partial n} = \frac{a}{r}.$$

Nach dieser Substitution ergibt sich

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial n}\right)_1 = \varepsilon \frac{2ea}{\varepsilon + 1}\frac{1}{r^3}, \quad \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial n}\right)_2 = \frac{2ea}{\varepsilon + 1}\frac{1}{r^3}.$$

Die Grenzbedingung ist daher erfüllt. Φ_2 entspringt der Punktladung $\frac{2e}{\varepsilon + 1}$, die sich am Ort der gegebenen befindet. Die Kraftlinien einer Punktladung sind gerade Linien. Im Halbraum des Dielektrikums sind daher die Kraftlinien Geraden, die von dieser fiktiven Ladung ausgehen.

Es ist bemerkenswert, daß sich der in § 16 behandelte Fall der leitenden Ebene aus den jetzigen Resultaten dadurch ergibt, daß man ε unendlich groß annimmt. Dann wird

$$\Phi_2 = 0, \quad \Phi_1 = \frac{e}{r} - \frac{e}{r'}.$$

In der Statik kann der Leiter als Dielektrikum behandelt werden, dessen Konstante unendlich groß ist. In rasch wechselnden Feldern jedoch kann davon nicht die Rede sein.

§ 26. Dielektrische Kugel im homogenen Feld

Im Vakuum werde ein homogenes Feld in der Richtung der X-Achse erzeugt. In den mittleren Teilen eines groß dimensionierten Kondensators kann das Feld immer als homogen betrachtet werden. In unseren Rechnungen nehmen wir das Feld als unendlich ausgedehnt an. Die Feldstärke in der X-Richtung sei $\mathfrak{E}_0$. In dieses Feld bringen wir eine dielektrische Kugel mit der Konstante ε und dem Halbmesser R. Der Kugelmittelpunkt falle in den Anfangspunkt des Koordinatensystems. Sein Abstand vom Aufpunkt P sei r, der mit der X-Achse den Winkel ϑ einschließt (Abb. 10). Die Aufgabe besteht darin, das durch die Kugel modifizierte Feld und die Polarisation der dielektrischen Kugel zu berechnen. Da direkte Methoden fehlen, kann man nicht umhin, von plausiblen Ansätzen auszugehen. Wir ziehen es jedoch vor, die Resultate hinzuschreiben

und ihre Richtigkeit nachträglich zu beweisen. Für das äußere Potential, das nur im Raume außerhalb der Kugel Gültigkeit besitzt, ist zu schreiben

$$\Phi_e = \mathfrak{E}_0 \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{R^3}{r^3} - 1 \right) x, \tag{65}$$

für das innere

$$\Phi_i = - \mathfrak{E}_0 \frac{3}{\varepsilon + 2} x. \tag{66}$$

Beide Ausdrücke befriedigen die LAPLACE-Gleichung. An der Oberfläche für $r = R$ wird $\Phi_i = \Phi_e$. Dadurch wird die Gleichheit der Tangentialkomponenten

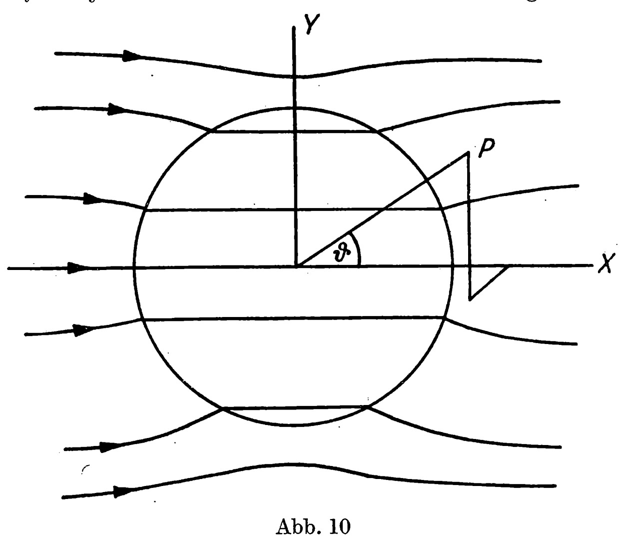


Abb. 10

des Feldes an beiden Seiten der Oberfläche gewährleistet. In großer Entfernung vom Mittelpunkt ($r \to \infty$) geht Φ_e in den Potentialausdruck des gegebenen homogenen Feldes über:

$$\Phi_e = - \mathfrak{E}_0 x.$$

Das bedeutet, daß der störende Einfluß der Kugel in großen Entfernungen nicht mehr wahrnehmbar ist.

Aus Gleichung (66) ist zu entnehmen, daß das Feld in der Kugel die Richtung der X-Achse hat:

$$\mathfrak{E}_x = - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = \frac{3}{\varepsilon + 2} \mathfrak{E}_0, \quad \mathfrak{E}_y = 0, \quad \mathfrak{E}_z = 0. \tag{67}$$

Auch in der Kugel herrscht daher ein homogenes Feld, aber das dortige $\mathfrak{E}_x$ ist wegen $\varepsilon > 1$ kleiner als das äußere $\mathfrak{E}_0$. Die Komponenten der Polarisation werden nach Gleichung (62)

$$\mathfrak{P}_x = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \mathfrak{E}_x = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \mathfrak{E}_0, \quad \mathfrak{P}_y = 0, \quad \mathfrak{P}_z = 0. \tag{68}$$

Eine Polarisation von konstanter Richtung und konstanter Größe, wie sie hier auftritt, nennt man homogen. Es läßt sich zeigen, daß ein homogenes äußeres Feld nur in einem ellipsoidförmigen Dielektrikum eine homogene Polarisation hervorrufen kann. Liegt eine Hauptachse parallel zur äußeren Feldrichtung, dann hat auch die Polarisation diese Richtung. Wo nicht, bleibt zwar die Polarisation noch immer homogen, schließt aber mit der Feldrichtung einen Winkel ein.

Es ist noch zu beweisen, daß auch die Randbedingung (57), die in unserem Falle die Form

$$\left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial n}\right)_1 = \varepsilon \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial n}\right)_2$$

annimmt, erfüllt ist. Zu diesem Zweck ist es vorteilhaft, in den Potentialausdrücken x durch $r \cos\vartheta$ zu ersetzen.

$$\Phi_e = \mathfrak{E}_0 \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{R^3}{r^2} - r\right) \cos\vartheta, \quad \Phi_i = -\mathfrak{E}_0 \frac{3}{\varepsilon + 2} r \cos\vartheta.$$

Es sei n die äußere Normale der Kugel; dann ist $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$. Für $r = R$ gilt

$$\left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial n}\right)_1 = -\mathfrak{E}_0 \frac{3\varepsilon}{\varepsilon + 2} \cos\vartheta$$

und desgleichen

$$\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial n}\right)_2 = -\mathfrak{E}_0 \frac{3}{\varepsilon + 2} \cos\vartheta.$$

Die Bedingung ist daher befriedigt. Wieder ist zu ersehen, daß der Fall der leitenden Kugel im Vakuum durch den Grenzübergang $\varepsilon \to \infty$ erhalten werden kann.

Die Feldstärke $\mathfrak{E}_x$ in Gleichung (67) kann geschrieben werden

$$\mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}_0 - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \mathfrak{E}_0,$$

oder nach Vergleich mit (68)

$$\mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}_0 - \frac{4\pi}{3} \mathfrak{P}_x. \tag{69}$$

Diese Relation gibt Aufschluß darüber, wie die Feldstärke in der polarisierten Kugel von der äußeren Feldstärke und von der Polarisation abhängt. Im dritten Teil dieses Buches wird die umgekehrte Aufgabe von Wichtigkeit werden: Im unendlich ausgebreiteten Dielektrikum ist die Feldstärke und damit zugleich die Polarisation bekannt. Gefragt wird nach der Feldstärke in einer Kugel, die im Dielektrikum durch entsprechende Aushöhlung entsteht. Es ist dies der Lorentzsche innere Raum. Die Lösung dieses Problems erfordert keine neue Rechnung. Es ist nur zu bedenken, durch welche Wirkung das Glied $\frac{4\pi}{3} \mathfrak{P}_x$, das in Gleichung (69) abgezogen wird, eigentlich entsteht. Wodurch wird eigentlich das äußere Feld modifiziert? Offenbar durch die zwei freien Flächen-

dichten, die sich an beiden Seiten der Kugel ausbilden. An der linken Seite treten die Feldlinien ein, an der rechten aus. Daher tritt auf der linken Seite negative, auf der rechten positive Ladung auf, die dem Felde $\mathfrak{E}_0$ tatsächlich entgegenwirken. Im Fall der Höhlung jedoch treten die Kraftlinien auf der linken Seite aus dem Dielektrikum heraus, auf der rechten hinein. Das Vorzeichen der Flächenladung kehrt sich um, und zu dem Felde $\mathfrak{E}_0$, das im Dielektrikum herrscht, tritt das Glied $\frac{4\pi}{3}\mathfrak{P}_x$ als Summand hinzu. Im LORENTZschen inneren Raum wird daher

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + \frac{4\pi}{3}\mathfrak{P}. \tag{70}$$

Sowohl in diesem wie auch im vorigen Paragraphen wurden die Lösungen einfach angegeben und ihre Richtigkeit nachträglich bewiesen. Es bleibt die Frage offen, ob es denn auch die einzigen Lösungen sind. Dieser Mangel soll in § 28, der die Eindeutigkeit feststellt, in allgemeiner Weise beseitigt werden.

§ 27. Energie des elektrischen Feldes

Die Quellen des Verschiebungsvektors $\mathfrak{D}$ sind nach den Gleichungen (45) und (46) die wahren Dichten $\varrho(\xi, \eta, \zeta)$ und $\omega(\xi, \eta, \zeta)$. Werden beide zugleich verdoppelt, verdreifacht usw., so verdoppeln, verdreifachen sich auch die Induktionslinien. Infolge der Beziehung $\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$ erfolgt dieselbe Vervielfachung auch für das Feld und auf Grund der Gleichung $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\Phi$ auch für das Potential Φ. Entspricht daher das Potential Φ einem Feld, das durch $\varrho(\xi, \eta, \zeta)$ und $\omega(\xi, \eta, \zeta)$ gegeben ist, so entspricht jenem Feld, das durch die Dichten $k\varrho(\xi, \eta, \zeta)$ und $k\omega(\xi, \eta, \zeta)$ zustande kommt, das Potential

$$\Phi' = k\Phi. \tag{71}$$

Hier bedeutet k eine reelle Konstante.

Wir stellen uns nun eine beliebige Ladungskonfiguration vor. Die Anwesenheit der Ladungen erzeugt ein elektrisches Feld, der rein geometrische Raum verwandelt sich in einen physikalischen. Eine einfache Betrachtung führt zu der Erkenntnis, daß dem physikalischen Raum Energie zugeschrieben werden muß. Die einzelnen Ladungen mögen von ihren gegebenen Orten unendlich weit entfernt werden. Während ihrer Bewegung wird von den stetig abnehmenden Feldstärken die eindeutig bestimmte Arbeit U geleistet. Sind die Ladungen auf diese Weise aus dem Raum verschwunden, so erlöschen die Feldstärken, und der verbleibende Raum wird zum leeren geometrischen Raum, dem natürlich keine Energie zukommt. Dieser Zustand bedeutet den energetischen Nullpunkt des Feldes. Es folgt daraus, daß der Betrag der Energie des elektrischen Feldes gleich jener Arbeit U ist, die vom Feld während der Entfernung der Ladungen ins Unendliche geleistet wird, oder gleich jener, die von äußeren Kräften während des Transportes der Ladungen aus dem Unendlichen an ihren endgültigen Ort geleistet werden muß. Die Eindeutigkeit wird dadurch gewährleistet, daß U von den Bahnen der einzelnen Ladungen unabhängig ist.

Das Problem besteht in der Berechnung von U. Wir leiten das Resultat auf zwei verschiedene Arten ab. Die erste setzt ein beliebiges $\varrho(\xi, \eta, \zeta)$ voraus, wahre Flächenladungen aber nur an den Oberflächen der Leiter, wie es der Praxis entspricht. Sie ermöglicht einen Vergleich der vormaxwellschen Elektrodynamik mit der heutigen. Die zweite ist viel einfacher, allgemeiner und entspricht besser unserer modernen Auffassung.

1. Es ist klar, daß nur wahre Ladungen frei beweglich sind. Die an den Grenzflächen der Isolatoren auftretenden Ladungen haften an diesen, können von ihnen nicht abgetrennt werden, wachsen aber bei zunehmendem Felde automatisch an. Wir sprechen daher im folgenden nur von wahren Ladungen. Im Endzustand des Feldes seien die Dichten ϱ bzw. ω und das Potential Φ. Wir wollen diesen Zustand durch sukzessives Heranführen von wahren Ladungen aus dem Unendlichen erzeugen und die dabei zu leistende Arbeit berechnen. Zu diesem Zweck betrachten wir einen Zwischenzustand, in dem ein Teil der Ladungen schon an Ort und Stelle gebracht ist, so daß die Dichtewerte $k\varrho$, $k\omega$ und der Potentialwert $\Phi' = k\Phi$ erreicht sind. k ist ein echter Bruch. Nun führen wir die neue Ladung de heran, verteilen sie aber gleich so, daß an die Stelle ξ, η, ζ der Bruchteil $dk\varrho(\xi, \eta, \zeta)d\tau + dk\omega(\xi, \eta, \zeta)df$ gelangt. Die dabei zu leistende Arbeit beträgt dann

$$dU = \sum \Phi'(\xi, \eta, \zeta)\, dk\, (\varrho d\tau + \sigma df) = \sum k dk \Phi(\xi, \eta, \zeta)\, (\varrho d\tau + \sigma df).$$

Das Summenzeichen bezieht sich auf die Volumen- und Flächenelemente. Die ganze Arbeit zur Erreichung des Endzustandes ergibt sich offenbar durch Integration über k von 0 bis 1. Man erhält

$$U = \frac{1}{2} \sum \Phi(\varrho d\tau + \omega df) \tag{72}$$

oder

$$U = \frac{1}{2} \sum \Phi de. \tag{73}$$

Bei dem letzten Ausdruck macht die ältere Elektrostatik halt. Die Form des Ausdruckes fordert eine Lokalisierung der Energie in folgendem Sinne: Die Ladung de, die sich am Orte des Potentials $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$ befindet, ist Trägerin der Energie

$$dU = \frac{1}{2} \Phi de.$$

Im Falle eines geladenen Leiters, an dessen Oberfläche Φ konstant ist, wird die gesamte Energie

$$U = \frac{1}{2} \Phi e. \tag{74}$$

Träger dieser Energie ist der Leiter selbst. Die Energie ist an seiner Oberfläche lokalisiert.

Diese Vorstellung entspricht nun ganz und gar nicht der Auffassung Maxwells. Nach ihm erblicken wir heute das Ergebnis der Arbeit U darin, daß durch sie ein Feld geschaffen wurde, und verlegen deshalb den Sitz der Energie

in das Feld selbst. Das bedeutet natürlich eine neue Aufgabe. Es muß gezeigt werden, daß durch geeignete Umänderung der Energieausdruck (72) in ein Raumintegral reiner Feldgrößen überführt werden kann. Das geschieht nun in folgender Weise. Erstens ersetzt man das Summenzeichen durch das Integral. Zweitens schreibt man für ϱ und ω: $\varrho = \frac{\operatorname{div}\mathfrak{D}}{4\pi}$, $\omega = \frac{\mathfrak{D}_n}{4\pi}$. ($\mathfrak{n}$ ist die äußere Normale der Leiterfläche). Dann erhält man

$$U = \frac{1}{8\pi}\left\{\int_\tau \Phi \operatorname{div}\mathfrak{D}\,d\tau + \int_f \Phi\,\mathfrak{D}_n\,df\right\}.$$

Das Gebiet des Volumenintegrals beschränkt sich auf den Raum der Dielektrika, da im Inneren der Leiter ϱ gleich Null ist. Benutzt man die Identität

$$\Phi \operatorname{div}\mathfrak{D} = \operatorname{div}\Phi\,\mathfrak{D} - (\mathfrak{D}, \operatorname{grad}\Phi) = \operatorname{div}\Phi\,\mathfrak{D} + (\mathfrak{E}, \mathfrak{D}),$$

so wird

$$U = \frac{1}{8\pi}\left\{\int_\tau \operatorname{div}\Phi\,\mathfrak{D}\,d\tau + \int_\tau (\mathfrak{E}, \mathfrak{D})\,d\tau + \int_f \Phi\,\mathfrak{D}_n\,df\right\}.$$

Auf das Divergenzintegral kann man den GAUSSschen Satz (mit äußerer Normale $\mathfrak{n}'$) anwenden:

$$U = \frac{1}{8\pi}\left\{\int_{f'} \Phi\,\mathfrak{D}_{n'}\,df' + \int_\tau (\mathfrak{E}, \mathfrak{D})\,d\tau + \int_f \Phi\,\mathfrak{D}_n\,df\right\}.$$

Die Grenzfläche f' des Isolatorraumes besteht aus zwei Teilen: Der erste wird von den Leiteroberflächen gebildet. Dort sind n und n' entgegengesetzt gerichtet. Das rechtsstehende dritte Integral und der auf die Leiteroberflächen bezogene Teil des ersten Integrals heben sich daher heraus. Der zweite Teil der Grenzfläche wird von der unendlich fernen Kugeloberfläche gebildet. Dort aber verschwindet Φ wie $\frac{1}{r}$, $\mathfrak{D}_n$ wie $\frac{1}{r^2}$. Die Oberfläche ist nur von der Ordnung r^2. Es verschwindet daher das darauf bezogene Integral. Als Endergebnis verbleibt

$$U = \frac{1}{8\pi}\int (\mathfrak{E}, \mathfrak{D})\,d\tau = \frac{1}{8\pi}\int \varepsilon\,\mathfrak{E}^2\,d\tau = \frac{1}{8\pi}\int \frac{\mathfrak{D}^2}{\varepsilon}\,d\tau. \tag{75}$$

In diesen Ausdrücken weist nichts mehr auf Ladungen hin. $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ sind Ortsfunktionen. Jeder Stelle des Raumes, an der ein Feld herrscht, kommt die Energiedichte

$$u = \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{E}, \mathfrak{D}) = \frac{1}{8\pi}\varepsilon\,\mathfrak{E}^2 = \frac{1}{8\pi}\frac{\mathfrak{D}^2}{\varepsilon} \tag{76}$$

zu. Die Energie ist tatsächlich im Felde lokalisiert.

Als Beispiel berechnen wir die Energie einer geladenen leitenden Kugel im Vakuum. Besitzt sie die Ladung e und das Eigenpotential e/R, so wird nach Gleichung (74)

$$U = \frac{1}{2}\frac{e^2}{R}.$$

Rechnet man nach Gleichung (75), so ist zu bedenken, daß die Feldstärke im Innern verschwindet, außen den Wert e/r^2 besitzt. Daher wird

$$U = \frac{1}{8\pi}\int_R^\infty \left(\frac{e}{r^2}\right)^2 d\tau.$$

Für $d\tau = 4\pi r^2 dr$ folgt

$$U = \frac{e^2}{2}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2}\frac{e^2}{R}.$$

Auch die Energie eines Kondensators ist leicht zu berechnen. Die Feldstärke als Dichte der Kraftlinien wird

$$|\mathfrak{E}| = \frac{4\pi e}{\varepsilon F}.$$

Das Volumen zwischen den Belegungen hat den Betrag Fd. Man erhält

$$U = \frac{\varepsilon}{8\pi}\left(\frac{4\pi e}{\varepsilon F}\right)^2 F d = \frac{e^2}{2}\frac{4\pi d}{\varepsilon F} = \frac{1}{2}\frac{e^2}{C}.$$

Da die Kapazität ε proportional ist, folgt, daß die Energie eines Kondensators um so kleiner wird, je größer die Dielektrizitätskonstante der Isolationsschicht ist. Der Grund dafür wird im folgenden noch angegeben.

2. Es soll nun die zweite Methode zur Bestimmung der Feldenergie besprochen werden. Wie im ersten Fall, kann es sich um nichts anderes handeln, als den Arbeitsaufwand zu berechnen, der zur Erzeugung eines Feldes benötigt wird. Es bedeutet eine ganz unnötige Komplikation, zu diesem Zweck eine Ladungsverteilung anzugeben, die durch Transport aus dem Unendlichen verwirklicht werden soll. Der denkbar einfachste Fall ist folgender: Die Platten eines Kondensators stehen sich unendlich nahe gegenüber. Dann gibt es noch kein Feld. Zieht man sie auseinander, so entsteht ein solches. Die Arbeit, die dazu benötigt wird, ist das Äquivalent der Feldenergie.

Die Flächendichten der Platten seien ω bzw. $-\omega$. Die negative Platte soll im Felde der positiven auf den Abstand d gebracht werden. Dieses Feld wurde für die unendliche Ebene berechnet. Der Betrag der Feldstärke wird beiderseits, wenn die Ebene in ein Dielektrikum gebettet ist,

$$|\mathfrak{E}'| = \frac{2\pi\omega}{\varepsilon}.$$

Das ist die Hälfte der Feldstärke $\mathfrak{E}$, wie sie im Kondensator auftritt:

$$\mathfrak{E}' = \frac{1}{2}\,\mathfrak{E}.$$

Die negative Platte hat die Ladung $e = -\omega F$. Infolge der Feldstärke $\mathfrak{E}'$ wirkt auf sie die Kraft $-\mathfrak{E}'\,\omega F$. Gegen diese muß während der Trennung die Arbeit

$$U = |\mathfrak{E}'|\,\omega F d$$

geleistet werden. Nach Einsetzen der Werte $\omega = \frac{\varepsilon}{2\pi}|\mathfrak{E}'| = \frac{\varepsilon}{4\pi}|\mathfrak{E}|$, $\mathfrak{E}' = \frac{1}{2}\mathfrak{E}$ ergibt sich

$$U = \frac{\varepsilon}{8\pi}\mathfrak{E}^2 F d.$$

Fd ist das Volumen τ des felderfüllten Raumes und daher

$$U = \frac{1}{8\pi}\varepsilon\mathfrak{E}^2\tau.$$

Für die Dichte folgt

$$u = \frac{1}{8\pi}\varepsilon\mathfrak{E}^2.$$

Der Umstand, daß die Feldenergie nur von der Feldstärke abhängt, macht es wahrscheinlich, daß der erhaltene Ausdruck nicht nur für statische, sondern auch für veränderliche Felder Gültigkeit besitzt. Die MAXWELLsche Elektrodynamik führt diese Annahme als besonderes Axiom in die Theorie ein.

§ 28. Satz von THOMSON

In § 23 wurden alle Bedingungen zusammengestellt, die die Feldgrößen, durch das Potential dargestellt, erfüllen müssen. Offen blieb nur die Frage, ob die Lösung eindeutig sei. Der THOMSONsche Satz wird uns in die Lage versetzen, auf diese Frage eine bejahende Antwort zu geben.

Gegeben denken wir uns einige Leiter, die in verschiedene Dielektrika eingelagert sind. Jeder Leiter trägt eine bestimmte Ladung e_k ($k = 1, 2, \ldots$). Auch eine räumliche Dichte kann vorhanden sein, die durch Angabe von $\varrho(\xi, \eta, \zeta)$ charakterisiert ist. Die Dielektrika brauchen nicht homogen zu sein, $\varepsilon(\xi, \eta, \zeta)$ kann als beliebige Ortsfunktion betrachtet werden. Dadurch entgeht man auch den lästigen Grenzbedingungen, indem man den Sprung von ε durch einen steilen, aber stetigen Anstieg ersetzt.

Wir setzen voraus, daß das Feld die zwei Grundgesetze und jene speziellen, die für Leiter gültig sind, erfüllt. Nach dem ersten besteht die Gleichung

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\Phi \tag{77}$$

und für Leiter

$$\Phi_k = \text{const} = c_k \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{78}$$

Das zweite fordert

$$\alpha)\ \operatorname{div}\mathfrak{D} = 4\pi\varrho, \quad \beta)\ \mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E} \quad \text{und für Leiter} \quad \gamma)\int_{f_k}\mathfrak{D}_n\,df = 4\pi e_k. \tag{79}$$

Nun seien $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{D}'$ irgend zwei Ortsfunktionen, die zwar die Forderung des ersten Grundgesetzes nicht unbedingt, aber die des zweiten erfüllen. Es sollen mithin nur folgende Gleichungen bestehen:

$$\alpha)\ \operatorname{div}\mathfrak{D}' = 4\pi\varrho, \quad \beta)\ \mathfrak{D}' = \varepsilon\mathfrak{E}', \quad \gamma)\int_{f_k}\mathfrak{D}'_n\,df = 4\pi e_k. \tag{80}$$

Um eine kurze Bezeichnung zu haben, nennen wir $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$ eine „wirkliche“ Lösung, $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{D}'$ eine „unwirkliche“ Lösung. Die Differenz $\mathfrak{E}' - \mathfrak{E}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{u}$. Mithin gilt

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + \mathfrak{u} \quad \text{und nach} \quad \beta) \; \mathfrak{D}' = \mathfrak{D} + \varepsilon\mathfrak{u}.$$

Aus den γ-Gleichungen folgt

$$\int_k \varepsilon \mathfrak{u}_n df = 0 \tag{81}$$

und aus den entsprechenden α-Gleichungen

$$\operatorname{div} \varepsilon\mathfrak{u} = 0. \tag{82}$$

Jetzt bilden wir den Energieausdruck des „unwirklichen“ Feldes:

$$U' = \frac{1}{8\pi}\int \varepsilon \mathfrak{E}'^2 d\tau = \frac{1}{8\pi}\int \varepsilon \mathfrak{E}^2 d\tau + \frac{1}{8\pi}\int \varepsilon \mathfrak{u}^2 d\tau + \frac{1}{4\pi}\int (\varepsilon\mathfrak{u}, \mathfrak{E})\, d\tau. \tag{83}$$

Das letzte Integral rechts, das wir J nennen, verschwindet. Um das zu beweisen, ersetzen wir darin $\mathfrak{E}$ durch $-\operatorname{grad}\Phi$:

$$J = -\frac{1}{4\pi}\int (\varepsilon\mathfrak{u}, \operatorname{grad}\Phi)\, d\tau.$$

Da $\operatorname{grad}\Phi$ im Leiter verschwindet, fällt das Integrationsgebiet mit dem Raum der Dielektrika zusammen. Der Integrand kann geschrieben werden

$$(\varepsilon\mathfrak{u}, \operatorname{grad}\Phi) = \operatorname{div} \varepsilon\mathfrak{u}\Phi - \Phi \operatorname{div} \varepsilon\mathfrak{u}.$$

Das zweite Glied rechts ist wegen Gleichung (82) null. Daher wird

$$J = -\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{div} \varepsilon\mathfrak{u}\Phi\, d\tau$$

und mit Hilfe des GAUSSschen Satzes

$$J = -\frac{1}{4\pi}\int_f \varepsilon\mathfrak{u}_n \Phi\, df.$$

f bedeutet die Grenzfläche des Integrationsraumes, also die Leiteroberflächen und die unendliche Kugelfläche. An der letzteren verschwindet das Integral, denn Φ konvergiert gegen Null wie $\frac{1}{r}$, $\mathfrak{u}$ wie $\frac{1}{r^2}$. An den Leiterflächen ist Φ konstant und deshalb

$$J = -\frac{1}{4\pi}\sum_k \Phi_k \int \varepsilon\mathfrak{u}_n\, df.$$

Nach Gleichung (81) ist dieser Ausdruck null. Aus Gleichung (83) verbleibt daher

$$U' = \frac{1}{8\pi}\int \varepsilon \mathfrak{E}^2 d\tau + \frac{1}{8\pi}\int \varepsilon \mathfrak{u}^2 d\tau.$$

Da das erste Integral die Energie U des wirklichen Feldes bedeutet, hat man endlich

$$U' = U + \frac{1}{8\pi}\int \varepsilon\, \mathfrak{u}^2\, d\tau. \tag{84}$$

Wegen des positiven Wertes des Integrals folgt $U' > U$. Unterscheidet sich $\mathfrak{E}'$ auch nur sehr gering von $\mathfrak{E}$, so wird die entsprechende Feldenergie größer als die wirkliche. Ebenso wie in der Mechanik der Satz von DIRICHLET das stabile Gleichgewicht durch das Minimum der potentiellen Energie kennzeichnet, so ist auch das elektrostatische Gleichgewicht mit einem Minimum der Feldenergie verbunden.

Es werde angenommen, daß $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{D}'$ ebenfalls eine wirkliche Lösung darstellen. Es sollen also außer den Gleichungen (80) auch die nach dem Muster von (77) und (78) gebildeten

$$\mathfrak{E}' = -\operatorname{grad}\Phi', \quad \Phi_k = c_k' \tag{85}$$

erfüllt sein. Unsere Ableitung wird dadurch nicht berührt; denn sie stützt sich gar nicht auf Gleichung (85). Die Ungleichung besteht auch jetzt. Man kann aber nun die Ableitung Wort für Wort wiederholen, indem man die Rolle der gestrichenen und ungestrichenen Größen vertauscht. Dann aber folgt $U > U'$. Der Widerspruch wird nur durch die Annahme $\mathfrak{u} = 0$ beseitigt. Es kann keine verschiedenen „wirklichen" Lösungen geben. Die elektrostatischen Grundgleichungen (77), (78) und (79) bestimmen das Feld eindeutig.

§ 29. Ponderomotorische Kräfte

Die Feldstärke $\mathfrak{E}$ wirkt natürlich nur auf Ladungen. Da diese aber an Träger gebunden sind, werden auch letztere durch die Kraft beschleunigt. Diese ponderomotorischen Kräfte sollen jetzt bestimmt werden. Der Einheitlichkeit halber setzen wir die räumliche Verteilung der „Elektrizität" voraus. Später soll durch einen einfachen Grenzübergang auch die Flächenverteilung in Betracht gezogen werden. Der Vorgang zur Bestimmung der ponderomotorischen Kräfte ist folgender: Wir nehmen an, daß geladene Körper und Dielektrika kleine Ortsveränderungen vollführen und inzwischen eventuell auch Deformationen unterworfen sein sollen. Die Veränderung soll – genau gesagt – darin bestehen, daß jedes Raumelement $d\tau$ eine Verschiebung $\delta\mathfrak{r}$ erleidet. Dilatation sei jedoch ausgeschlossen. Dadurch entgeht uns zwar die Elektrostriktion; dafür aber gestaltet sich die Darstellung einfacher. Die erwähnte Einschränkung führt zu einer Bedingung für $\delta\mathfrak{r}$. Die Veränderung des Volumens τ, das durch die Fläche f begrenzt wird, läßt sich in Integralform folgendermaßen schreiben:

$$\delta\tau = \int \delta\mathfrak{r}_n\, df = \int \operatorname{div}\delta\mathfrak{r}\, d\tau.$$

Es sei also

$$\operatorname{div}\delta\mathfrak{r} = 0.$$

Während der Verrückung soll jedes Volumenelement seine ursprüngliche Ladung $\varrho d\tau$ mit sich führen. Als Folge der Verrückung wird sich an jeder Raumstelle sowohl ϱ als auch – infolge der Ortsveränderung der Dielektrika – ε ändern. Es sei bemerkt, daß wir inhomogene Dielektrika zulassen, ε mithin als Ortsfunktion betrachten. Der Betrag der dielektrischen Konstanten hängt unter anderem auch von der Dichte des Dielektrikums ab. Da wir jedoch Dilatation und damit Dichteänderungen ausgeschlossen haben, tritt in unseren Ableitungen die dadurch bedingte Änderung von ε nicht auf.

Bezeichnet man die Kraftdichte, d.h. die auf die Volumeneinheit wirkende Kraft, mit $\mathfrak{k}$, dann wirkt auf das Raumelement $d\tau$ die Kraft $\mathfrak{k}\,d\tau$. Die durch die Verrückung geleistete Arbeit ist

$$\delta A = (\mathfrak{k}, \delta\mathfrak{r})\,d\tau. \tag{86}$$

Die Verrückungen sollen deshalb vor sich gehen, weil die Feldenergie noch nicht ihren statischen Minimalwert erreicht hat. Die Arbeitsleistung möge ganz auf Kosten der Energie erfolgen: $\delta A = -\delta U$. Gelingt es, die Energieänderung auf die Form (86) zu bringen, dann kann der Ausdruck, der die Stelle von $\mathfrak{k}$ einnimmt, mit diesem identifiziert werden. Unsere Aufgabe ist damit gelöst.

Eine Änderung von U kann aus zwei Gründen erfolgen: An der Stelle ξ, η, ζ ändert sich 1. ε und 2. ϱ. Infolge der Verrückung gelangt nämlich an die Stelle $\mathfrak{r}$ jenes Volumenelement, das vorher an der Stelle $\mathfrak{r} - \delta\mathfrak{r}$ war, und bringt die Größen $\varepsilon(\mathfrak{r} - \delta\mathfrak{r})$ bzw. $\varrho(\mathfrak{r} - \delta\mathfrak{r})$ mit sich. Durch Reihenentwicklung erhält man die Änderungen, die an der Stelle $\mathfrak{r}$ eintreten, in der Form

$$\delta\varepsilon = -(\operatorname{grad}\varepsilon, \delta\mathfrak{r}), \tag{87}$$

$$\delta\varrho = -(\operatorname{grad}\varrho, \delta\mathfrak{r}) = -\operatorname{div}\varrho\delta\mathfrak{r} + \varrho\operatorname{div}\delta\mathfrak{r} = -\operatorname{div}\varrho\delta\mathfrak{r}. \tag{88}$$

Die entsprechenden Änderungen von U bezeichnen wir mit $\delta_\varepsilon U$ bzw. $\delta_\varrho U$:

$$\delta U = \delta_\varepsilon U + \delta_\varrho U.$$

Als Energieausdruck wählt man am zweckmäßigsten die Form

$$U = \frac{1}{8\pi}\int \frac{\mathfrak{D}^2}{\varepsilon}\,d\tau.$$

Im Fall 1 bleibt die Dichte ϱ an jeder Stelle unverändert. Aus der Gleichung $\operatorname{div}\mathfrak{D} = 4\pi\varrho$ folgt dann

$$\operatorname{div}\delta_\varepsilon\mathfrak{D} = 0. \tag{89}$$

Das ist selbstverständlich; denn die Verschiebungsfelder $\mathfrak{D}_\varepsilon$ und $\mathfrak{D}_{\varepsilon+\delta\varepsilon}$ haben überall dieselben Quellen ϱ. Ihre Differenz $\delta_\varepsilon\mathfrak{D}$ stellt daher ein quellenfreies Feld dar. Durch Differenzbildung erhält man

$$\delta_\varepsilon U = -\frac{1}{8\pi}\int\frac{\mathfrak{D}^2}{\varepsilon^2}\,\delta\varepsilon\,d\tau + \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\mathfrak{D}}{\varepsilon}, \delta_\varepsilon\mathfrak{D}\right)d\tau.$$

Es ist leicht zu zeigen, daß das zweite Integral verschwindet. Man schreibt einfach $\frac{\mathfrak{D}}{\varepsilon} = \mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\Phi$ und bedenkt, daß

$$-(\operatorname{grad}\Phi,\ \delta_\varepsilon \mathfrak{D}) = -\operatorname{div}\Phi\,\delta_\varepsilon \mathfrak{D} + \Phi\operatorname{div}\delta_\varepsilon \mathfrak{D}$$

ist. Das zweite Glied ist null. Durch Anwendung des GAUSSschen Satzes geht das Raumintegral des ersten Gliedes in das Flächenintegral $-\int \Phi\,\delta_\varepsilon \mathfrak{D}_n df$ über. Erstreckt man dieses Flächenintegral über die unendliche Kugelfläche, so wird es null. Es verbleibt daher

$$\delta_\varepsilon U = -\int \mathfrak{E}^2 \delta\varepsilon\, d\tau. \tag{90}$$

Nach Einsetzen des Ausdruckes (87) für $\delta\varepsilon$ folgt

$$\delta_\varepsilon U = \frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{E}^2 (\operatorname{grad}\varepsilon,\ \delta\mathfrak{r})\, d\tau. \tag{91}$$

Im Fall 2 ergibt die Variation der Gleichung $\operatorname{div}\mathfrak{D} = 4\pi\varrho$

$$\operatorname{div}\delta_\varrho \mathfrak{D} = 4\pi\,\delta\varrho. \tag{92}$$

Die entsprechende Energieänderung wird

$$\delta_\varrho U = \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\mathfrak{D}}{\varepsilon},\ \delta_\varrho\mathfrak{D}\right) d\tau = -\frac{1}{4\pi}\int(\operatorname{grad}\Phi,\ \delta_\varrho\mathfrak{D})\, d\tau. \tag{93}$$

Ebenso wie vorher gilt

$$-(\operatorname{grad}\Phi,\ \delta_\varrho\mathfrak{D}) = -\operatorname{div}\Phi\,\delta_\varrho\mathfrak{D} + \Phi\operatorname{div}\delta_\varrho\mathfrak{D}.$$

Das Raumintegral des rechtsseitigen ersten Gliedes verschwindet wieder. Es bleibt

$$\delta_\varrho U = \int \Phi\,\delta\varrho\, d\tau.$$

Unter Benutzung von Gleichung (88) wird der Integrand

$$\Phi\,\delta\varrho = -\Phi\operatorname{div}\varrho\,\delta\mathfrak{r} = -\operatorname{div}\Phi\,\varrho\,\delta\mathfrak{r} + (\varrho\operatorname{grad}\Phi,\ \delta\mathfrak{r}).$$

Da das Raumintegral der Divergenz verschwindet, erhält man

$$\delta_\varrho U = -\int(\varrho\,\mathfrak{E},\ \delta\mathfrak{r})\, d\tau.$$

Jetzt sind wir in der Lage, die Gleichung (86) in der gewünschten Form niederzuschreiben:

$$\int(\mathfrak{k},\ \delta\mathfrak{r})\, d\tau = -\delta_\varepsilon U - \delta_\varrho U = \int\left\{\varrho\,\mathfrak{E} - \frac{1}{8\pi}\mathfrak{E}^2(\operatorname{grad}\varepsilon,\ \delta\mathfrak{r})\right\} d\tau.$$

Der Vergleich der linken und rechten Seite zeigt, daß für $\mathfrak{k}$ zu setzen ist:

$$\mathfrak{k} = \varrho\,\mathfrak{E} - \frac{1}{8\pi}\mathfrak{E}^2 \operatorname{grad}\varepsilon.$$

Das Auftreten des ersten Gliedes rechts ist wohl selbstverständlich und folgt aus der Definition der Feldstärke. Das zweite verschwindet im Innern homo-

gener Dielektrika. An Stellen der Ungleichförmigkeit und der Diskontinuität muß es jedoch in Betracht gezogen werden und gibt dann durch einfache Umformung Antwort auf die praktisch wichtige Frage, wie groß der Druck an der Grenzfläche zweier Dielektrika ist.

In der Praxis kommt sowohl die wahre als auch die freie Elektrizität beinahe ausschließlich in flächenhafter Verteilung vor. Dann aber verliert die räumliche Kraftdichte $\mathfrak{k}$ ihren Sinn, und unser Interesse wendet sich jenen Spannungen und Drücken zu, die das Feld auf ein Flächenelement ausübt. Es ist klar, daß das Glied $\varrho\mathfrak{E}$ der Kraftdichte im Ausdruck der Spannung durch $\mathfrak{E}\omega$ zu ersetzen ist. Etwas umständlicher ist die Umformung des Gliedes $-\frac{1}{8\pi}\mathfrak{E}^2 \operatorname{grad}\varepsilon$ in dem Fall, wo die Änderung von ε sich in der Form eines Flächensprunges äußert. Wir gehen so vor, daß wir an der Grenzfläche der zwei Dielektrika eine dünne Übergangsschicht voraussetzen, in der ε sich stetig von ε_1 bis ε_2 ändert. Schließlich lassen wir die Dicke der Schicht gegen Null konvergieren. In Abb. 11 befindet sich das Dielektrikum *2* unterhalb der Schicht, das Dielektrikum *1* oberhalb derselben. Die Normale $\mathfrak{n}$ zeigt in das Innere des ersten Isolators. In der Schicht umgrenzen wir einen elementaren Zylinder mit der Grundfläche df und der Höhe dn. Sein Volumen ist $d\tau = df\,dn$. Unserer Formel gemäß wirkt auf ihn die Kraft

$$d\mathfrak{K} = -\frac{1}{8\pi}\mathfrak{E}^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial n}\,dn\,df.$$

Abb. 11

Die Richtung der Kraft ist nach Gleichung (93) durch $-\operatorname{grad}\varepsilon$ gegeben, in unserem Falle durch $-\frac{\partial\varepsilon}{\partial n}$, so daß die Kraft in die Richtung von $\mathfrak{n}$ fällt, wenn $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ist. Jedenfalls steht sie senkrecht auf der Berührungsfläche. Dann spricht man lieber von Druck als von Spannung. Wir bezeichnen den auf die Grenzfläche wirkenden Druck mit p und haben

$$p = -\frac{1}{8\pi}\int_2^1 \mathfrak{E}^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial n}\,dn. \tag{94}$$

Die Integration läßt sich natürlich nur durchführen, wenn $\mathfrak{E}^2$ als Funktion von n bekannt ist. Es besteht aber die Gleichung

$$\mathfrak{E}^2 = \mathfrak{E}_t^2 + \mathfrak{E}_n^2 = \mathfrak{E}_t^2 + \frac{\mathfrak{D}_n^2}{\varepsilon^2}.$$

Sowohl $\mathfrak{E}_t$ als auch $\mathfrak{D}_n$ sind unabhängig von n, wenn die Schicht unendlich dünn ist. Nach Einsetzen folgt aus Gleichung (94)

$$p = -\frac{1}{8\pi}\mathfrak{E}_t^2\int_2^1\frac{\partial\varepsilon}{\partial n}\,dn - \frac{1}{8\pi}\mathfrak{D}_n^2\int_2^1\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial n}\,dn = \frac{1}{8\pi}\mathfrak{E}_t^2(\varepsilon_2-\varepsilon_1) + \frac{1}{8\pi}\mathfrak{D}_n^2\left(\frac{1}{\varepsilon_1}-\frac{1}{\varepsilon_2}\right).$$

Der Grenzübergang ist infolge der Konstanthaltung von $\mathfrak{E}_t$ und $\mathfrak{D}_n$ offenbar schon durchgeführt. In endgültiger Form lautet die Gleichung:

$$p = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{E}_t^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \frac{1}{8\pi} \mathfrak{D}_n^2 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_1}. \tag{95}$$

Jedes Glied für sich kennzeichnet einen Druck, demzufolge der Isolator mit größerer dielektrischen Konstante den anderen aus dem elektrischen Felde zu verdrängen sucht.

Wir wenden unser Resultat auf folgenden Fall an: Am Rande eines Vakuumkondensators wird eine dielektrische Platte in den Zwischenraum eingefügt. Nach dem eben Gesagten zieht das elektrostatische Feld die Platte in den Zwischenraum hinein und leistet dabei Arbeit. Diese Arbeit wollen wir berechnen. Die Belegungen mögen der Einfachheit halber die Form eines rechtwinkligen Parallelogramms haben. Ihr Abstand sei d, ihr Flächeninhalt – einzeln genommen – gleich F. Wir betrachten einen Zwischenzustand, in dem die Isolatorplatte die Fläche F' der Belegungen bedeckt. Die noch freie Fläche ist $F - F'$. Auf dieser sei die elektrische Dichte ω, auf der bedeckten ω'. Daraus folgt, daß im noch leeren Zwischenraum $|\mathfrak{E}| = 4\pi\omega$ ist, im bereits gefüllten jedoch $|\mathfrak{E}'| = \frac{4\pi\omega'}{\varepsilon}$. Da $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ parallel der Vorderfläche der Isolatorplatte sind, folgt $\mathfrak{E}' = \mathfrak{E}$ und daraus weiter $\omega' = \varepsilon\omega$. Die Ladung e verteilt sich nicht mehr gleichförmig über die Belegung. Auf dem bedeckten Teil ist ihre Dichte ε-mal größer als auf dem unbedeckten. Die Ladung e ist jetzt Summe zweier Teilladungen:

$$e = \omega' F' + \omega (F - F') = \omega \{(\varepsilon - 1) F' + F\}$$

und daher gilt

$$\omega = \frac{e}{(\varepsilon - 1) F' + F}, \quad |\mathfrak{E}| = \mathfrak{E}_t = 4\pi e \frac{1}{(\varepsilon - 1) F' + F}.$$

Der Druck, der die Stirnfläche in den Zwischenraum hineinschiebt, wird

$$p = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{E}^2 (\varepsilon - 1) = 2\pi e^2 \frac{\varepsilon - 1}{\{(\varepsilon - 1) F' + F\}^2}.$$

Jetzt kann das Arbeitselement ausgedrückt werden, welches die Feldstärke leistet, indem sie die Platte um das Raumstück $d\tau$ hineinzieht:

$$dA = p\,d\tau = p\,dF'd.$$

Die ganze Arbeit erhält man durch Integration:

$$A = 2\pi e^2 (\varepsilon - 1)\, d \int_0^F \frac{dF'}{\{(\varepsilon - 1) F' + F\}^2} = 2\pi e^2 d \left(\frac{1}{F} - \frac{1}{\varepsilon F}\right).$$

Zieht man in Betracht, daß

$$\frac{2\pi d}{F} = \frac{1}{2C} \quad \text{und} \quad \frac{2\pi d}{\varepsilon F} = \frac{1}{2C'}$$

ist, wobei C, C' die Kapazität des leeren bzw. des dielektrisch erfüllten Kondensators sind, so folgt

$$A = \frac{e^2}{2C} - \frac{e^2}{2C'} = U - U'.$$

Die Tatsache, daß die Energie des dielektrischen Kondensators geringer ist als die des leeren, findet ihre Erklärung in der Arbeitsleistung des Feldes, die ganz auf Kosten der Energie erfolgt.

Auf die Wirkung des ponderomotorischen Druckes gründet sich ein bequemer Meßvorgang zur Bestimmung der dielektrischen Konstante von Flüssigkeiten, der als Steighöhenmethode bekannt ist. Ein U-förmiges Glasrohr wird mit der fraglichen Flüssigkeit gefüllt und der eine Schenkel zwischen die Belegung eines vertikalen Kondensators gestellt. Die Feldstärke $\mathfrak{E}$ ist horizontal gerichtet, parallel zur Flüssigkeitsoberfläche. Infolge des Druckes

$$p = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{E}^2 (\varepsilon - 1)$$

steigt in diesem Schenkel der Oberflächenspiegel. Bedeutet s die Dichte der Flüssigkeit, h den Niveauabstand, so ist der hydrostatische Druck sgh. Die Gleichgewichtsbedingung lautet dann

$$\frac{1}{8\pi} \mathfrak{E}^2 (\varepsilon - 1) = sgh.$$

Die Feldstärke $\mathfrak{E}$ erhält man aus der Potentialdifferenz der Belegungen in der Form $\frac{\delta\Phi}{d}$. ε kann nun leicht berechnet werden.

§ 30. MAXWELLsche Spannungen

Aus der Dynamik deformierbarer Körper ist bekannt, daß die Dichte der elastischen Kraft als Divergenz der Spannungen erhalten wird. FARADAY, der die fernwirkenden Kräfte ablehnte, nahm auf Grund dieser mechanischen Analogie an, daß auch im elektrischen Felde Spannungen auftreten und die beobachtbaren ponderomotorischen Kräfte Folgen dieser Spannungen seien. MAXWELL gelang es, für die Spannungen mathematische Ausdrücke ausfindig zu machen, deren Divergenz mit der Form (93) der ponderomotorischen Kraftdichte übereinstimmt. Ganz unfruchtbar erwiesen sich hingegen jene älteren Bestrebungen, über die formalen mechanischen Analogien hinausgehend, die Gesamtheit der elektrischen Erscheinungen aus den mechanischen Eigenschaften des hypothetischen Äthers herzuleiten. Die mechanische Begründung der Elektrodynamik blieb stets ein frommer Wunsch, und die bessere Einsicht bedeutet das Ende der NEWTON-LAPLACEschen mechanischen Weltauffassung. Mit der Elektrodynamik begann eine neue Einstellung zur physikalischen Wirklichkeit. Man ist heute überzeugt, daß neben die Realität der Materie die Realität des Kraftfeldes zu setzen ist.

Die MAXWELLschen Spannungen betrachtet man heute ausschließlich als nützliche analytische Ausdrücke, aus denen die ponderomotorische Kraftdichte durch Divergenzbildung zu erhalten ist.

Das Schema der Spannungen ist folgendes:

$$\left\{\begin{matrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}_x^2 - \frac{\varepsilon}{8\pi}\mathfrak{E}^2 & \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y & \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_z \\ \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}_y\mathfrak{E}_x & \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}_y^2 - \frac{\varepsilon}{8\pi}\mathfrak{E}^2 & \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}_y\mathfrak{E}_z \\ \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}_z\mathfrak{E}_x & \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}_z\mathfrak{E}_y & \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}_z^2 - \frac{\varepsilon}{8\pi}\mathfrak{E}^2 \end{matrix}\right\} \quad (96)$$

Ersichtlicherweise ist der aus neun Komponenten bestehende Tensor symmetrisch: $T_{xy} = T_{yx}$ usw., so daß er nur sechs verschiedene Komponenten besitzt. In der niedergeschriebenen Form besitzt das Schema nur für das statische Feld Gültigkeit. Im Falle stationärer Ströme treten ergänzende magnetische Glieder zu den einzelnen Elementen hinzu. Ist das Feld zeitlich veränderlich, dann kommt noch eine vierte Zeile und Spalte dazu. Davon wird in den letzten Abschnitten die Rede sein.

Wir bilden nun die Divergenz des Vektors, dessen Komponenten die erste Zeile darstellen. Zweck der Rechnung ist, zu zeigen, daß dadurch die Komponente $\mathfrak{k}_x$ der Kraftdichte entsteht. Der Zweckmäßigkeit halber schreiben wir die Komponenten in folgender leicht abgeänderter Form:

$$T_{xx} = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x - \frac{\varepsilon}{8\pi}\mathfrak{E}^2, \quad T_{xy} = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_y, \quad T_{xz} = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_z.$$

Die Rechnung gibt nun

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} = \mathfrak{E}_x \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\mathfrak{D} - \frac{1}{8\pi}\mathfrak{E}^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{8\pi}\frac{\partial\mathfrak{E}^2}{\partial x} +$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\left(\mathfrak{D}_x\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial x} + \mathfrak{D}_y\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial y} + \mathfrak{D}_z\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial z}\right).$$

Im statischen Raum folgt aber aus $\operatorname{rot}\mathfrak{E} = 0$

$$\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial y} = \frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial z} = \frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial x}.$$

Unter Benutzung dieser Relationen wird das letzte Glied rechts

$$\frac{\varepsilon}{4\pi}\left(\mathfrak{E}_x\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial x} + \mathfrak{E}_y\frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial x} + \mathfrak{E}_z\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial x}\right) \equiv \frac{\varepsilon}{8\pi}\frac{\partial\mathfrak{E}^2}{\partial x}.$$

Es verbleibt auf der rechten Seite nur

$$\varrho\mathfrak{E}_x - \frac{1}{8\pi}\mathfrak{E}^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}.$$

Das ist tatsächlich die x-Komponente der Kraftdichte (93). Entsprechendes gilt für die beiden anderen Komponenten.

Wir tun einen Schritt weiter und erinnern dazu wieder an einen wohlbekannten Satz der Mechanik. Wenn an einer Stelle des Raumes die neun Spannungskomponenten gegeben sind und man nimmt dort ein Flächenelement mit der Normalen $\mathfrak{n}$ an, dann erhält man die Komponenten des Spannungsvektors $\mathfrak{T}_n$, der auf das Flächenstück einwirkt, durch die Formeln

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{nx} &= T_{xx}\cos(nx) + T_{xy}\cos(ny) + T_{xz}\cos(nz), \\ \mathfrak{T}_{ny} &= T_{yx}\cos(nx) + T_{yy}\cos(ny) + T_{yz}\cos(nz), \\ \mathfrak{T}_{nz} &= T_{zx}\cos(nx) + T_{zy}\cos(ny) + T_{zz}\cos(nz). \end{aligned} \tag{97}$$

Der Spannungsvektor $\mathfrak{T}_n$ greift jene Seite des Flächenelementes an, von der n ausgeht. Unsere Aufgabe soll darin bestehen, bezüglich Betrag und Richtung von $\mathfrak{T}_n$ zwei einfache Sätze herzuleiten. Zu diesem Zweck wählen wir im elektrischen Raume ein beliebiges Flächenelement und zeichnen eine der beiden

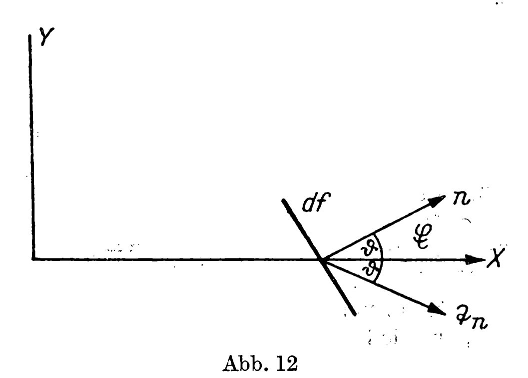


Abb. 12

Normalen ein (Abb. 12). Die X-Achse des Koordinatensystems legen wir in die Richtung der lokalen Feldstärke $\mathfrak{E}$, die Y-Achse in die Ebene $(\mathfrak{n}\mathfrak{E})$. In der Abbildung ist dies die Zeichenebene. Die Z-Achse steht senkrecht zur Zeichenebene. Der Winkel, den $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{E}$ bilden, sei ϑ. Dann bestehen die Beziehungen

$$\mathfrak{E}_x = |\mathfrak{E}|, \quad \mathfrak{E}_y = 0, \quad \mathfrak{E}_z = 0, \quad \cos(nx) = \cos\vartheta, \quad \cos(ny) = \sin\vartheta, \quad \cos(nz) = 0.$$

Mit diesen speziellen Werten bilden wir die Tensorkomponenten (96) und setzen sie sodann in das System (97) ein. Die einfachen Rechnungen führen zu folgendem Ergebnis:

$$\mathfrak{T}_{nx} = \frac{\varepsilon}{8\pi}\mathfrak{E}^2\cos\vartheta, \quad \mathfrak{T}_{ny} = -\frac{\varepsilon}{8\pi}\mathfrak{E}^2\sin\vartheta, \quad \mathfrak{T}_{nz} = 0. \tag{98}$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt erstens

$$|\mathfrak{T}_n| = \frac{\varepsilon}{8\pi}\mathfrak{E}^2 = u.$$

Der Betrag des Spannungsvektors ist immer gleich der Energiedichte, welchen Winkel er auch mit der Feldstärke einschließt. Zweitens liest man aus den Gleichungen (98) die Richtungskosinus von $\mathfrak{T}_n$ ab:

$$\cos\vartheta, \quad -\sin\vartheta, \quad 0.$$

Das sind die Richtungskosinus des Spiegelbildes von n bezüglich $\mathfrak{E}$. $\mathfrak{E}$ halbiert daher den Winkel, den n und $\mathfrak{T}_n$ einschließen. Die Konstruktion von $\mathfrak{T}_n$ erfolgt einfach so, daß man den Winkel $(n, \mathfrak{E})$ auf die andere Seite von $\mathfrak{E}$ überträgt und in der erhaltenen Richtung die Größe $\frac{\varepsilon}{8\pi}\,\mathfrak{E}^2$ aufträgt.

Drei spezielle Fälle sind besonders bemerkenswert. 1. n fällt mit $\mathfrak{E}$ zusammen. Dann hat auch $\mathfrak{T}_n$ die Richtung von $\mathfrak{n}$. Die Wirkung des Spannungsvektors äußert sich als reine Zugspannung. 2. $\mathfrak{E}$ fällt in die Ebene des Flächenstückes. In diesem Fall ist $\mathfrak{T}_n$ zur Normalen entgegengesetzt gerichtet. Es tritt Druckspannung auf. 3. $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{n}$ bilden einen Winkel von 45°. Dann fällt $\mathfrak{T}_n$ in die Fläche. Es handelt sich dann um reine Schubspannung.

Die weitere Feststellung der Mechanik, daß $\mathfrak{T}_{-n} = -\mathfrak{T}_n$ sei, d.h., daß an den zwei verschiedenen Seiten der Fläche die entsprechenden Spannungsvektoren einander entgegengesetzt gleich sind, besteht hier nur dann zu Recht, wenn das Flächenelement nicht an einer Diskontinuitätsstelle des Feldes liegt. Dies ist der Fall an der Grenzfläche zweier Dielektrika. Wir benutzen die Gelegenheit, um die Formel (95) des dielektrischen Druckes mit der hier besprochenen Methode auf kurzem Wege nochmals abzuleiten.

An der Grenzfläche zerlegen wir die Feldstärke $\mathfrak{E}$ in die Komponenten $\mathfrak{E}_t$ und $\mathfrak{E}_n$ und behandeln beide einzeln. Die Normalen n_1 und n_2 weisen in das Innere der entsprechenden Dielektrika. n_1 steht senkrecht auf $\mathfrak{E}_t$, sein Spiegelbild fällt in die Richtung von n_2, auf die Seite *1* der Fläche wirkt deshalb eine Druckspannung vom Betrage $\frac{\varepsilon_1}{8\pi}\,\mathfrak{E}_t^2$. Auf Grund derselben Betrachtung folgt, daß auf die Seite *2* in der Richtung von n_1 die Druckspannung $\frac{\varepsilon_2}{8\pi}\,\mathfrak{E}_t^2$ wirkt. Soll der nach n_1 gerichtete Druck als positiv gelten, so hat man

$$p = \frac{1}{8\pi}\,\mathfrak{E}_t^2\,(\varepsilon_2 - \varepsilon_1).$$

Das ist das erste Glied der Gleichung (95).

Was die Normalkomponente anbelangt, so fällt $\mathfrak{E}_{n_1}$ in die Richtung n_1, $\mathfrak{T}_n$, also ebenfalls. Es handelt sich um eine Zugspannung von der Größe

$$\frac{\varepsilon_1}{8\pi}\,\mathfrak{E}_{n_1}^2 = \frac{1}{8\pi}\,\frac{\mathfrak{D}_n^2}{\varepsilon_1}.$$

Nach diesem Beispiel ergibt sich die Zugspannung in der n_2-Richtung:

$$\frac{\varepsilon_2}{8\pi}\,\mathfrak{E}_{n_2}^2 = -\,\frac{1}{8\pi}\,\frac{\mathfrak{D}_n^2}{\varepsilon_2}.$$

Als Summe der beiden folgt für den resultierenden Druck

$$p = \frac{1}{8\pi}\mathfrak{D}_n^2\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) = \frac{1}{8\pi}\mathfrak{D}_n^2\,\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_1}.$$

Dies ist das zweite Glied von (95).

Für die ponderomotorische Kraft, die einen endlichen Teil des Körpers angreift, gilt der Integralausdruck

$$\mathfrak{K} = \int \mathfrak{k} \cdot d\tau. \tag{99}$$

MAGNETISMUS

§ 31. Magnetostatik

Die magnetischen Erscheinungen bildeten bis zur epochemachenden Entdeckung Oersteds (1820) ein abgesondertes Kapitel der Physik. Gegenstand der Untersuchung war die Wechselwirkung der permanenten Magnete. Das Coulombsche Gesetz, welches die Abhängigkeit der gegenseitigen Kraftwirkungen magnetischer Mengen von ihrem Abstand festlegte, erlaubte die Methode der Analysis auch auf den Magnetismus anzuwenden. Infolge der Identität des elektrischen und magnetischen Kraftgesetzes haben die beiden Disziplinen viel Gemeinsames. Die Analogie hört jedoch sofort auf, wo die Trennung magnetischer Mengen in Frage kommt. Die Zerkleinerung des nördlichen (positiven) Endes eines Magneten führt nicht etwa auf zerkleinerte (positive) magnetische Mengen, sondern auf Teile, deren jedes immer noch entgegengesetzte Enden aufweist. Der permanente Magnet ist daher dem Elektret analog. Die Magnetisierung eines Stahlstabes besteht nach dieser Auffassung darin, daß er durch die Einwirkung eines magnetischen Feldes polarisiert wird. Die Polarisation behält der Stahlstab gleich dem Elektreten teilweise auch dann, wenn er aus dem Felde herausgenommen wird. Die magnetische Polarisation des weichen Eisens hingegen erlischt in diesem Falle.

Betrachtet man die magnetische Polarisation $\mathfrak{M}$ des Stabes als gegeben, dann nimmt sein Potential Φ_m nach dem Muster von Gleichung (64) die Form

$$\Phi_m = -\int \frac{\mathfrak{M}_n}{r}\,df - \int \frac{\operatorname{div}\mathfrak{M}}{r}\,d\tau$$

an.

Die Normale $\mathfrak{n}$ ist nach innen gerichtet. $-\mathfrak{M}_n$ ist als freie Flächendichte, $-\operatorname{div}\mathfrak{M}$ als freie räumliche Dichte des Stabes zu deuten. Denkt man sich den Stab in seiner Längsrichtung homogen polarisiert, dann wird $\operatorname{div}\mathfrak{M} = 0$, und $-\mathfrak{M}_n$ ist nur an den zwei Stirnflächen von Null verschieden. Diese zwei Flächen sind dann mit homogener Dichte belegt, Kraftlinien treten nur an diesen Flächen aus. Man kann sich den Stab z. B. in der Form einer Stricknadel auch als langgestrecktes Ellipsoid vorstellen, das durch ein homogenes Feld in der Richtung seiner großen Achse leicht homogen polarisiert werden kann. Freier Magnetismus tritt dann praktisch nur an den zwei Enden auf.

Auf diese Weise kann man daher leicht in großem Abstand befindliche entgegengesetzte Enden herstellen, die infolge ihrer geringen Ausdehnung in erster Näherung als punktförmig betrachtet werden können. Mit solchen Stäben leitete COULOMB experimentell sein Kraftgesetz ab, mit dessen Hilfe die Einheit der magnetischen Menge definiert werden kann. Es ist jene Menge, die auf eine gleiche im Abstand von 1 cm die Kraft 1 dyn ausübt. Befindet sich die Menge im Vakuum, dann lautet das COULOMBsche Gesetz

$$|\mathfrak{K}_{12}| = \frac{|m_1 m_2|}{r_{12}^2}. \tag{100}$$

Experimentiert man mit drei Enden, so können m_1, m_2, m_3 in derselben Weise gemessen werden wie in der Elektrostatik die drei Punktladungen. Der gebräuchliche Fachausdruck heißt aber heute nicht mehr magnetische Menge, sondern Polstärke.

Wenn man durch gehörige Magnetisierung an einem Ende einer sehr langen Nadel die Einheit der positiven Polstärke, den positiven Einheitspol, herstellt, kann man dadurch ein durch gegebene Magnete erzeugtes Feld ebenso ausmessen, wie uns das aus der Elektrostatik bekannt ist. Die auf den positiven Einheitspol wirkende Kraft nennt man magnetische Feldstärke und bezeichnet sie mit $\mathfrak{H}$.

Wir senken nun die felderregenden Magnete in irgendeine Flüssigkeit, z. B. Eisenchlorid, und messen das Feld nochmals aus. Die Erfahrung lehrt, daß das Feld in diesem Falle der Richtung nach zwar unverändert bleibt, seinen Betrag aber ändert. Die neue Feldstärke $\mathfrak{H}'$ wird

$$\mathfrak{H}' = \frac{1}{\mu}\,\mathfrak{H}.$$

μ ist in vielen Fällen eine für das Medium charakteristische Konstante, die man magnetische Permeabilität nennt. Sie ist das Analogon der dielektrischen Konstante, während letztere aber immer größer als 1 ist, kann μ auch kleinere Werte annehmen. Die Permeabilität des Vakuums ist gleich 1.

Absichtlich wurde die angegebene Methode der Feldstärkenmessung vorangestellt, denn sie gibt die anschaulichste Definition der Feldstärke. In Wirklichkeit bedient man sich der GAUSSschen Methode, die jetzt kurz beschrieben werden soll. An einem gegebenen Punkt P des Feldes sei die zu messende Feldstärke $\mathfrak{H}$. In einer kleinen Umgebung kann das Feld als homogen gelten. Man bringt jetzt den Mittelpunkt eines sehr kurzen Magnetstäbchens nach P. Das Moment des Stäbchens sei $\mathfrak{m}$. Auf eine Spitze frei drehbar aufgesetzt, stellt sich das Stäbchen in die Richtung von $\mathfrak{H}$ ein. Wird es aus seiner Ruhelage nur wenig abgelenkt, so verrichtet es Pendelschwingungen mit der Frequenz

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{|\mathfrak{m}|\,|\mathfrak{H}|}{\Theta}}, \tag{101}$$

wobei Θ das gemessene Trägheitsmoment des Stäbchens bedeutet. Aus Gleichung (101) kann $|\mathfrak{m}|\,|\mathfrak{H}|$ berechnet werden.

Jetzt entfernt man das Stäbchen vom Meßort und ersetzt es durch eine kurze Magnetnadel, die sich in die Feldrichtung einstellt. Nun bringt man das Stäbchen in größerer Entfernung so an, daß seine Achse nach dem Mittelpunkt der Nadel zeigt und senkrecht zum Felde in P steht. Der Abstand der beiden Mittelpunkte sei r. In dieser ersten GAUSSschen Hauptlage wird das Feld $\mathfrak{H}'$ des Stäbchens in P

$$\mathfrak{H}' = \frac{2\,\mathfrak{m}}{r^2}$$

und kann in der unmittelbaren Nachbarschaft sowohl dem Betrage als auch der Richtung nach als konstant betrachtet werden. Die Nadel wird durch dieses zweite Feld um einen Winkel α abgelenkt. Es gilt dann

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|\mathfrak{H}'|}{|\mathfrak{H}|} = \frac{2\,|\mathfrak{m}|}{r^3\,|\mathfrak{H}|}\,.$$

Jetzt ist sowohl das Produkt $|\mathfrak{m}|\,|\mathfrak{H}|$ als auch der Quotient $\frac{|\mathfrak{m}|}{|\mathfrak{H}|}$ bekannt. $|\mathfrak{m}|$ und $|\mathfrak{H}|$ können einzeln berechnet werden. Ist einmal das Moment des Stäbchens bestimmt, dann kann das ganze Feld allein durch die Beobachtung der Schwingungsfrequenz (101) ausgemessen werden.

In der Elektrostatik konnte das Feld außer durch $\mathfrak{E}$ auch durch den Verschiebungsvektor $\mathfrak{D}$ gekennzeichnet werden. Dieselbe Sachlage finden wir in der Magnetostatik wieder. Der Vektor, der die Stelle von $\mathfrak{D}$ einnimmt, wird allgemein mit $\mathfrak{B}$ bezeichnet und Vektor der magnetischen Induktion genannt. Es gibt aber einen grundlegenden Unterschied zwischen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$. Während dem Vektor $\mathfrak{D}$ durch die Influenzwirkung des Feldes im eigentlichen Rahmen der Elektrostatik ein selbständiger physikalischer Sinn beigelegt werden konnte, fällt die selbständige Definition von $\mathfrak{B}$ nicht in den Rahmen der Magnetostatik. Erst das FARADAYsche Induktionsgesetz bietet die Möglichkeit dazu. Oft wird $\mathfrak{B}$ formal durch die Gleichung

$$\mathfrak{B} = \mu\,\mathfrak{H}$$

eingeführt. Logischerseits läßt sich dagegen nichts einwenden. Läßt sich $\mathfrak{B}$ in der Magnetostatik nicht physikalisch definieren, muß es auf einen schon definierten Vektor zurückgeführt werden. Der Ausdruck ist jedoch nicht allgemein genug, wenn μ eine Konstante bedeuten soll. Für ferromagnetische Stoffe bewährt er sich nicht. Wir ziehen es deshalb vor, die Größe $\mathfrak{B}$ im nächsten Paragraphen auf die Polarisation zurückzuführen.

§ 32. Die Grundgesetze des magnetostatischen Feldes

Längs einer geschlossenen Linie mögen die Feldstärken dicht ausgemessen werden, damit das Integral

$$J = \oint (\mathfrak{H},\, d\mathfrak{s})$$

ausgewertet werden kann. Die Erfahrung lehrt, daß J verschwindet. Daraus folgt rot $\mathfrak{H} = 0$. Damit läßt sich die magnetische Feldstärke aus einem Potential ableiten:

$$\mathfrak{H} = -\operatorname{grad}\Phi_m. \tag{102}$$

In dieser Gleichung erblicken wir das erste Grundgesetz der Magnetostatik.

Das zweite folgt aus der Tatsache, daß es wahre magnetische Mengen nicht gibt. Ein Stahlstab wird nie durch Aufladung, immer nur durch „Polarisierung" zum Magneten gemacht. Während in der Elektrostatik die freie Dichte aus zwei Summanden besteht,

$$\varrho' = \varrho - \operatorname{div} \mathfrak{P}, \quad \text{bzw.} \quad \omega' = \omega - \mathfrak{P}_n,$$

entfällt in der Magnetostatik das erste Glied rechts,

$$\varrho'_m = -\operatorname{div} \mathfrak{M}, \quad \text{bzw.} \quad \omega'_m = -\mathfrak{M}_n. \tag{103}$$

Diese freien Dichten sind die einzigen Quellen des Feldes. Es läßt sich daher schreiben:

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 4\pi \varrho'_m = -4\pi \operatorname{div} \mathfrak{M}, \quad (\mathfrak{H}_n)_1 - (\mathfrak{H}_n)_2 = 4\pi \omega_m = -4\pi \{(\mathfrak{M}_n)_1 - (\mathfrak{M}_n)_2\}.$$

Reduziert man auf Null, so ist zu ersehen, daß für Vektor

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi \mathfrak{M} \tag{104}$$

die Gleichungen gelten:

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0, \quad (\mathfrak{B}_n)_1 - (\mathfrak{B}_n)_2 = 0. \tag{105}$$

Den durch Gleichung (104) definierten Vektor nennen wir Vektor der magnetischen Induktion. Er ist dadurch ausgezeichnet, daß er im magnetostatischen Felde nach Gleichung (105) durchaus quellenfrei ist. Die Differenz $(\mathfrak{B}_n)_1 - (\mathfrak{B}_n)_2$ bezieht sich auf die Grenzfläche verschiedener Stoffe. An diesen Flächen folgt nach dem ersten Grundgesetz die Bedingung

$$(\mathfrak{H}_t)_1 = (\mathfrak{H}_t)_2. \tag{106}$$

Die Aussagen (105) sind das zweite Grundgesetz der Magnetostatik.

Der Kraftfluß hat dort, wo $\operatorname{div} \mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}_n$ von Null verschieden sind, Quellen und Senken. Die Kraftlinien sind deshalb keine geschlossenen Linien. $\mathfrak{B}$ hingegen ist quellenlos, die Induktionslinien sind geschlossen.

§ 33. Arten der magnetischen Polarisation

Die Stoffe lassen sich bezüglich der magnetischen Polarisation in drei verschiedene Klassen einteilen. Die beiden ersten sind dadurch ausgezeichnet, daß die Polarisation proportional der Feldstärke ist:

$$\mathfrak{M} = \varkappa \mathfrak{H}. \tag{107}$$

Je nach dem Vorzeichen der Konstanten $\varkappa$, die man magnetische Suszeptibilität nennt, bedeutet das zwei Möglichkeiten. 1. Ist $\varkappa$ negativ, so ist die Polarisation dem Feld entgegengesetzt gerichtet und heißt diamagnetische Polarisation. In der Elektrostatik gibt es nichts Ähnliches. 2. Positives $\varkappa$ kennzeichnet den Fall, in dem die Polarisation in die Feldrichtung fällt. Man spricht dann von paramagnetischer Polarisation. 3. Die dritte Klasse umfaßt die ferromagnetischen

Stoffe. Für Stoffe dieser Klasse besteht keine Proportionalität zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{H}$, sondern $\varkappa$ wird eine Funktion der Feldstärke.

Wir wollen die charakteristischen Züge dieser Polarisationen einzeln besprechen.

1. Es ist klar, daß es eine diamagnetische Polarisation nach dem Muster der dielektrischen nicht geben kann. Eine Trennung wahrer magnetischer Mengen entgegengesetzten Vorzeichens kann im Molekül nicht stattfinden, weil es keine solchen Mengen gibt. An der Existenz magnetischer Momente im Innern magnetischer Körper müssen wir jedoch festhalten, wenn nicht unsere ganze bisherige Theorie in sich zusammenbrechen soll. Nun führte die Erkenntnis, daß ein stromdurchflossenes Solenoid sich wie ein Magnet verhält, AMPÈRE auf die Vermutung, daß auch in den Atomen kleine Kreisströme vorhanden seien, die imstande sind, magnetische Wirkungen auszuüben. Dieses Bild wurde vervollständigt durch die WEBERsche Erfahrung, wonach ein kleiner Ringstrom der Stärke J, der die Fläche f umrandet, dieselbe magnetische Wirkung ausübt wie ein magnetischer Dipol mit dem Moment $J \cdot f$. Das magnetische Moment ist also durchaus nicht an Dipole gebunden. Auch ist das AMPÈREsche Modell heute keine bloße Vermutung mehr. Nach dem RUTHERFORDschen Atommodell sind es die um den Kern kreisenden Elektronen, die das magnetische Moment hervorbringen. Es ist möglich, daß das resultierende Moment des Atoms oder der Molekel verschwindet. Dann könnte man versucht sein, zu glauben, das Atom zeige in einem magnetischen Felde keine Einstellungstendenz. Man muß jedoch bedenken, daß das Einschalten des Feldes oder das Hineinbringen des Atoms in das vorhandene Feld einen Strom induziert, der sich dem schon bestehenden überlagert. Nach dem Gesetz der Induktion ist das Moment des induzierten Stromes dem Felde entgegengesetzt gerichtet. Die diamagnetische Suszeptibilität ist daher negativ. Diamagnetismus zeigt jeder Stoff, jedoch von so geringem Betrage, daß er nicht festgestellt werden kann, wenn er vom Paramagnetismus überdeckt wird. Einige Werte für $\varkappa$ seien mitgeteilt:

$$\begin{aligned} &\text{Wasserstoff} \quad \varkappa = -\ 0{,}5 \cdot 10^{-9}, \\ &\text{Gold} \quad \varkappa = -\ 3 \cdot 10^{-6}, \\ &\text{Wismut} \quad \varkappa = -\ 300 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Ihrer Entstehung zufolge ist die diamagnetische Suszeptibilität unabhängig von der Temperatur.

2. Paramagnetische Stoffe sind solche, bei denen durch die Elektronenströme fertige Momente entstehen, die das Feld in ihre Richtung einzustellen suchen. Die Wärmebewegung wirkt diesem Bestreben entgegen. Deshalb ist die paramagnetische Suszeptibilität temperaturabhängig. Nach dem CURIEschen Gesetz

$$\varkappa = \frac{C}{T}\, s \tag{108}$$

ist sie umgekehrt proportional der absoluten Temperatur T und proportional der Substanzdichte s. Bei Zimmertemperatur ($T \approx 300^\circ$ K) ist auch die para-

magnetische Suszeptibilität klein. Der Größenordnung nach stimmt sie mit der dielektrischen Suszeptibilität der Gase überein. Die folgenden Werte beziehen sich auf Zimmertemperatur:

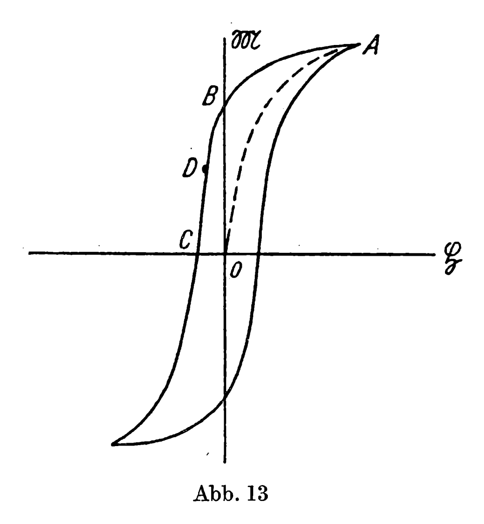


Abb. 13

Sauerstoff	$\varkappa =$	$0{,}14 \cdot 10^{-6}$,
Platin	$\varkappa =$	$29 \cdot 10^{-6}$,
Mangan	$\varkappa =$	$300 \cdot 10^{-6}$.

Für die betrachteten zwei Klassen folgt aus $\mathfrak{M} = \varkappa\,\mathfrak{H}$

$$\mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{M} = \mathfrak{B} = (4\pi\varkappa + 1)\,\mathfrak{H}.$$

Die Konstante $\mu = 4\pi\varkappa + 1$ heißt die Permeabilität des Stoffes. Es bestehen die Gleichungen

$$\mathfrak{B} = \mu\,\mathfrak{H}, \tag{109}$$

$$\varkappa = \frac{\mu - 1}{4\pi},$$

$$\mathfrak{M} = \frac{\mu - 1}{4\pi\mu}\,\mathfrak{B} = \frac{\mu - 1}{4\pi}\,\mathfrak{H} = \frac{1}{4\pi}\,(\mathfrak{B} - \mathfrak{H}). \tag{110}$$

Sie sind das Analogon der Gleichungen (61) und (62). Auch das Brechungsgesetz (52) der Kraftlinien kann einfach übernommen werden:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 : \operatorname{tg}\alpha_2 = \mu_1 : \mu_2. \tag{111}$$

3. Durchaus verschieden von den vorhergehenden Stoffen sind die ferromagnetischen Substanzen: Eisen, Kobalt, Nickel und die HEUSLERschen Manganlegierungen. Ihre auffälligste Eigenschaft besteht darin, für ein gegebenes $\mathfrak{H}$ eine vielfache, oft millionenfach größere Magnetisierung $\mathfrak{M}$ aufzuweisen als gewöhnliche Stoffe. Als zweites Merkmal ist hervorzuheben, daß schon bei verhältnismäßig kleinen Feldstärken der Sättigungszustand eintritt. Ist dieser erreicht, dann führt auch eine ausgiebige Steigerung von $\mathfrak{H}$ nur zu einem ganz geringen Anwachsen der Magnetisierung. Der Sättigungswert $\mathfrak{M}_\infty$ des Eisens beläuft sich auf 1700 GAUSS.

Die ferromagnetischen Stoffe können nach beiläufiger Klassifizierung in weiche und harte eingeteilt werden. Abb. 13 zeigt die Magnetisierungskurve für magnetisch harte Stoffe. Der Anfangszustand des neutralen Eisens, in dem $\mathfrak{M} = \mathfrak{H} = 0$ ist, entspricht dem Punkte O. Die Eisenprobe sei ringförmig, von Drahtwindungen umgeben. Durch Regelung des Stromes, der durch die Windungen geht, kann leicht eine zahlenmäßige Veränderung der Feldstärke $\mathfrak{H}$ erreicht werden. Die magnetischen Kraftlinien sind Kreise, die an der Oberfläche des Eisenringes entlanglaufen. Es handelt sich hier um $\mathfrak{H}_t$, und somit herrscht im Inneren des Eisens dasselbe Feld, welches die Ringspule auch in Abwesenheit des Eisenringes erzeugen würde. Mit der Steigerung von $\mathfrak{H}$ geht ein Anwachsen von $\mathfrak{M}$ einher, das durch die gestrichelte jungfräuliche Kurve

OA dargestellt wird. Im Punkte A wird der Sättigungswert $\mathfrak{M}_\infty$ erreicht. Eine weitere Steigerung von $\mathfrak{H}$ würde nur mehr eine mit der Abszissenachse parallele Gerade ergeben. Das Feld, welches die Sättigung herbeiführt, beträgt bei härtem Material 200–250 Gauß. Wird nun von hier aus der Spulenstrom und damit $\mathfrak{H}$ vermindert, so durchläuft der Punkt ($\mathfrak{H}$, $\mathfrak{M}$) nicht etwa die Kurve OA im entgegengesetzten Sinne, sondern bleibt stets oberhalb. An der Nullstelle von $\mathfrak{H}$ zeigt die Strecke OB den Wert des remanenten Magnetismus an (dieser sinkt erheblich, wenn man den Eisenring durch einen größeren Zwischenraum unterbricht). Es muß das entgegengesetzte Feld OC angewendet werden, um die Magnetisierung ganz zu annullieren. Diese Feldstärke heißt Koerzitivkraft. Die weitere Vergrößerung der Feldstärke in dieser entgegengesetzter Richtung führt zu einem neuen Sättigungspunkt. Von hier aus durchläuft der Konfigurationspunkt ($\mathfrak{H}$, $\mathfrak{M}$) bei entsprechender Änderung des Feldes die rechte Kurve der Hysteresisschleife.

Die Schleife ausgesprochen harter Stoffe (z. B. Stahl) ist breit, Remanenz und Koerzitivkraft sind groß. Bei sehr weichen Stoffen hingegen wird die Schleife schlank und schmiegt sich der jungfräulichen Kurve an. Auch zur Erreichung der Sättigung genügt ein schwächeres Feld. Die Art der Hysteresisschleife hängt in hohem Maße von der vorhergehenden Bearbeitung der Probe ab. Bei der Ummagnetisierung tritt immer Wärme auf, die mit der magnetischen Härte anwächst. Bestandteile wie Armaturen und Transformatorkerne, die einer fortwährenden Ummagnetisierung ausgesetzt sind, werden daher aus weichem Eisen verfertigt.

Von einem permanenten Magneten wird großer remanenter Magnetismus verlangt. Er wird daher aus harter Substanz, aus Stahl, hergestellt. Es wäre jedoch irrtümlich, zu glauben, daß der magnetische Zustand des permanenten Magneten durch den Punkt B der Abbildung dargestellt wird. Der Stab besitzt im Gegensatz zum Ring ein positives und ein negatives Ende. Die Richtung von $\mathfrak{M}$ zeigt vom negativen zum positiven. Von diesem letzteren gehen nun magnetische Kraftlinien aus, und zwar nicht nur nach außen, sondern auch in das Innere, und münden in das negative Ende. Im Stab herrscht daher ein magnetisches Feld, das der Magnetisierung entgegenwirkt. Diesem Zustand entspricht etwa der Punkt D der Abbildung. In diesem Sinne spricht man von der entmagnetisierenden Wirkung der Enden. Wird z. B. eine paramagnetische Kugel in ein homogenes äußeres Feld gebracht, dessen Stärke $\mathfrak{H}_0$ ist, so wird nach Art der Gleichung (70):

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - \frac{4\pi}{3}\mathfrak{M}.$$

Das Glied $-\frac{4\pi}{3}\mathfrak{M}$ zeigt ein zusätzliches inneres Feld an, welches der Polarisation entgegengesetzt gerichtet ist und von den induzierten magnetischen Oberflächendichten herstammt. Wird an den Hufeisenmagnet der Anker angelegt, so wird damit die Ausbildung von Enden verhindert.

Als wichtige Erfahrung muß hervorgehoben werden, daß ferromagnetische Stoffe ihre besonderen Eigenschaften nur unterhalb einer bestimmten Temperatur Θ behalten. Man nennt Θ den CURIEpunkt des Stoffes. Für Eisen beträgt

er 774°C, für Nickel 372°C und für Kobalt 1131°C. Oberhalb ihres CURIE-punktes werden alle ferromagnetischen Stoffe paramagnetisch mit konstanten (temperaturabhängigen) Permeabilitäten. Das CURIEsche Gesetz (108) erleidet jedoch für ferromagnetische Stoffe die Abänderung, daß an die Stelle von T die Differenz $T - \Theta$ tritt:

$$\varkappa = \frac{C\,s}{T - \Theta}. \tag{111a}$$

Diese Relation heißt WEISSsches Gesetz. Man kann die Gleichungen (108) und (111a) einheitlich zusammenfassen durch die Bemerkung, daß der CURIEpunkt der paramagnetischen Stoffe beim absoluten Nullpunkt liegt. WEISS leitete sein Gesetz aus der Annahme ab, daß außer dem erregenden Feld $\mathfrak{H}$ noch ein inneres Feld vom Betrag $N\mathfrak{M}$ vorhanden sei, das proportional der bestehenden Magnetisierung $\mathfrak{M}$ ist. Der Proportionalitätsfaktor N heißt der WEISSsche Faktor. Das innere resultierende Feld wird daher $\mathfrak{H} + N\mathfrak{M}$, und somit das ursprüngliche CURIEsche Gesetz.

$$\mathfrak{M} = \frac{C\,s}{T}(\mathfrak{H} + N\mathfrak{M}).$$

Nach $\mathfrak{M}$ aufgelöst:

$$\mathfrak{M} = \frac{C\,s}{T - C\,s\,N}\,\mathfrak{H}.$$

Der in Gleichung (111a) auftretende CURIEpunkt Θ wird hiernach $C\,s\,N$.

§ 34. Magnetische Energie

Mit unseren bisherigen Hilfsmitteln sind wir nicht imstande, die Energie ferromagnetischer Stoffe zu bestimmen. Wir behalten uns deshalb vor, die Frage an geeigneter Stelle später zu besprechen, und beschränken uns hier auf para- und diamagnetische Stoffe.

Unser Leitgedanke ist derselbe wie im entsprechenden Abschnitt der Elektrostatik. Wir berechnen die Arbeit, die nötig ist, um ein endlich begrenztes magnetisches Feld herzustellen. Dazu denken wir uns zwei sehr lange ideal permanente Magnetstäbe. Die Größe ihrer Stirnflächen sei F. Werden zwei entgegengesetzte Enden unendlich nahe einander gegenübergestellt und dann auf den Abstand d auseinandergezogen, so entsteht zwischen ihnen ein homogenes magnetisches Feld im betrachteten Medium. Die freie Dichte an der positiven Fläche wird $\omega_m' = \frac{\mu}{4\pi}\mathfrak{H}$, an der negativen $-\frac{\mu}{4\pi}\mathfrak{H}$. An dieser Fläche befindet sich daher der freie Magnetismus

$$m' = -\frac{\mu}{4\pi}\mathfrak{H}F.$$

μ bedeutet die Permeabilität des einbettenden Stoffes. Die Feldstärke $\mathfrak{H}$ stammt zur einen Hälfte von der Dichte der positiven Stirnfläche, zur anderen von der negativen her. Die von der positiven Fläche ausgehende Feldstärke wird daher

$$\mathfrak{H}' = \frac{1}{2}\mathfrak{H}.$$

Die zum Auseinanderziehen benötigte Arbeit ist

$$A = -|\mathfrak{H}'|\, m'd = \frac{\mu}{8\pi}\mathfrak{H}^2 Fd = \frac{\mu}{8\pi}\mathfrak{H}^2 \tau,$$

wobei τ das Volumen Fd des entstandenen Feldes bedeutet. Für die Energiedichte folgt somit der Ausdruck

$$U_m = \frac{\mu}{8\pi}\mathfrak{H}^2 \tag{112}$$

und für die Energie eines ausgebreiteten Feldes

$$u_m = \frac{1}{8\pi}\int \mu\,\mathfrak{H}^2 d\tau. \tag{113}$$

Jetzt könnten auch die Betrachtungen des § 29, die auf Grund des Energieausdruckes zur ponderomotorischen Kraftdichte führen, wiederholt werden, allerdings mit der Einschränkung, daß ϱ_m überall verschwindet. Analog der Gleichung (93) ergibt sich

$$\mathfrak{f} = -\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2 \operatorname{grad}\mu.$$

Es ist klar, daß diese Kraftdichte ebenfalls als Divergenz eines Tensors zu erhalten ist. Er entsteht aus dem Maxwellschen Spannungsschema (96) durch die Substitution $\mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{H}$.

STATIONÄRE STRÖME

§ 35. Fundamentalgrößen

Man verbinde zwei auf verschiedene Potentiale aufgeladene Körper mit einem Kupferdraht. Dadurch entsteht ein einziger Leiter, auf dem jetzt das Potential an jeder Stelle gleich wird. Der Ausgleich des Potentials kann nur dadurch zustande kommen, daß entweder positive Elektrizität vom Orte des höheren Potentials zu dem des niederen oder negative Elektrizität in umgekehrter Richtung fließt. Die Bewegung der „Elektrizität" wird Strom genannt. Die Richtung des Stromes wird durch die Bewegungsrichtung der positiven Elektrizität bestimmt. In Metallen entsteht der Strom infolge der Bewegung der freien Elektronen. Die positiven Ionen sind an ihren Ort gebunden. Der Strom ist daher der Bewegung der Elektronen entgegengesetzt gerichtet. In Elektrolyten bewegen sich die positiven und negativen Ionen einander entgegen. Ihre Bewegung entspricht zwei gleichgerichteten Strömen.

Man denke sich im Innern des Leiters senkrecht zum Strome ein Flächenelement df. Die Elektrizitätsmenge de, die während der Zeit dt durch dasselbe hindurchgeht, ist sicherlich df und dt proportional,

$$de = |\mathfrak{i}|\, df dt. \tag{114}$$

Der Proportionalitätsfaktor wurde als Betrag eines Vektors $\mathfrak{j}$ geschrieben. Seine Richtung soll mit der des Stromes zusammenfallen. Aus der Gleichung folgt

$$|\mathfrak{j}| = \frac{de}{dt\,df}.$$

Der Vektor $\mathfrak{j}$ wird Stromdichte genannt. Anschaulich gesprochen, bedeutet er diejenige Elektrizitätsmenge, die durch 1 Quadratzentimeter während einer Sekunde senkrecht hindurchströmt. Ist df nicht senkrecht zum Strom gerichtet, so fließt während der Zeit dt die Menge

$$de = \mathfrak{j}_n\, df\, dt \tag{115}$$

hindurch. Integriert man über einen Querschnitt des Leiters, so wird die hindurchgehende Menge

$$de = dt \int \mathfrak{j}_n\, df.$$

Das Integral $\int \mathfrak{j}_n\, df$ nennt man die Stromstärke I.

I ist numerisch gleich der Elektrizitätsmenge, die während einer Sekunde durch einen Querschnitt des Leiters hindurchfließt.

Es ist wohl möglich, mit elektrostatischen Instrumenten, z. B. mit einer Influenzmaschine, einen dauernden Strom zu unterhalten. Seine Stärke ist jedoch so gering, daß das Studium des Stromes auf diesem Wege überaus schwierig wäre. Galvanische Elemente hingegen stellen uns ausgiebige Ströme zur Verfügung. Tatsächlich begann die Erforschung der Ströme erst nach der Entdeckung der galvanischen Elemente. Von diesen Elementen wird im folgenden noch die Rede sein.

Die Bahn eines sehr kleinen elektrischen Teilchens im Leiter nennt man Stromfaden. Seine Tangente in einem Punkte gibt die dortige Richtung des Vektors $\mathfrak{j}$ an. Die Gesamtheit der Stromfäden, die durch die Punkte einer kleinen geschlossenen Kurve gelegt werden, bilden eine Stromröhre. Faden und Röhre sind nützliche Hilfsbegriffe, die zur straffen Fassung von Bedingungen und Resultaten sehr geeignet sind.

§ 36. Stationärer Strom

Stationär nennt man einen Strom, wenn die Komponenten der Stromdichte $\mathfrak{j}$ nur von den Ortsvariablen ξ, η, ζ, nicht aber von der Zeit t abhängen und wenn durch zwei Querschnitte irgendeiner Stromröhre in gleichen Zeiten gleiche Elektrizitätsmengen hindurchfließen. Die letztere Beschränkung enthält die Annahme, daß wir die Elektrizität als Substanz betrachten, für die das Erhaltungsprinzip gültig ist. Am ersten Querschnitt der in Abb. 14 gezeichneten Stromröhre strömt in der Zeiteinheit die Elektrizitätsmenge

$$-\int_1 \mathfrak{j}_{n_1}\, df$$

hindurch (Minuszeichen, weil n_1 nach außen weist), an dem zweiten Querschnitt

$$\int\limits_2 \mathfrak{j}_{n_2}\, df.$$

Aus der Gleichheit der beiden Ausdrücke folgt

$$\int\limits_1 \mathfrak{j}_{n_1}\, df + \int\limits_2 \mathfrak{j}_{n_2}\, df = 0.$$

Zur linken Seite kann man formell das über die Mantelfläche erstreckte Integral $\int \mathfrak{j}_n\, df$ hinzufügen, da ja dort $\mathfrak{j}_n = 0$ ist. Das Integral lautet dann

$$\int \mathfrak{j}_n\, df = 0.$$

Diese Gleichung besteht für jede geschlossene Fläche, denn durch geeignete Abstufung senkrecht zur Stromrichtung läßt sich der Innenraum immer aus Stromröhren zusammensetzen. Nach dem GAUSSschen Satz folgt

$$\int \operatorname{div} \mathfrak{j}\, d\tau = 0.$$

Diese Forderung kann für jeden beliebigen Raumteil nur bestehen, wenn der Integrand selbst verschwindet:

$$\operatorname{div} \mathfrak{j} = 0. \tag{116}$$

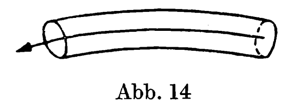


Abb. 14

Darin hat man die charakteristische Gleichung des stationären Stromes zu erblicken. Geht der Strom durch die Grenzfläche von zwei verschiedenen Leitern, dann muß dort die Flächendivergenz verschwinden:

$$(\mathfrak{j}_n)_1 - (\mathfrak{j}_n)_2 = 0 \quad \text{oder} \quad (\mathfrak{j}_n)_1 = (\mathfrak{j}_n)_2. \tag{117}$$

Der Leiter ist zumeist in Luft oder andere Isolatoren eingebettet. In diesen gibt es keinen stationären Strom $(\mathfrak{j}_n)_2 = 0$. Dann ist zugleich auch $(\mathfrak{j}_n)_1 = 0$. Der Strom im isolierten Leiter fließt parallel zur Oberfläche, eine Normalkomponente gibt es nicht. Ist der Strom nicht konstant, so kann er auch gegen die Oberfläche gerichtet sein und deren Aufladung verändern. Beim stationären Strom bleibt jedoch die Flächenladung konstant.

Im stromdurchflossenen flüssigen Leiter läßt sich die Feldstärke $\mathfrak{E}$ in der gleichen Weise ausmessen, wie es in der Elektrostatik besprochen wurde. Der Einheitspol muß natürlich mit einer Isolierhülle versehen werden. Bestimmt man in den Punkten einer geschlossenen Linie die Feldstärke $\mathfrak{E}$ und bildet das Linienintegral $\oint (\mathfrak{E}\, d\mathfrak{s})$, so findet man, daß es in jedem Falle verschwindet. Es gilt also auch in Anwesenheit stationärer Ströme die Gleichung $\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0$ und als weitere Folgerung, daß die elektrische Feldstärke sowohl im Inneren als auch außerhalb des Leiters als negativer Gradient eines eindeutigen Potentials dargestellt werden kann:

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \Phi. \tag{118}$$

In flüssigen Leitern läßt sich das Potential in inneren Punkten experimentell leicht ermitteln. Man benutzt lange nadelartige Sonden mit isolierten Mantelflächen und blanken Spitzen. Das Ende der Sonde wird mit einem empfindlichen Elektrometer verbunden und die Spitze in den Leiter versenkt, bis der fragliche Punkt erreicht ist. Das Elektrometer zeigt den dort bestehenden Potentialwert an. Solche Untersuchungen ergeben, daß im Leiter, der sich zwischen den Polen eines Elementes befindet, das Potential sich von Punkt zu Punkt ändert. Allerdings gibt es auch Punkte gleichen Potentials. Diese Punkte bilden eine Äquipotentialfläche. Bei dünnen Drähten fallen diese Flächen mit den Querschnitten zusammen. Es genügt daher, das Potential an der Oberfläche zu messen, um es auch im Inneren zu kennen.

§ 37. Das Ohmsche Gesetz

G. S. Ohm warf als erster die Frage auf, wovon die Potentialwerte Φ_1 bzw. Φ_2, die in den Punkten P_1 bzw. P_2 eines Drahtes auftreten, eigentlich abhängen. Im Jahre 1821 fand er das „Ohmsche Gesetz". Nach diesem ist die Differenz $\Phi_1 - \Phi_2$ proportional der Stromstärke I, der Drahtlänge $P_1 P_2 = l$ und umgekehrt proportional dem Drahtquerschnitt q:

$$\Phi_1 - \Phi_2 = k \frac{l}{q} I.$$

$\Phi_1 - \Phi_2$ ist positiv, wenn die Punkte $P_1 P_2$ in der Stromrichtung liegen. In der Richtung des Stromes sinkt das Potential stetig. Der Ausdruck $k \frac{l}{q}$ heißt Widerstand des Leiterstückes und wird gewöhnlich mit R bezeichnet:

$$\Phi_1 - \Phi_2 = R I.$$

Die Konstante k entspricht dem Widerstand des Leiterstückes $l = 1$, $q = 1$ und wird spezifischer Widerstand des Leitermaterials genannt. Der reziproke Wert $\sigma = \frac{1}{k}$ ist definitionsgemäß die spezifische Leitfähigkeit des Stoffes. Das Ohmsche Gesetz lautet jetzt

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{q} I. \tag{119}$$

Gesetze, in denen die Konstanten der einzelnen Substanzen vorkommen, heißen in der Elektrodynamik Materialgesetze. Ihre Aussagen besitzen gewöhnlich nur beschränkte Gültigkeit. Gerade das Ohmsche Gesetz aber ist in Metallen und Elektrolyten bis zu hohen Stromstärken mit großer Genauigkeit gültig.

Das Ohmsche Gesetz ist ein sogenanntes Integralgesetz. Es bezieht sich auf endliche Längen und Querschnitte der Leiterstücke. Vorausgesetzt, daß es auch für sehr kleine Dimensionen richtig bleibt, wenden wir es auf ein Röhrenstück der Länge ds, vom Querschnitt df an. Die Potentialdifferenz des Anfangs- und

Endquerschnittes sei — $d\Phi$ ($d\Phi$ bedeutet die Änderung des Potentials und ist hier negativ). Nach Gleichung (119) folgt

$$-d\Phi = \frac{1}{\sigma}\frac{ds}{df} I,$$

wobei aber I jetzt nicht die gesamte Stromstärke des Leiters, sondern nur diejenige der Röhre bedeutet. Ordnet man dem Röhrenelement ds den Vektor $d\mathfrak{s}$ zu, der in die Richtung des Stromes fällt, dann wird

$$I ds = (\mathfrak{j}, d\mathfrak{s})\, df.$$

Man erhält aus der umgeschriebenen Gleichung

$$\mathfrak{i} = -\sigma \frac{d\Phi}{d\mathfrak{s}} = \sigma \mathfrak{E}. \tag{120}$$

Das OHMsche Gesetz in dieser differentiellen Form besagt, daß die Stromdichte mit der elektrischen Feldstärke gleichgerichtet ist, und daß der Quotient beider eine Materialkonstante ergibt, unabhängig von $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{E}$. Mit der Konstanz von $\mathfrak{E}$ ist auch die von $\mathfrak{j}$ verknüpft. Nach dem Gesetz der Dynamik aber sollte eine konstante Kraft eine beschleunigte Bewegung der Ladungsträger und dadurch ein stetes Anwachsen der Stromdichte zur Folge haben. Das OHMsche Gesetz ist nur durch die Annahme zu erklären, daß die Arbeit der Feldstärke nicht in der Steigerung der kinetischen Energie der bewegten Teilchen zum Ausdruck kommt. Dann aber muß der Gegenwert der Arbeit im Auftreten einer anderen Energieform bestehen.

§ 38. JOULEsches Gesetz

Wie die Erfahrung zeigt, ist der stationäre Strom von einer steten Wärmeentwicklung begleitet, die sich in der Erwärmung des Leiters äußert. Die einfachste Vorstellung, die man sich von der Bewegung der Ladungsträger machen kann, ist die, daß Widerstände überwunden werden müssen, wodurch Wärme entsteht. Eine moderne Erklärung gibt die Quantentheorie (SOMMERFELD). Genaue Messungen, die JOULE (1818–1889) durchführte, ergaben den Ausdruck der pro Sekunde auftretenden Wärme

$$Q = I^2 R. \tag{121}$$

In dieser Form des JOULEschen Gesetzes ist Q ebenso wie I und R in Einheiten des absoluten CGS-Systems gegeben. Wir wenden das Gesetz wieder auf ein kurzes Stück einer Stromröhre an. Dann wird $I^2 = \mathfrak{j}^2 df^2$, $R = \frac{ds}{\sigma\, df}$ und daher

$$dQ = \frac{1}{\sigma}\mathfrak{j}^2 df\, ds = \frac{1}{\sigma}\mathfrak{j}^2 d\tau. \tag{122}$$

$d\tau$ ist der Rauminhalt der Röhre. Unter Benutzung der Gleichung (120) ergeben sich noch folgende gleichwertige Ausdrücke für dQ:

$$dQ = \sigma \mathfrak{E}^2 d\tau = (\mathfrak{j}, \mathfrak{E})\, d\tau. \tag{123}$$

§ 39. Stromquellen

Wir denken uns eine elektrische Doppelschicht. An ihrer positiven Seite sei das Potential Φ_1, an der negativen Φ_2. Verbinden wir die beiden Seiten durch einen Leiter, so fließt nach dem OHMschen Gesetz ein Strom der Stärke

$$I = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}.$$

Demzufolge verliert aber die erste Seite fortwährend positive Ladung, die von der negativen Seite aufgenommen wird. Die Potentiale gleichen sich in kurzer Zeit aus, der Strom erlischt. Würde jedoch im Innern der Doppelschicht eine Kraft existieren, die die ankommende positive Ladung von der negativen Seite sofort auf die positive hinüberhebt, wobei sie pro Ladungseinheit die Arbeit $\Phi_1 - \Phi_2$ leistet, dann würde die Potentialdifferenz konstant bleiben, und ein stationärer Strom wäre die Folge. Es war VOLTAs große Entdeckung (1800), daß es solche Kräfte in der Natur wirklich gibt. Wie schon des öfteren erwähnt, bildet sich an der Berührungsfläche verschiedener Körper eine charakteristische Potentialdifferenz aus. Den Grund ihres Zustandekommens zu erforschen ist Sache der atomistischen Theorie. Die phänomenologische Elektrodynamik begnügt sich mit der Feststellung, daß an der Grenzfläche in die Substanzen eingeprägte Kräfte wirksam sind, die zwischen den beiden Körpern eine Ladungsübertragung bewerkstelligen. Die Übertragung währt so lange, bis die innere Feldstärke der entstehenden Doppelschicht der eingeprägten Kraft gleich wird und infolge ihrer entgegengesetzten Richtung die Wirksamkeit der Kraft aufhebt. Die kompensierende Feldstärke ist daher ein Maß der eingeprägten Kraft. Diese soll im weiteren mit $\overline{\mathfrak{E}}$ bezeichnet werden.

Wird aus metallischen Leitern eine geschlossene Kette gebildet, so wird die Summe der Potentialdifferenzen, die an den einzelnen Berührungsflächen entstehen, gleich Null. Aus solchen kann daher eine Stromquelle nicht zusammengestellt werden. Diese Aussage heißt das VOLTAsche Gesetz. Werden dagegen Elektrolyte dazwischengeschaltet, so ist die Summe im allgemeinen nicht Null. Im VOLTAschen Element ist die eingeprägte Kraft besonders an der Berührungsfläche Zink–Schwefelsäure wirksam, wo eine beträchtlich größere Potentialdifferenz entsteht als an der Fläche Kupfer–Schwefelsäure. Das Spiel der eingeprägten Kraft besteht in folgendem: Vom negativen Zinkpol fließen Elektronen durch den Schließungsdraht zum Kupferpol. Dadurch tritt eine Verarmung der Zinkplatte an negativer Elektrizität ein, ihr Potential steigt und nähert sich dem Säurepotential. Sofort aber werden positive Zinkionen der Potentialdifferenz entgegen in die Flüssigkeit getrieben und dadurch ein Sinken des Zinkpotentials veranlaßt. Die Differenz der Potentiale bleibt konstant. Es ist klar, daß die VOLTAschen Kräfte sich ausschließlich auf die Berührungsflächen beschränken. Im Inneren der homogenen Platten treten sie nicht auf.

Es sind aber auch solche eingeprägten $\overline{\mathfrak{E}}$-Kräfte bekannt, die in ausgedehnten räumlichen Gebieten wirksam sind. Betrachten wir z. B. eine Salzsäurelösung, in der Konzentrationsunterschiede vorhanden sind. Der Elektrolyt ist in H^+ und

Cl^--Ionen dissoziiert. Beide diffundieren vom Orte der höheren Konzentration zu jenem der geringeren. Die Diffusionsgeschwindigkeit der H^+-Ionen ist jedoch viel größer als die der Cl^--Ionen, durch deren Bewegung ein entgegengesetzter Strom entsteht. Im Endergebnis fließt daher ein Strom in der Richtung des Konzentrationsgefälles und lädt die Stellen geringerer Konzentration mit positiver Ladung auf. Die Orte höherer Konzentration werden durch das zahlenmäßige Übergewicht der Cl^--Ionen negativ. Dadurch entsteht eine elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$, die die Bewegung der H^+-Ionen verlangsamt und die der Cl^--Ionen beschleunigt, bis die beiden Geschwindigkeiten gleich werden und der Strom aufhört. In diesem Beispiel besteht die eingeprägte Kraft im Zwang der Diffusion. Ihr Maß wird durch die ausgleichende Feldstärke $\mathfrak{E}$ bestimmt.

Ein weiteres Beispiel bildet die thermoelektrische Kraft, die ihr Entstehen Temperaturdifferenzen verdankt. Der Ursprung der eingeprägten Kräfte ist in jedem Fall in der Inhomogenität des Leiters zu suchen, möge diese in der Verschiedenheit der stofflichen Beschaffenheit, der Konzentration oder der Temperatur bestehen. In jenen Teilen des Leiters, wo eingeprägte Kräfte auftreten, sind sie ebenso als Triebkraft der Elektrizitätsbewegung zu betrachten wie die aus dem Potentialgefälle entspringende Feldkraft $\mathfrak{E}$. An solchen Stellen ist daher das OHMsche Gesetz zu schreiben

$$\mathfrak{i} = \sigma(\mathfrak{E} + \overline{\mathfrak{E}}) \tag{124}$$

und das JOULEsche Gesetz

$$dQ = (\mathfrak{j}, \mathfrak{E} + \overline{\mathfrak{E}})\, d\tau. \tag{125}$$

Die Kenntnis der $\overline{\mathfrak{E}}$-Kräfte gehört zu den Daten des Strömungsproblems. Wir werden daher im folgenden $\overline{\mathfrak{E}}(\xi, \eta, \zeta)$ als gegeben betrachten. Ebenso die Leitfähigkeit $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, durch Ergänzung der Grenzbedingungen jene Gleichungen zusammenzustellen, die zur Bestimmung des elektrischen Strömungsfeldes notwendig sind. Kann man die eingeprägte Kraft an der Grenzfläche zweier Leiter vernachlässigen, so folgt aus Gleichung (120)

$$(\mathfrak{j}_t)_1 = \sigma_1(\mathfrak{E}_t)_1, \quad (\mathfrak{j}_t)_2 = \sigma_2(\mathfrak{E}_t)_2$$

und wegen $(\mathfrak{E}_t)_1 = (\mathfrak{E}_t)_2$

$$(\mathfrak{j}_t)_1 : (\mathfrak{j}_t)_2 = \sigma_1 : \sigma_2. \tag{126}$$

Nach Division durch $(\mathfrak{j}_n)_1 = (\mathfrak{j}_n)_2$ erhält man

$$\frac{(\mathfrak{j}_t)_1}{(\mathfrak{j}_n)_1} = \frac{(\mathfrak{j}_t)_2}{(\mathfrak{j}_n)_2} = \sigma_1 : \sigma_2.$$

Die zwei Quotienten geben den Tangens des Einfalls- bzw. Brechungswinkels. Das Brechungsgesetz der Stromfäden lautet daher

$$\operatorname{tg}\alpha_1 : \operatorname{tg}\alpha_2 = \sigma_1 : \sigma_2. \tag{127}$$

Wenn der Strom also von einem schlechteren Leiter in einen besseren übergeht ($\sigma_2 > \sigma_1$), so entfernen sich die Stromfäden vom Einfallslot. Nur bei senkrechtem Einfall erfolgt keine Richtungsänderung.

§ 40. Bestimmung des Potentials

Als gegeben betrachten wir $\overline{\mathfrak{E}}(\xi, \eta, \zeta)$, $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$ und $\varepsilon(\xi, \eta, \zeta)$. Handelt es sich um einzelne homogene Leiter und Isolatoren, so sind die Folgen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ bzw. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ anzugeben. Zu berechnen ist das Potential $\Phi(x, y, z)$, und zwar aus der Differentialgleichung (116). Aus den Gleichungen (124) und (118) erhält man für $\mathfrak{j}$ den Ausdruck

$$\mathfrak{j} = \sigma(-\operatorname{grad}\Phi + \overline{\mathfrak{E}}) \tag{128}$$

und daher als Forderung

$$\operatorname{div}\sigma(\overline{\mathfrak{E}} - \operatorname{grad}\Phi) = 0. \tag{129}$$

Die Gleichung gilt im ganzen Raum. In Isolatoren ist $\sigma = 0$ zu setzen. In einem homogenen Leiterstück mit $\sigma = \text{const}$ und $\overline{\mathfrak{E}} = 0$ nimmt sie folgende Form an:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi \equiv \Delta\Phi = 0. \tag{130}$$

Ein Vergleich mit der entsprechenden Gleichung der Elektrostatik $\Delta\Phi = -4\pi\varrho$ zeigt, daß sich im stationären „Stromraum“ keine elektrische Ladung befindet. In Metallen ist die algebraische Ladungssumme der strömenden Elektronen und ruhenden positiven Ionen gleich Null. Dasselbe kann von den entgegenströmenden Ionen der Elektrolyte gesagt werden.

Neben der Differentialgleichung (130) kommen die Randbedingungen (117) und (126) in Betracht, die an der Grenzfläche zweier Leiter für die normalen und tangentialen Differentialquotienten des Potentials Beschränkungen enthalten. Unverändert bestehen auch die Bedingungen an der Berührungsfläche zweier Dielektrika. Ist die Bestimmung des Potentials gelungen, so kann durch Gradientenbildung die elektrische Feldstärke und aus Gleichung (128) die Stromdichte berechnet werden. Die Grenzbedingungen machen das Problem überaus schwierig. Relativ leicht zu lösen sind Aufgaben, die sich auf einen unendlichen homogenen Leiter beziehen. Dann gibt es keine Ränder und daher keine Randbedingungen. Zu diesem Typ gehört die folgende Aufgabe.

§ 41. Leitende Ebene

Gegeben sei eine unendlich ausgedehnte ebene Leiterplatte. Vom positiven Pol eines galvanischen Elementes führen wir einen Draht heran und setzen seine Spitze im Punkt P_1 auf die Platte. Dasselbe geschieht im Punkt P_2 mit dem Draht, der vom negativen Pol kommt. Dann tritt der Strom in P_1 in die Platte ein, schreitet entlang gewisser Stromlinien weiter und tritt in P_2 wieder aus der Platte aus. Für die Ebene bedeutet P_1 eine Stromquelle, P_2 eine Senke. Uns interessieren nur die in der Ebene verlaufenden Stromlinien; den weiteren Weg des Stromes durch das galvanische Element lassen wir außer Betracht.

Die Platte befinde sich in der XY-Ebene eines Koordinatensystems. Die Punkte $P_1 P_2$ mögen auf die X-Achse fallen, und zwar im Abstand $-a$, $+a$ vom Anfangspunkt. Das Potential hängt jetzt nur von x und y ab. Daher gilt

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0.$$

Bekanntlich wird diese Gleichung durch jede Funktion mit dem Argument

$$(x - A) + i(y - B)$$

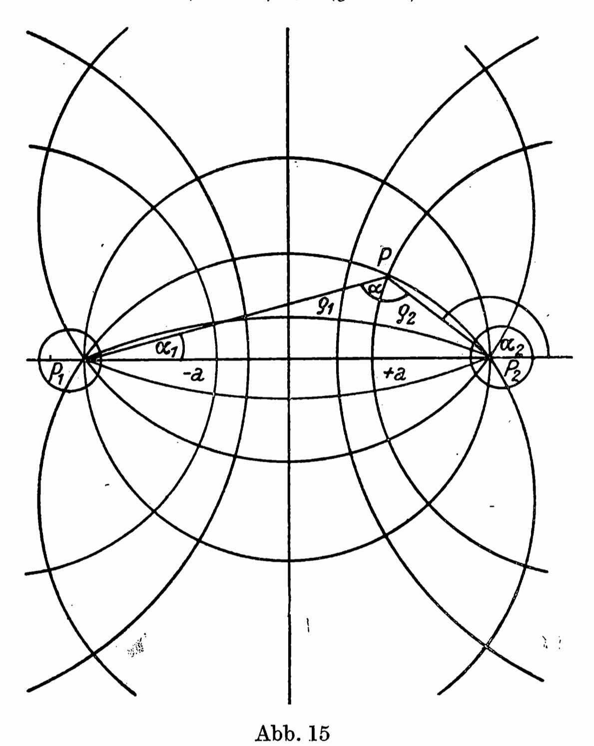


Abb. 15

befriedigt. A und B können als Koordinaten eines Ebenenpunktes aufgefaßt werden. In Polarkoordinaten hat das Argument die Form $\varrho e^{i\alpha}$, wobei ϱ den vom Punkt (A, B) ausgehenden Radiusvektor, α den Winkel (ϱ, x) bedeutet. Als Funktion wählen wir z. B. den Logarithmus des Arguments

$$\ln \varrho e^{i\alpha} = \ln \varrho + i\alpha. \tag{131}$$

Dann ist $\ln \varrho$ schon für sich eine Lösung der Gleichung. Den Aufpunkt P beziehen wir auf das bipolare System $P_1 P_2$ mit den Radiusvektoren ϱ_1, ϱ_2 (Abb. 15). Es sei nun

$$\Phi = k\,(\ln \varrho_2 - \ln \varrho_1). \tag{132}$$

Die Konstante k soll sogleich bestimmt werden. Es ist leicht zu beweisen, daß das gewählte Potential in P_1 wirklich eine Einströmung, in P_2 eine Ausströmung beschreibt. Für die Stromdichte ist zu schreiben

$$\mathfrak{i} = \sigma \mathfrak{E} = - \sigma \operatorname{grad} \Phi .$$

Die während einer Sekunde einströmende Elektrizitätsmenge, d. h. die Stromstärke, wird durch das Integral

$$I = \int \mathfrak{i}_n \, ds$$

gegeben, erstreckt über eine geschlossene Kurve, die P_1 ganz umgibt. Als solche wählen wir einen Kreis um P_1 mit dem sehr kleinen Halbmesser ϱ_1, so daß ϱ_2 an der Peripherie als konstant betrachtet werden kann. Da jetzt $dn = d\varrho_1$ ist, folgt

$$I = -\sigma k \int \left(- \frac{\partial \ln \varrho_1}{\partial \varrho_1} \right) ds .$$

Schreibt man für ds den Ausdruck $\varrho_1 d\alpha_1$, so erhält man

$$I = 2\pi\sigma k , \tag{133}$$

unabhängig von ϱ_1. Der Grenzübergang $\varrho_1 \to 0$ führt dann dazu, daß P_1 wirklich als Quelle zu betrachten ist. k durch $\frac{I}{2\pi\sigma}$ ersetzt, führt zu dem Potentialausdruck

$$\Phi = \frac{I}{2\pi\sigma} \ln \frac{\varrho_2}{\varrho_1} . \tag{134}$$

Auf gleiche Weise errechnet man, daß durch P_2 pro Zeiteinheit der Strom I abfließt. Durch jede geschlossene Linie, die weder P_1 noch P_2 enthält, geht der Gesamtstrom Null. Die einzigen Pole des Potentials liegen in P_1 und P_2. Unsere Behauptung ist eine direkte Folge des CAUCHYschen Satzes.

Die Äquipotentiallinien sind durch $\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = c$ gegeben. In rationaler Form lautet ihre Gleichung:

$$(x - A)^2 + y^2 = A^2 - a^2$$

mit

$$A = \frac{1 + c^2}{1 - c^2} .$$

Es handelt sich um eine Kreislinienschar mit den Zentren auf der X-Achse. A bedeutet den Abstand eines Mittelpunktes vom Anfangspunkt, $A^2 - a^2$ das Quadrat des entsprechenden Halbmessers. Nimmt man daher in einer beliebigen Entfernung A den Mittelpunkt des Kreises an und zieht von hier aus die Tangente an jenen Kreis, der mit dem Halbmesser a um den Anfangspunkt geschlagen wurde, so gibt die Länge der Tangente den Radius des Äquipotentialkreises.

Wir zeichnen um P_1 und P_2 zwei Kreise mit dem Halbmesser b und setzen voraus, daß b sehr klein gegenüber dem Abstand $P_1 P_2 = d$ ist. Diese zwei

Kreise können in guter Näherung als Äquipotentiallinien betrachtet werden, denn am ersten Kreis ist $\varrho_1 = b$, $\varrho_2 \approx d$ und somit das Potential

$$(\Phi)_1 = k \ln \frac{d}{b}, \tag{134'}$$

am zweiten $\varrho_2 = b$, $\varrho_1 \approx d$, daher

$$(\Phi)_2 = k \ln \frac{b}{d} = -(\Phi)_1. \tag{134''}$$

Diese zwei Näherungen sollen später benutzt werden.

Die Gleichungen der Stromlinien werden entsprechend dem Imaginärteil der Gleichung (131)

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \text{const.}$$

Wie die Abbildung zeigt, ist $\alpha_2 - \alpha_1$ der zum Aufpunkt P gehörige Winkel α. Sein konstanter Wert kennzeichnet Kreise, die durch P_1 und P_2 gehen. Ihre Mittelpunkte liegen auf der Y-Achse. Die Schar der Stromlinien besteht aus allen diesen Kreisen.

Allgemein kann jede Lösung einer elektrostatischen Aufgabe in die eines Strömungsproblems umgedeutet werden. Die Grundgleichung ist gemeinsam $\Delta\Phi = 0$. Die Feldstärke wird durch $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\Phi$ gegeben, die Stromdichte durch $\mathfrak{j} = -\sigma \operatorname{grad}\Phi$. Die elektrostatischen Kraftlinien können daher als Strömungslinien aufgefaßt werden, die felderregenden Punkt- und Flächenladungen aber als Quellen und Senken.

§ 42. OHMsches Gesetz in inhomogenen Leitern

Wir denken uns ein inhomogenes Leiterstück als Teil eines geschlossenen Kreises, in dem eingeprägte Kräfte wirksam sind. Das Stück sei einerseits durch Stromfäden, andererseits durch die Äquipotentialflächen $\Phi = \Phi_1$, $\Phi = \Phi_2$ begrenzt (Abb. 16). Nun sondern wir eine Stromröhre mit dem Querschnitt df und dem gerichteten Längenelement $d\mathfrak{s}$ aus. Die Arbeit, die die darin tätigen eingeprägten Kräfte leisten, wenn sie den Einheitspol durch die Röhre bewegen, beträgt offenbar

$$E'_{12} = \int (\overline{\mathfrak{E}}, d\mathfrak{s}).$$

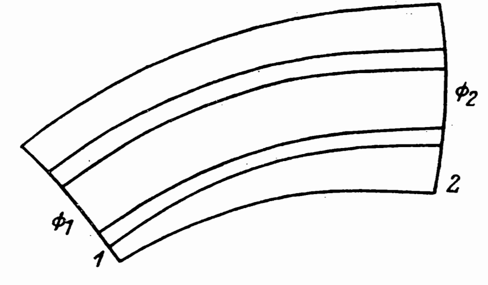


Abb. 16

Dieser Ausdruck wird die elektromotorische Kraft der Röhre genannt. Diejenige einer anderen Röhre sei E''_{12} usw. Auf den Einheitspol wirkt aber außerdem die aus dem Potentialgefälle entstehende Feldstärke $\mathfrak{E}$, die bei der Durchbewegung des Einheitspoles die Arbeit $\Phi_1 - \Phi_2$ leistet. Die in der

ersten Röhre geleistete Gesamtarbeit ist demnach $\Phi_1 - \Phi_2 + E'_{12}$, die in der zweiten geleistete $\Phi_1 - \Phi_2 + E''_1$ usw. In der Praxis interessiert uns jedoch am meisten jener Fall, wo die elektromotorische Kraft jeder Röhre zwischen den Äquipotentialflächen dieselbe ist:

$$E'_{12} = E_{12} = \cdots$$

Dann kann man einfach von der elektromotorischen Kraft des Leiterstückes sprechen.

Mit diesem Falle haben wir es bei den galvanischen Elementen zu tun. Das Leiterstück, von dem die Rede ist, sei hier das Element selbst. Seine beiden Enden sind die Klemmen. Das Potential der positiven sei Φ_+, das der negativen Φ_-. Unendlich viel Stromröhren verbinden im Innern des Elementes die beiden Enden. Aber in allen wirkt dieselbe elektromotorische Kraft. Die eingeprägte Kraft tritt ja nur an den Grenzflächen der Elektroden und des Elektrolyten auf und ist an allen Stellen dieselbe. Das Element hat eine einheitliche elektromotorische Kraft. Zugleich ist klar, daß die Klemmenspannung $\Phi_+ - \Phi_-$ des offenen Elementes gleich der elektromotorischen Kraft ist. Im offenen Element besteht nämlich elektrisches Gleichgewicht. Dann erfordert der Transport des Einheitspoles vom negativen Pol durch das Element hindurch zum positiven keine Arbeit

$$\Phi_- - \Phi_+ + E = 0, \quad E = \Phi_+ - \Phi_-.$$

Wir zerlegen das Leiterstück der Abb. 16 in elementare Stromröhren und setzen voraus, daß in jeder die elektromotorische Kraft den gemeinsamen Wert E_{12} besitzt: An einer beliebigen Stelle der k-ten Röhre lautet das OHMsche Differentialgesetz:

$$\frac{\mathfrak{i}}{\sigma} = -\operatorname{grad}\Phi + \overline{\mathfrak{E}}.$$

Nach Erweiterung der linken Seite mit df multipliziere man beiderseits mit $d\mathfrak{s}_k$ und integriere über die Länge der Röhre

$$\int_1^2 \left(\mathfrak{i}\,df, \frac{d\mathfrak{s}_k}{\sigma\,df}\right) = \int_1^2 \left(-\operatorname{grad}\Phi + \overline{\mathfrak{E}},\ d\mathfrak{s}_k\right).$$

Der linksseitige Integrand ist gleich $I_k dR_k$, wobei I_k die Stromstärke in der k-ten Röhre, dR_k den Widerstand eines Röhrenelementes bedeutet. Daher gilt

$$I_k \int_1^2 dR_k = I_k R_k = \Phi_1 - \Phi_2 + E_{12}$$

und hieraus folgt

$$I_k = \frac{1}{R_k}(\Phi_1 - \Phi_2 + E_{12}).$$

Für die gesamte Stromstärke des Leiterstückes gilt $I = \Sigma I_k$, also

$$I = \sum \frac{1}{R_k}(\Phi_1 - \Phi_2 + E_{12}).$$

Der Ausdruck $\sum \frac{1}{R_k}$ wird der reziproke Widerstand $\frac{1}{R_{12}}$ der parallelgeschalteten Röhren genannt. Mit dieser Bezeichnung wird

$$I R_{12} = \Phi_1 - \Phi_2 + E_{12}. \tag{135}$$

Das ist das OHMsche Gesetz für ein Leiterstück, das durch Äquipotentialflächen begrenzt ist und in dem eine elektromotorische Kraft vorhanden ist. Wir wenden das Gesetz auf den ganzen geschlossenen Leiterkreis an. Dann fallen Anfangs- und Endfläche zusammen, für das eindeutige Φ gilt $\Phi_1 = \Phi_2$. Man erhält

$$I R = E. \tag{135'}$$

R ist der gesamte Widerstand, E die resultierende elektromotorische Kraft des Kreises.

Diese elektromotorische Kraft bedeutet definitionsgemäß jene Arbeit, die bei der einmaligen Herumbewegung des Einheitspols geleistet wird. Die Arbeit zur Herumführung der Elektrizitätsmenge e beläuft sich daher auf $A = E e$. Nach Differentiation folgt

$$\frac{dA}{dt} = E \frac{de}{dt} = E I. \tag{136}$$

Hier bedeutet $\frac{dA}{dt}$ die pro Zeiteinheit geleistete Arbeit, den Stromeffekt. Wird der Strom zu keiner äußeren Arbeitsleistung benutzt, so ist das einzige Äquivalent die pro Zeiteinheit entstehende JOULEsche Wärme.

Wir weisen darauf hin, daß die Stromarbeit bzw. die JOULEsche Wärme ganz auf Kosten der Arbeit der eingeprägten Kräfte entsteht. Nach Gleichung (125) besteht die Gleichung

$$Q = \int (\mathfrak{j}, \mathfrak{E} + \overline{\mathfrak{E}})\, d\tau.$$

Die Integration ist über den gesamten Stromraum zu erstrecken. Das erste Glied des Integranden formen wir um:

$$(\mathfrak{j}, \mathfrak{E}) = -(\mathfrak{j}, \operatorname{grad}\Phi) = -\operatorname{div}\mathfrak{j}\Phi + \Phi \operatorname{div}\mathfrak{j}.$$

Nun ist $\operatorname{div}\mathfrak{j} = 0$, und es verbleibt

$$Q = \int (\mathfrak{j}, \overline{\mathfrak{E}})\, d\tau - \int \Phi \mathfrak{j}_n df.$$

An der Grenze des Leiters ist $\mathfrak{j}_n = 0$. Es folgt

$$Q = \int (\mathfrak{j}, \overline{\mathfrak{E}})\, d\tau.$$

Das ist tatsächlich der Ausdruck für die Arbeit der eingeprägten Kräfte. Im galvanischen Element wird der Strom von chemischen Veränderungen begleitet, im VOLTAschen Element z. B. bildet sich $ZnSO_4$, und die Arbeit der eingeprägten Kräfte, im Endergebnis die JOULEsche Wärme, ist das Äquivalent verschwindender chemischer Energien. Vom energetischen Standpunkt betrachtet, ist der Leitungsstrom nicht allein durch einen elektrodynamischen Vorgang zu beschreiben. Seine erschöpfende Behandlung erfordert die Anwendung thermodynamischer Gesetze.

§ 43. Kirchoffsche Gesetze

Diese Gesetze beziehen sich auf ein Netz linearer Ströme, in das elektromotorische Kräfte eingeschaltet sind. Gegeben sind der Widerstand R_k und die elektromotorische Kraft E_k jedes einzelnen Leiterstückes, das sich zwischen zwei Verzweigungspunkten befindet. Zu bestimmen ist die zugehörige Stromstärke I_k. Nach dem ersten Gesetz verschwindet in jedem Verzweigungspunkt die Summe der Stromstärken:

$$\sum I_k = 0. \tag{137}$$

Dabei werden die Stärken der zufließenden Ströme positiv, die der abfließenden negativ gerechnet. Der Satz entspringt der Forderung der Stationarität. Er schließt die Anhäufung von Ladung in den Verzweigungspunkten aus.

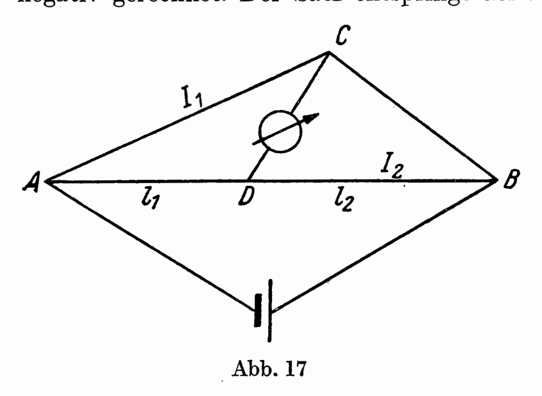


Abb. 17

Der zweite Satz spricht die Gültigkeit der Gleichung (136) für jeden geschlossenen Kreis aus, der aus Netzlinien zusammengesetzt werden kann:

$$\sum I_k R_k = \sum E_k. \tag{138}$$

Wendet man den Satz auf jeden möglichen Kreis an, so erhält man in der Regel mehr Gleichungen, als die Anzahl der Unbekannten beträgt. In einfachen Fällen findet man jedoch leicht Kreise, die zu unabhängigen Gleichungen führen. In der Wheatstoneschen Brücke z. B. (Abb. 17), wo im Zweige ACB der Strom I_1, im Zweige ADB der Strom I_2 fließt, genügt es, das Gesetz auf die Kreise $ACDA$ und $CBDC$ anzuwenden. Benutzt man die Bezeichnungen der Abbildung, so führt der erste Kreis zu der Gleichung

$$x I_1 - k l_1 I_2 = 0$$

und der zweite zu

$$R I_1 - k l_2 I_2 = 0.$$

Nach Elimination des Verhältnisses $\frac{I_1}{I_2}$ erhält man die Unbekannte in der Form

$$x = \frac{l_1}{l_2} R.$$

§ 44. Magnetisches Feld des stationären Stromes

Durch die Bestimmung des elektrischen Feldes wird die Stromdichte $\mathfrak{j}(\xi, \eta, \zeta)$ zu einer bekannten Größe. Sie ist der notwendige und hinreichende Wert zur Berechnung des magnetischen Feldes.

Die OERSTEDsche Entdeckung, daß der elektrische Strom auf die Magnetnadel einwirkt, lautet in unserer gebräuchlichen Terminologie: Der elektrische Strom erregt ein magnetisches Feld. Die Gesetzmäßigkeiten des magnetischen Feldes sind in den Ergebnissen von zwei grundlegenden Experimenten enthalten. Es sei der felderregende Stromkreis gegeben. Eine geschlossene Linie im Raume läßt sich in zwei verschiedenen gegenseitigen Lagen zum Strome angeben: 1. Die Linie umschließt den Leitungsdraht nicht. 2. Sie umschließt den Leiter in der Art eines Kettengliedes. Im ersten Fall lehrt die Erfahrung, daß

$$\oint (\mathfrak{H}, d\mathfrak{s}) = 0, \tag{139}$$

im zweiten, daß

$$\oint (\mathfrak{H}, d\mathfrak{s}) = k\, I \tag{140}$$

wird. I ist die Stärke des Stromes, k ein Proportionalitätsfaktor. Genaue Messungen ergaben für k den Wert $k = \frac{4\pi}{c}$, wobei $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm s^{-1} beträgt. Es ist auffallend, daß dieser Wert mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im Vakuum übereinstimmt. Ausführlich geschrieben, wird jetzt Gleichung (140):

$$\oint (\mathfrak{H}, d\mathfrak{s}) = \frac{4\pi}{c}\, I. \tag{141}$$

Hier ist I in absoluten elektrostatischen Einheiten gegeben. $\frac{I}{c} = I'$ gibt die Maßzahl der Stromstärke in elektromagnetischen Einheiten an. Es ist zu beachten, daß die linke Seite von Gleichung (141) nur dann einen positiven Wert hat, wenn das Linienintegral beim Blick in Richtung des Stromes mit der Uhrzeigerrichtung übereinstimmt. Es folgt daraus, daß die magnetischen Kraftlinien den Strom im Sinne einer Rechtsschraube umschließen (AMPEREsche Richtungsregel).

Die Gültigkeit der Gleichung (141) ist gänzlich unabhängig davon, ob der Stromkreis in das Vakuum oder in irgendeine andere Substanz eingebettet ist.

$\oint (\mathfrak{H}, d\mathfrak{s})$ bedeutet offenbar die Arbeit, die die magnetische Feldstärke leistet, wenn der magnetische Einheitspol einmal entlang der geschlossenen Linie herumbewegt wird. Diese Arbeit wird „magnetomotorische Kraft" des Stromes genannt. Der Erfahrungssatz (141) kann dann auf folgende Art in Worte gefaßt werden: Die magnetomotorische Kraft des Stromes ist das $\frac{4\pi}{c}$-fache der Stromstärke. Ein unendlich langer gerader Leiter, dessen Querschnitt kreisförmig ist, kann aus Symmetriegründen nur kreisförmige Kraftlinien hervorbringen, deren Mittelpunkte in der Achse des Leiters liegen. Die längs einer solchen Kraftlinie mit dem Halbmesser r berechnete magnetomotorische Kraft ist $2\pi r\, |\mathfrak{H}|$. Daher gilt nach Gleichung (141)

$$2\pi r\, |\mathfrak{H}| = \frac{4\pi}{c}\, I, \quad |\mathfrak{H}| = \frac{2}{c}\,\frac{I}{r}.$$

Unsere erste Aufgabe besteht darin, den Integralsatz (141) auf eine differentielle Form zu bringen. Wir wählen im Inneren des Leiters eine Stromröhre

vom Querschnitt df und als geschlossene Kurve, längs welcher integriert werden soll, die Randlinie des Querschnittes, die natürlich nur einen Teil des Stromes umschließt. Für die Stärke des umschlossenen Stromes der Röhre gilt $dI = \mathfrak{i}_n df$. Das Linienintegral wird nach dem STOKESschen Satz $\mathrm{rot}_n \mathfrak{H}\, df$. Da die Richtung von n an einem Orte beliebig sein kann, folgt aus Gleichung (141)

$$\mathrm{rot}\, \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\, \mathfrak{i}. \tag{142}$$

Es ist klar, daß diese Gleichung die Fälle (139) und (141) zusammenfaßt.

Die magnetomotorische Kraft hängt lediglich von der Stromstärke ab. Der Raum kann dabei von den verschiedensten magnetischen Substanzen erfüllt sein. Wohl wird in diesem Falle das Magnetfeld nicht allein von der Gestalt des Leiters abhängen, da ja die Polarisation, die in den anwesenden Körpern auftritt, wesentlich zur Ausbildung des Feldes beiträgt. Das endgültige Feld wird durch den Strom und die Polarisation zugleich bestimmt. Aber für den Teil $\mathfrak{H}'$ des Feldes, der von der Polarisation herrührt, gilt nach der Feststellung der Statik

$$\oint (\mathfrak{H}', d\mathfrak{s}) = 0.$$

Zur magnetomotorischen Kraft liefert $\mathfrak{H}'$ keinen Beitrag.

Wir betrachten das magnetische Feld eines Stromes im Vakuum. Die Kraftlinien sind immer geschlossen. Man kann daher eine geschlossene Kraftröhre aussondern. Ihre Wand wird von Kraftlinien gebildet. Denkt man sich diese Röhre mit irgendeiner homogenen magnetischen Substanz gefüllt, so erleidet weder das innere noch das äußere Feld eine Änderung. Die magnetischen Kraftlinien gehen ja infolge ihres tangentialen Verlaufes ohne Brechung stetig durch die Grenzfläche. Es bilden sich keine freien Flächendichten aus, die das ursprüngliche Feld modifizieren würden. Ist es unsere Absicht, in das Innere einer Substanz das Feld des Stromes ohne Veränderung hineinzuverlegen, so muß dem Stoff die Form einer Kraftröhre gegeben werden. Besteht z. B. der Leiter aus einem dichtbespulten Kreisring, so verlaufen die Kraftlinien im Innern parallel zur kreisförmigen Ringachse. Außen ist kein Feld vorhanden. An diesen Verhältnissen ändert sich nichts, wenn der Ring statt mit Luft mit einem Eisenkern ausgefüllt ist. Die Feldstärke ist leicht zu berechnen. Die Windungszahl sei n, die Stromstärke I, der Halbmesser der Ringachse R. Wird der Einheitspol längs dieser einmal herumbewegt, so wird die geleistete Arbeit, mit anderen Worten die magnetomotorische Kraft, gleich $2\pi R |\mathfrak{H}|$. Da die Achse durch alle Windungen hindurchgeht, ist zu schreiben

$$2\pi R |\mathfrak{H}| = \frac{4\pi}{c} I n, \quad |\mathfrak{H}| = \frac{2I}{cR} n.$$

Ist der Querschnitt des Ringes klein, so kann der erhaltene Ausdruck als guter Mittelwert für den ganzen Innenraum betrachtet werden. Dieser Wert von $\mathfrak{H}$ ist gänzlich unabhängig davon, welche Substanz den Ring ausfüllt. Der Wert von $\mathfrak{B}$ stimmt zwar in Luft mit $|\mathfrak{H}|$ überein, in Eisen kann er mehrere tausendmal größer sein.

§ 45. Das Solenoid

Das Solenoid, eine lange gerade Spule von geringem Querschnitt, spielt im Bereich des Magnetismus dieselbe Rolle wie der Plattenkondensator in der Elektrostatik: Es ist das typische Instrument zur Herstellung eines homogenen Magnetfeldes, dessen Stärke leicht berechnet werden kann. Im inneren Teil des Solenoids verlaufen die Kraftlinien parallel zur Achse, an den Enden macht sich die Streuung bemerkbar. Die magnetomotorische Kraft des Solenoids mit n Windungen ist offenbar $\frac{4\pi}{c} In$. Das ist die Arbeit, welche von der Feldstärke $\mathfrak{H}$ geleistet wird, wenn der magnetische Einheitspol längs einer Linie bewegt wird, die das ganze Innere des Solenoids durchmißt, am Ende nach außen abbiegt und dort zum Anfangspunkt zurückkehrt. Auf diese Weise werden tatsächlich alle Windungen einmal umschlossen. Im Außenraum ist jedoch das Feld infolge der geringen Dichte der Kraftlinien so schwach, daß es in erster Näherung vernachlässigt werden kann. Ist daher die Länge des Solenoids l, die innere Feldstärke $\mathfrak{H}$, so wird die Arbeit $|\mathfrak{H}|\, l$. Es folgt

$$|\mathfrak{H}|\, l = \frac{4\pi}{c} In, \quad |\mathfrak{H}| = \frac{4\pi}{c} \frac{n}{l} I. \tag{143}$$

Die Stromstärke wird gewöhnlich in Ampere gemessen. Diese Einheit ist $3 \cdot 10^9$mal größer als die elektrostatische. Daher besteht zwischen den zwei Maßzahlen der Stromstärke folgender Zusammenhang: $I = 3 \cdot 10^9\, I_{\text{amp}}$. Dann lautet Gleichung (143):

$$|\mathfrak{H}| = \frac{4\pi}{10} \frac{n}{l} I_{\text{amp}}.$$

Das Verhältnis $\frac{n}{l}$ gibt die Windungszahl pro cm an. Ein Solenoid von 1 m Länge mit insgesamt 1000 Windungen gibt bei 1 Ampere Stromstärke die innere Feldstärke $|\mathfrak{H}| = 12{,}56$ Oersted.

In den Eisenkern eines Solenoids kann die äußere Feldstärke nicht restlos hineindringen. Die entstehenden magnetischen Enden drücken durch ihre entmagnetisierende Wirkung die innere Feldstärke herab. Um dies zu verhindern, wird der Eisenstab während der Probe in ein magnetisches Joch gespannt.

§ 46. Berechnung des magnetischen Feldes

Die analytische Bestimmung des magnetischen Feldes setzt die Kenntnis der Stromdichte $\mathfrak{j}(\xi, \eta, \zeta)$ voraus. Der Stromkreis befinde sich in einem weit ausgedehnten Medium mit der konstanten Permeabilität μ. Die zu befriedigenden Feldgleichungen lauten

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \mathfrak{j}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0, \quad \mathfrak{H} = \frac{1}{\mu} \mathfrak{B}. \tag{144}$$

Die Divergenz von $\mathfrak{B}$ wird null, wenn $\mathfrak{B}$ gleich der Rotation eines zu bestimmenden Hilfsvektors $\mathfrak{A}$ ist:

$$\mathfrak{B} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}. \tag{145}$$

Wir denken uns für einen Augenblick $\mathfrak{B}$ als Funktion von ξ, η, ζ gegeben. Befriedigt dann der Vektor $\mathfrak{A}_0$ die Gleichung (145), so ist es klar, daß der Vektor $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \operatorname{grad}\Psi$ die Gleichung ebenfalls befriedigt, weil $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Psi \equiv 0$ ist. Diese Unbestimmtheit soll dadurch beseitigt werden, daß man $\mathfrak{A}$ weiteren Forderungen unterwirft. Es soll $\operatorname{div}\mathfrak{A} = 0$ sein oder, anders geschrieben,

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\Psi = -\operatorname{div}\mathfrak{A}_0.$$

Diese POISSONsche Gleichung, deren gebräuchliche Schreibweise $\Delta\Psi = -\operatorname{div}\mathfrak{A}_0$ ist, kann nach Ψ immer gelöst werden. Es ist daher erlaubt, die Wirbelfreiheit von $\mathfrak{A}$ vorauszusetzen. Die erste Gleichung (144) nimmt jetzt die Form

$$\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{A} = \frac{4\pi}{c}\mathfrak{j}$$

an. Man erinnere sich der Vektorgleichung

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{A} - \Delta\mathfrak{A},$$

deren rechte Seite sich jetzt wegen $\operatorname{div}\mathfrak{A} = 0$ auf das zweite Glied reduziert. Es folgt

$$\Delta\mathfrak{A} = \frac{4\pi\mu}{c}\mathfrak{j}.$$

Wir kennen die Lösung dieser POISSONschen Gleichung

$$\mathfrak{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{c}\int \mathfrak{j}(\xi, \eta, \zeta)\frac{d\tau}{r}. \tag{146}$$

Hier ist zu setzen $d\tau = d\xi d\eta d\zeta$, $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$. xyz sind die Koordinaten des Aufpunktes, in dem man $\mathfrak{A}$ zu kennen wünscht. $\mathfrak{A}$ heißt das Vektorpotential.

Es ist noch zu zeigen, daß die Divergenz von $\mathfrak{A}$ (nach x, y, z berechnet) wirklich verschwindet:

$$\operatorname{div}_P\mathfrak{A} = \frac{\mu}{c}\int\left(\mathfrak{j}, \operatorname{grad}_Q\frac{1}{r}\right)d\tau = -\frac{\mu}{c}\int\left(\mathfrak{j}, \operatorname{grad}_Q\frac{1}{r}\right)d\tau.$$

Benutzt man die Identität

$$\left(\mathfrak{j}, \operatorname{grad}_P\frac{1}{r}\right) = \operatorname{div}_Q\frac{\mathfrak{j}}{r} - \frac{1}{r}\operatorname{div}_Q\mathfrak{j},$$

so fällt in dieser Gleichung das zweite Glied rechts wegen Gleichung (116) weg. Es verbleibt

$$\operatorname{div}_P\mathfrak{A} = -\frac{\mu}{c}\int\operatorname{div}_Q\frac{\mathfrak{j}}{r}\,d\tau = -\frac{\mu}{c}\int\frac{\mathfrak{j}_n}{r}\,df = 0,$$

denn an der Grenzfläche des Leiters verschwindet $\mathfrak{j}_n$.

Nachdem $\mathfrak{A}$ nach Gleichung (146) berechnet ist, erhält man für die Feldstärke

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathfrak{A}. \tag{147}$$

Da $\mathfrak{A}$ die Permeabilität als Faktor enthält, fällt μ aus dem Ausdruck von $\mathfrak{H}$ heraus. Das magnetische Feld ist unabhängig von der Permeabilität μ des homogenen Mediums.

Aus der Formel (146) ist das magnetische Feld eines linearen Leiters, z. B. eines dünnen Drahtes, leicht zu berechnen. Der Vektor des Linienelementes ds, durch die Stromrichtung bestimmt, sei $d\mathfrak{s}$. Seine Komponenten sind $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$. Dann wird $\mathfrak{j}\,d\tau = I\,d\mathfrak{s}$ und

$$\mathfrak{A} = \frac{\mu}{c} I \int \frac{d\mathfrak{s}}{r}, \quad \mathfrak{H} = \frac{I}{c} \int \operatorname{rot} \frac{d\mathfrak{s}}{r}.$$

Also z. B.

$$\mathfrak{H}_x = \frac{I}{c} \int \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{d\xi}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{d\eta}{r} \right) = -\frac{I}{c} \int \frac{(y-\eta)\,d\zeta - (z-\zeta)\,d\eta}{r^3} = \frac{I}{c} \int \frac{[d\mathfrak{s}, \mathfrak{r}]_x}{r^3}.$$

Den Einheitsvektor, der vom Stromelement zum Aufpunkt zeigt, bezeichnen wir mit $\mathfrak{r}_0$. Dann wird

$$\mathfrak{H} = \frac{I}{c} \int \frac{[d\mathfrak{s}, \mathfrak{r}_0]}{r^2}. \tag{148}$$

Dieses Resultat kann – wenn auch nicht notwendigerweise – so gedeutet werden, daß ein Stromelement der Länge ds an der Stelle P des Aufpunktes eine Feldstärke erregt, die senkrecht auf der Ebene von $d\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{r}_0$ steht und den Betrag

$$|\mathfrak{H}| = \frac{I}{c} \frac{ds \sin\vartheta}{r^2}$$

besitzt. ϑ bedeutet den Winkel zwischen $d\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{r}_0$. Dies ist das Biot-Savartsche Gesetz. Es folgt nicht eindeutig aus Gleichung (148); denn man könnte zum Integranden das Differential dV einer eindeutigen Funktion $V(\xi, \eta, \zeta)$ hinzufügen, ohne das Integral selbst zu verändern. Das Gesetz kann auch nicht zum Gegenstand experimenteller Prüfung gemacht werden, da die Wirkung eines Stromelementes, von der Gesamtwirkung der übrigen abgesondert, nicht zu beobachten ist.

§ 47. Ponderomotorische Kraft

Mit Hilfe des Biot-Savartschen Gesetzes kann man die ponderomotorische Kraft, die das magnetische Feld auf ein Stromelement ausübt, berechnen. Die Gegenkraft, mit der das Stromelement auf die Polstärke m einwirkt, folgt sofort aus Gleichung (148)

$$d\mathfrak{K}' = \frac{I}{c} \frac{m}{r^2} [d\mathfrak{s}, \mathfrak{r}_0].$$

Nach dem Prinzip von Aktion und Reaktion übt die Polstärke m infolge ihres magnetischen Feldes eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft auf das Stromelement aus. Den Vorzeichenwechsel ziehen wir dadurch in Betracht, daß wir die Richtung von $\mathfrak{r}_0$ umkehren: $\mathfrak{r}_0$ soll jetzt vom Pol zum Stromelement hinweisen. Dieses erfährt daher die Kraft

$$d\mathfrak{K} = \frac{I}{c}\frac{m}{r^2}[d\mathfrak{s}, \mathfrak{r}_0].$$

Die vom Pol herstammende Feldstärke an der Stelle des Stromelementes ist

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{m}{r^2}\mathfrak{r}_0$$

und der Induktionsvektor

$$\mathfrak{B} = \frac{m}{r^2}\mathfrak{r}_0.$$

Dies eingesetzt, erhält man

$$d\mathfrak{K} = \frac{I}{c}[d\mathfrak{s}, \mathfrak{B}]$$

oder, da $I\,d\mathfrak{s} = \mathfrak{j}\,d\tau$,

$$d\mathfrak{K} = \frac{1}{c}[\mathfrak{j}, \mathfrak{B}]\,d\tau.$$

Daraus folgt der Ausdruck der ponderomotorischen Kraftdichte

$$\mathfrak{f} = \frac{1}{c}[\mathfrak{j}, \mathfrak{B}]. \tag{149}$$

Hier weist nichts mehr auf den speziellen Ursprung von $\mathfrak{B}$ hin. Unter Ausschluß ferromagnetischer Stoffe – wie das aus der ganzen Ableitung klar hervorgeht – messen wir der Relation (149) allgemeine Gültigkeit bei, als Ausdruck jener Kraft, die die Volumeneinheit des von der Stromdichte $\mathfrak{j}$ durchflossenen Leiters seitens des Feldes erfährt. Unter Berücksichtigung früherer Ergebnisse erhält man für die ponderomotorische Kraftdichte folgenden Ausdruck:

$$\mathfrak{f} = \varrho\mathfrak{E} - \frac{1}{8\pi}\mathfrak{E}^2 \operatorname{grad}\varepsilon - \frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2 \operatorname{grad}\mu + \frac{1}{c}[\mathfrak{j}, \mathfrak{B}]. \tag{150}$$

Im Falle zeitlich veränderlicher Felder wird später noch ein Ergänzungsglied dazutreten.

Es ist hervorzuheben, daß Gleichung (149), obgleich sie aus dem Biot-Savartschen Satz abgeleitet wurde, nicht Teil hat an der Unbestimmtheit dieses Gesetzes. Man kann ihren Inhalt sehr wohl einer experimentellen Kontrolle unterwerfen; durch Schleifkontakte oder Quecksilberrinnen ist es möglich, ein kleines Stück des Leiters beweglich zu machen und die darauf wirkende Kraft zu messen. Die Ergebnisse stehen in vollem Einklang mit Gleichung (149).

§ 48. Magnetische Doppelschicht

Das magnetische Feld eines linearen Stromes kann auch durch ein skalares Potential beschrieben werden, allerdings durch kein eindeutiges. Wir legen durch den Leitungsdraht als Grenzlinie eine beliebige Fläche. Jede geschlossene

Kurve, die diese Fläche nicht durchstößt, kann den Leitungsdraht nicht umschlingen. Das Linienintegral $\int (\mathfrak{H}, d\mathfrak{s})$ längs dieser Kurve soll der Erfahrung gemäß verschwinden. Alle geschlossenen Kurven hingegen, die den Draht einmal umschließen, müssen notwendigerweise auch die Fläche einmal durchstoßen. Dann soll also $\oint (\mathfrak{H}, d\mathfrak{s}) = \frac{4\pi}{c} I$ sein. Betrachten wir die Hilfsfläche als homogene magnetische Doppelschicht mit dem Potential Φ_m und der Momentdichte

$$\nu = \frac{I}{c},$$

dann erfüllt das Feld $\mathfrak{H} = -\operatorname{grad}\Phi$ tatsächlich beide Bedingungen. Denn Φ ist eindeutig und stetig längs jeder Linie, die nicht durch die Doppelschicht hindurchgeht. Dann wird

$$\oint (\mathfrak{H}, d\mathfrak{s}) = \oint (\mathfrak{H}_x d\xi + \mathfrak{H}_y d\eta + \mathfrak{H}_z d\zeta) = -\int d\Phi_m = 0.$$

Beim Durchschreiten der Doppelschicht aber erleidet Φ die sprunghafte Änderung $4\pi\nu$. Geht daher die Kurve einmal durch die Doppelschicht, so folgt

$$\oint (\mathfrak{H}, d\mathfrak{s}) = -\oint d\Phi_m = 4\pi\nu.$$

Positiv ist dieser Sprung nur dann, wenn der Durchgang von der negativen Seite zur positiven erfolgt. Das Linienintegral von $\mathfrak{H}$ ist dann gleich $+4\pi\frac{I}{c}$, wenn die Kurve (in der Stromrichtung gesehen), als Rechtsschraube durchlaufen wird. Aus diesen zwei Feststellungen folgt, daß der Strom, von der negativen Seite aus gesehen, im Sinne des Uhrzeigers verläuft.

Die explizite Form des Potentials ist

$$\Phi_m = \frac{I}{c}\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, df.$$

Dieser Ausdruck ist unabhängig von der Permeabilität, wenn unter $\nu = \frac{I}{c}$ das für das Potential maßgebende „freie Moment" verstanden wird.

Zwar erhält man oft rasch ein übersichtliches Bild des Feldes, wenn man die einzelnen Windungen des Leiters als magnetische Doppelschichten betrachtet. Es darf aber nicht vergessen werden, daß die Beschreibung des Feldes durch ein skalares Potential an lineare Leiter gebunden ist. Das Vektorpotential ermöglicht dagegen die Bestimmung des Feldes auch im Innern räumlicher Leiter. Die Verallgemeinerung auf zeitlich veränderliche Felder geht ebenfalls von Gleichung (142) aus.

§ 49. Magnetisches Moment ebener Leiter

Bekanntlich hängt die Wirkung, die ein Magnet über Entfernungen ausübt, die groß im Vergleich zu seiner Länge sind, von seinem magnetischen Moment ab. Auch Ströme besitzen ein magnetisches Moment, das besonders für ebene Leiter

leicht zu berechnen ist. Dann also kann man die vom Draht umrandete Schicht als Stück einer Ebene wählen, jedes Quadratzentimeter hat das Moment $\frac{I}{c}$. Hat das Stück den Flächeninhalt f, so wird das gesamte Moment

$$|\mathfrak{M}| = f\,\frac{I}{c}. \tag{151}$$

Die Rechnung gestaltet sich deshalb so einfach, weil die Momente der einzelnen Flächenelemente gleichgerichtet sind (sie stehen alle senkrecht zur Ebene). Deshalb können sie algebraisch summiert werden.

Wir betrachten als Beispiel ein Drehspulengalvanometer. Die Spule besteht aus n Windungen mit dem Flächeninhalt f. Ihr magnetisches Moment hat den Betrag

$$|\mathfrak{M}| = \frac{fI}{c}\cdot n.$$

Auf dieses übt das homogene Feld des Hufeisenmagnets seine Drehwirkung aus. Schließt das Moment mit der Feldstärke $\mathfrak{H}$ den Winkel ϑ ein, so wird das Drehmoment

$$M = \frac{fI}{c}\,n\,|\mathfrak{H}|\sin\vartheta.$$

In der Ruhelage der Spule ist $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, das Drehmoment am größten. Es sei φ der kleine Winkel, um den die Spule sich aus dieser Lage herausdreht. Dann wird $\sin\vartheta = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \approx 1$ und das rückwirkende Drehmoment des Aufhängefadens $D\varphi$, wobei D einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet. In der Gleichgewichtslage besteht daher die Gleichung

$$D\varphi = \frac{fI}{c}\,n\,|\mathfrak{H}|.$$

Für kleine Ablenkungswinkel ist die Stromstärke diesen proportional.

§ 50. Gerader Kreiszylinder

Der Leiter habe die Form eines unendlich langen geraden Kreiszylinders, der Halbmesser des Querschnittes sei R. Die magnetischen Kraftlinien sind koaxiale Kreise. Wir setzen voraus, daß die Stromdichte $\mathfrak{j}$ an jeder Stelle des Querschnittes dieselbe sei. Dann entspricht einem inneren Kreise vom Halbmesser r die Stromstärke $I' = r^2\pi\,|\mathfrak{j}|$. Die magnetomotorische Kraft längs dieses Kreises wird

$$2\pi r\,|\mathfrak{H}| = \frac{4\pi^2}{c}\,r^2\,|\mathfrak{j}|, \quad \text{und daraus} \quad |\mathfrak{H}| = \frac{2\pi}{c}\,r\,|\mathfrak{j}| = \frac{2}{cR^2}\,Ir. \tag{152}$$

I bedeutet die volle Stromstärke $R^2\pi\,|\mathfrak{j}|$. Die innere Feldstärke ist der Entfernung von der Achse proportional. Für jeden äußeren Kreis gilt dagegen

$$2\pi r\,|\mathfrak{H}| = \frac{4\pi^2}{c}\,R^2\,|\mathfrak{j}|, \quad |\mathfrak{H}| = \frac{2\pi}{c\,r}\,R^2\,|\mathfrak{j}| = \frac{2I}{c}\,\frac{1}{r}. \tag{153}$$

Die äußere Feldstärke ist dem Abstand von der Achse umgekehrt proportional. An der Mantelfläche des Zylinders werden beide Feldstärken gleich.

§ 51. Doppelleitung

Gegeben seien zwei unendlich lange kreiszylindrische Leiter. Beide seien der Z-Achse parallel. Wir setzen voraus, daß an der Oberfläche des ersten Leiters in gleichförmiger Verteilung positive Elektrizität vorhanden sei, am anderen negative. Im Innern der Leiter soll kein Strom fließen. Die Stromstärke I möge dadurch zustande kommen, daß sowohl die positive als auch die negative Flächenladung in der Richtung der positiven Z-Achse mit derselben Geschwindigkeit fortschreitet. In den beiden Drähten fließen dann entgegengesetzt gerichtete gleichstarke Ströme.

Aus unserer Annahme folgt sofort, daß im Inneren der Leiter kein elektrisches Feld vorhanden sein kann. Ein solches würde im Sinne des Ohmschen Gesetzes $\mathfrak{j} = \sigma\,\mathfrak{E}$ eine Stromdichte hervorrufen, was unsere Annahme ausschließt. Aus demselben Grunde muß das äußere Feld auf der Oberfläche senkrecht stehen; denn wäre eine äußere tangentiale Komponente $\mathfrak{E}_t$ vorhanden, würde sie infolge ihres stetigen Überganges auch im Innenraum auftreten. Der Kreisrand eines jeden Querschnittes muß daher eine Äquipotentiallinie sein.

Die elektrischen Kraftlinien, die im einbettenden Medium mit den Konstanten ε, μ verlaufen, liegen scharweise in je einer Ebene $z = \text{const}$. Eine solche Ebene schneidet die zwei Leiter in Kreisen S_1, S_2. Das Potential Φ muß längs dieser Kreise konstant sein. Ein solches Potential ist uns schon bekannt. Wir legen die zwei Leiterachsen in die X, Z-Ebene, in gleichem Abstand vom Anfangspunkt. Dann entsprechen den Kreisen S_1, S_2 zwei Kreise der Abb. 15 und mit diesen zugleich die Punkte P_1, P_2. Nennt man die Radien, die von diesen ausgehen, ϱ_1, ϱ_2, so wird das Potential

$$\Phi = k \cdot \ln \frac{\varrho_2}{\varrho_1}$$

an den Kreisen S_1, S_2 konstant. Wir wollen uns jedoch mit dieser Bestimmung der Punkte P_1, P_2 nicht weiter abgeben und nehmen nunmehr an, der Abstand d der beiden Leiter sei groß gegenüber dem Leiterhalbmesser b. Dann liegen die Punkte P_1, P_2 in den Mittelpunkten der Kreise S_1, S_2. Der Wert des Potentials wird hier gemäß (134′) und (134″)

$$(\Phi)_1 = k \ln \frac{d}{b}, \quad (\Phi)_2 = k \ln \frac{b}{d} = -(\Phi)_1.$$

Der Wert der Konstante k ist leicht zu ermitteln. Wir erinnern an den Ausdruck (39) der Flächendichte:

$$\frac{4\pi\omega}{\varepsilon} = (\mathfrak{E}_n)_1 - (\mathfrak{E}_n)_2.$$

n bedeutet die äußere Normale, daher gilt

$$(\mathfrak{E}_n)_2 = 0, \quad (\mathfrak{E}_n)_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial n}.$$

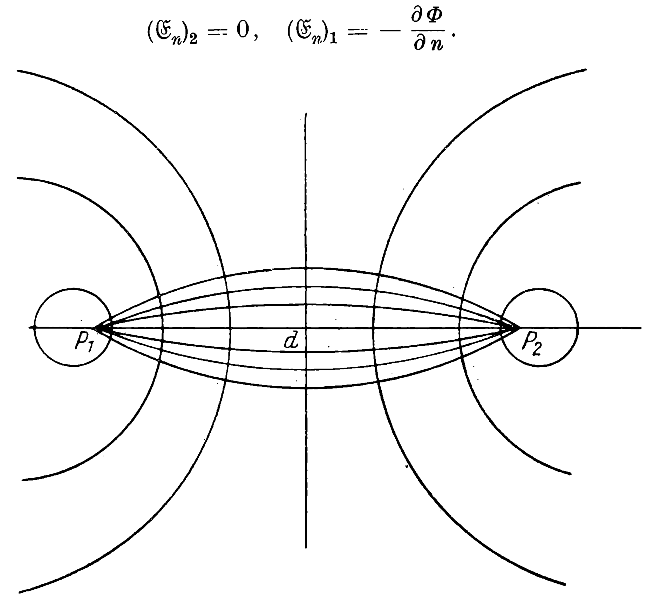


Abb. 18

Am ersten Leiter wird $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial \varrho_1}$, und danach ergibt sich

$$\frac{4\pi\omega}{\varepsilon} = -\left(\frac{\partial}{\partial \varrho_1} k \ln \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)_{\varrho_1 = b} = \frac{k}{b}.$$

Es folgt

$$k = \frac{2}{\varepsilon} \cdot 2\pi b \omega.$$

Multipliziert man die Dichte ω mit dem Zylinderelement $2\pi b dz$, so erhält man die Ladung des Kreisstreifens der Breite dz. $2\pi b\omega$ kann deshalb als Längendichte betrachtet werden, die wir im Weiteren mit e bezeichnen. Dann wird

$$k = \frac{2e}{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \Phi = \frac{2e}{\varepsilon} \ln \frac{\varrho_2}{\varrho_1}. \tag{154}$$

Die Äquipotentiallinien sind nach den vorhergehenden Ausführungen jene Kreise, die in Abb. 18 die Spurlinien der Leiter umgeben. Die elektrischen

Kraftlinien sind als senkrechte Trajektorien jene Kreise, die durch P_1 und P_2 gehen und deren Mittelpunkte auf der Y-Achse liegen.

Die Bestimmung des magnetischen Feldes geschieht mit Hilfe des Vektorpotentials. In unserem Falle ist nur eine Z-Strömung vorhanden und darum nur $\mathfrak{A}_z$ von Null verschieden. Man hat daher

$$\mathfrak{H}_x = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y}, \quad \mathfrak{H}_y = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}, \quad \mathfrak{H}_z = 0.$$

Da ein räumlicher Strom ausgeschlossen wurde, gilt $\Delta \mathfrak{A}_z = 0$. Die Bestimmung von $\mathfrak{A}_z$ müßte eigentlich durch Integration erfolgen. Eine kurze Erwägung enthebt uns jedoch dieser Mühe. Man kann nämlich zeigen, daß $\mathfrak{A}_z$ sich nur um einen konstanten Faktor von Φ unterscheiden kann. Es ist leicht einzusehen, daß die Kreise S_1, S_2 magnetische Kraftlinien sein müssen. Im Inneren des Leiters gibt es keinen Strom, also auch kein magnetisches Feld. Würde die äußere Kraftlinie nicht mit dem Kreisumfang zusammenfallen, so würde das bedeuten, daß das Feld dort eine Normalkomponente besitzt, die sich nicht in das Innere fortsetzt. Die Leiteroberfläche wäre Quelle dieses normalen Kraftflusses. Nun ist aber das Magnetfeld eines Stromes quellenfrei, die Kraftlinien sind geschlossene Linien. Es muß daher der Kreis S_1 Kraftlinie sein. In jedem seiner Punkte besteht dann die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathfrak{H}_y}{\mathfrak{H}_x} = -\frac{\dfrac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}}{\dfrac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y}}$$

oder

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y}\,dy = 0.$$

Das Vektorpotential ist auf dem Kreisumfang konstant, ganz so, wie das Potential Φ. Es befriedigen also Φ und $\mathfrak{A}_z$ die LAPLACEsche Gleichung mit derselben Randbedingung und können sich mithin nur durch die Größe des konstanten Randwertes unterscheiden. Es folgt

$$\mathfrak{A}_z = K \ln \frac{\varrho_2}{\varrho_1}.$$

Wir wollen K durch die Stromstärke I ausdrücken und berechnen dazu die magnetomotorische Kraft längs S_1. Dort verlaufen die Kraftlinien in der Drehrichtung X, Y. Die Komponenten von $d\mathfrak{s}$ sind

$$d\xi = -ds\cos(n, y), \quad d\eta = ds\cos(nx).$$

Weiter folgt

$$(\mathfrak{H}, d\mathfrak{s}) = \mathfrak{H}_x\,d\xi + \mathfrak{H}_y\,d\eta$$
$$= -\frac{1}{\mu}\,ds\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial \xi}\cos(nx) + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial \eta}\cos(ny)\right) = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial n}\,ds$$

und

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial n} = K\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\ln\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = -\frac{K}{b}.$$

Schließlich ergibt sich

$$\frac{4\pi I}{c} = \frac{2\pi b}{\mu}\frac{K}{b}, \quad K = \frac{2\mu}{c} I, \quad \mathfrak{A}_z = \frac{2\mu I}{c} \ln\frac{\varrho_2}{\varrho_1}. \tag{155}$$

Wie oben gezeigt, werden die magnetischen Kraftlinien durch die Schar $\mathfrak{A}_z = \text{const}$ gegeben, die identisch ist mit der Schar $\Phi = \text{const}$. In Abb. 18 werden daher die magnetischen Linien durch die exzentrischen Kreise dargestellt, die die Leiter umschließen. Elektrische und magnetische Feldstärke stehen senkrecht aufeinander.

Nachdem die Aufgabe gelöst ist, sollen die Ergebnisse in symmetrischer Form zusammengestellt werden. Es sei

$$F(x, y) = 2 \ln\frac{\varrho_2}{\varrho_1}. \tag{156}$$

Dann schreiben wir kurz

$$\Phi = \frac{e}{\varepsilon} F(x, y). \tag{157}$$

Außerdem führen wir die Funktion

$$\Psi = \frac{I}{c} F(x, y) \tag{158}$$

ein. Die Bestimmungsgleichungen der Feldstärken lauten jetzt

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \mathfrak{E}_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \tag{159}$$

$$\mathfrak{H}_y = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \mathfrak{H}_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \tag{160}$$

Sowohl Φ als auch Ψ befriedigen die LAPLACE-Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0. \tag{161}$$

Dadurch, daß räumliche Ströme ausgeschlossen und nur flächenhafte zugelassen wurden, erscheint die Aufgabe etwas künstlich. Aber gerade diese Einschränkung ermöglicht es, uns in einem späteren Abschnitt auf die Resultate berufen zu können.

ALLGEMEINE STRÖME

§ 52. Stromarten

Bisher wurden die in Metallen und Elektrolyten fließenden Konduktionsströme behandelt. Die Frage, wie die Bewegung der Elektrizität im Leiter vor sich geht, blieb unberührt. Wir begnügten uns mit den Aussagen des phänomenologischen OHMschen Gesetzes. Unsere Kenntnisse wurden durch ROWLAND bereichert, der im Jahre 1876 nachwies, daß mechanisch fortbewegte

statische Ladungen ein gleiches magnetisches Feld erzeugen wie konduktive Ströme. Eine vergoldete, hoch aufgeladene Ebonitscheibe wurde mit großer Geschwindigkeit um ihre Achse gedreht. Das entstandene magnetische Feld konnte mit einem empfindlichen Magnetometer ausgemessen werden. Solche Ströme werden konvektiv genannt.

Unsere erste Frage betrifft die Dichte $\mathfrak{j}$ des konvektiven Stromes. Es bewege sich eine räumlich verteilte Ladung der Dichte ϱ mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$. Senkrecht zu dieser denken wir uns ein Flächenelement df. Die Ladung, die während der Zeit dt durch df hindurchtritt, erfüllt einen Zylinder mit der Grundfläche df und der Höhe $|\mathfrak{v}|\,dt$. Im Volumen $d\tau = |\mathfrak{v}|\,df\,dt$ befindet sich die Elektrizitätsmenge

$$de = \varrho d\tau = \varrho\,|\mathfrak{v}|\,df\,dt.$$

Nach der Definition der Stromdichte wird

$$|\mathfrak{j}| = \frac{de}{df\,dt} = \varrho\,|\mathfrak{v}|.$$

Da aber auch die Richtung von $\mathfrak{j}$ mit der von $\mathfrak{v}$ übereinstimmt, folgt die Vektorgleichung

$$\mathfrak{j} = \varrho \cdot \mathfrak{v}. \tag{162}$$

Zur Entstehung eines Konvektivstromes ist es nicht notwendig, daß die bewegte Elektrizität eine „wahre“ sei. Auch bewegte „freie“ Ladungen erzeugen ein magnetisches Feld. Dies wurde von Röntgen und Eichenwald nachgewiesen. Wie wir bereits wissen, treten an der Grenzfläche eines polarisierten Dielektrikums freie Ladungen mit der Flächendichte $\omega' = -\mathfrak{P}_n$ auf. Durch die Bewegung des Dielektrikums entsteht nun wirklich ein Strom. Zum Nachweis benutzten die genannten Forscher eine dielektrische Scheibe, die im polarisierenden Felde eines ruhenden Kondensators einer schnellen Drehung unterworfen wurde. Die Messung der magnetischen Feldstärke entsprach den Berechnungen.

Vom Konvektivstrom begrifflich zu unterscheiden ist der Polarisationsstrom. Ändert sich die Polarisation eines ruhenden Dielektrikums, so ist damit eine Bewegung der getrennten Molekülladungen verbunden, die zu einem Strom Veranlassung gibt. Die Dichte $\mathfrak{j}$ dieses Polarisationsstromes ist leicht zu berechnen. $\mathfrak{P} d\tau$ bedeutet das Dipolmoment des Volumenelementes $d\tau$. Für $d\tau$ wählen wir ein kleines rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Kante dl in die Richtung von $\mathfrak{P}$ fällt. Die darauf senkrechte Fläche sei df, so daß $d\tau = df\,dl$. Durch die Polarisation entsteht auf der einen Grundfläche die Ladung $-e$, auf der gegenüberliegenden die Ladung $+e$. Man hat daher für den Betrag des Dipolmomentes

$$|\mathfrak{P}|\,df\,dl = e\,dl, \quad |\mathfrak{P}| = \frac{e}{df}.$$

Die Ladung e ist natürlich unendlich klein. Beiderseits nach der Zeit differenziert, folgt die Gleichung

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}\right| = \frac{de}{df\,dt} = |\mathfrak{j}|.$$

Nun ändert sich aber der Vektor $\mathfrak{P}$ durch eine zusätzliche Trennungsbewegung der Molekülelektrizitäten, und infolgedessen fällt $d\,\mathfrak{P}$ in die Richtung des Bewegungsstromes. So gelangt man zur Vektorgleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} = \mathfrak{j}. \tag{163}$$

Die Dichte des Polarisationsstromes ist gleich der zeitlichen Ableitung der Polarisation. Auch dieses Ergebnis wurde experimentell geprüft. Wie oben rotiert eine Ebonitscheibe zwischen den zwei Belegungen eines Kondensators, nur sind beide in der Mittellinie geschlitzt. Die zwei nebeneinander stehenden Teilkondensatoren, die dadurch entstehen, werden entgegengesetzt aufgeladen. Der Teil der Scheibe, der eben am Schlitz vorbeigeht, gelangt in ein umgekehrt gerichtetes Feld und wird umpolarisiert. Der entstehende Polarisationsstrom kann magnetometrisch gemessen werden.

Ihrem Wesen nach bestehen alle hier genannten Ströme in der Bewegung geladener Teilchen, haben daher konvektiven Charakter. Ein einziger Strom ist uns bekannt, der ganz anderer Natur ist. Es handelt sich um den MAXWELLschen Verschiebungsstrom. Seine Einführung in die Elektrodynamik ist wohl das größte Werk MAXWELLS (1831–1879).

§ 53. Verschiebungsstrom

Wir begrenzen ein Raumstück τ und nehmen an, daß sich in demselben in stetiger räumlicher Verteilung ϱ die Ladung e befinde: $e = \int \varrho\, d\tau$. In welcher Weise kann sich diese Ladung zeitlich ändern? Schon in der Statik wurde darauf hingewiesen, daß eine elektrische Ladung weder erzeugt, noch vernichtet werden könne. Wir betrachten die Elektrizität als eine Substanz, für die das Erhaltungsprinzip gültig ist. Es kann sich daher die Ladung e nur dadurch ändern, daß an der Grenzfläche f des Raumes τ Ein- oder Ausströmung erfolgt. Die auf eine Sekunde entfallende Zunahme der Ladung ist

$$\frac{de}{dt} = \int \frac{\partial \varrho}{\partial t}\, d\tau$$

und die pro Zeiteinheit einströmende Menge $-\int \mathfrak{j}_n\, df$ (negatives Vorzeichen, weil n nach auswärts weist). Daher gilt

$$\int \frac{\partial \varrho}{\partial t}\, d\tau = -\int \mathfrak{j}_n\, df = -\int \operatorname{div} \mathfrak{j}\, d\tau$$

oder

$$\int \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{j}\right) d\tau = 0.$$

Für jeden beliebigen Raumteil kann die Gleichung nur bestehen, wenn der Integrand verschwindet:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{j} = 0. \tag{164}$$

Dies ist die bekannte Kontinuitätsgleichung. Der Ableitung nach umfaßt das Zeichen $\mathfrak{j}$ die Dichte sowohl des Konduktions- als auch des Konvektionsstromes.

Zufolge der Kontinuitätsgleichung ist es klar, daß die Grundgleichung stationärer Ströme, $\frac{4\pi}{c}\,\mathfrak{j} = \operatorname{rot}\mathfrak{H}$, für veränderliche Ströme nicht aufrechterhalten werden kann, denn die Divergenz der rechten Seite verschwindet identisch, links hingegen wird $\operatorname{div}\mathfrak{j} = -\frac{\partial\varrho}{\partial t}$. Der Weg der Verallgemeinerung ist ganz und gar nicht eindeutig. MAXWELL entschloß sich, die rechte Seite bestehen zu lassen und nur die linke durch ein Zusatzglied so umzuändern, daß auch ihre Divergenz verschwindet. Es handelt sich also darum, den Ausdruck $-\frac{\partial\varrho}{\partial t}$ zu kompensieren. Da nun

$$\operatorname{div}\mathfrak{D} = 4\pi\varrho \tag{165}$$

ist, genügt es, das Glied

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t}$$

zu $\mathfrak{j}$ hinzuzufügen. Der Vektor

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} \tag{166}$$

wird dann als Folge der Gleichung (165) und der Kontinuitätsgleichung (164) tatsächlich divergenzfrei. Das neue Gesetz lautet

$$\frac{4\pi}{c}\,\mathfrak{i} \equiv \frac{4\pi}{c}\,\mathfrak{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathfrak{H}. \tag{167}$$

Im stationären Falle gelangt man zu Gleichung (142) zurück.

Der Ausdruck $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t}$ bedeutet eine vollkommen neue Art der Stromdichte. Um ihren Sinn klarzulegen, schreiben wir gemäß Gleichung (61) $\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{P}$ und erhalten

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial t}.$$

In $\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial t}$ erkennen wir die Dichte des Polarisationsstromes, der nur in räumlichen Medien auftreten kann; denn im Vakuum gibt es keine Polarisation. Das Auftreten des Gliedes $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}$ jedoch ist nicht an das Vorhandensein von Materie gebunden; denn die elektrische Feldstärke kann sich auch im Vakuum verändern. Dieser Vakuumstrom kann keinesfalls aus der Bewegung geladener Teilchen hervorgehen. Zwar sah MAXWELL keine Möglichkeit einer anderen Deutung und setzte voraus, daß auch im Vakuum positive und negative Teilchen in quasielastischer Bindung vorhanden seien, deren Trennung eine Vakuumpolarisation hervorruft. Auf Grund der vermeintlichen Verschiebung dieser Teilchen nannte er den entsprechenden Strom Verschiebungsstrom. Diese Vorstellungen sind heute als veraltet zu betrachten (die moderne Frage der Vakuumpolarisation, die mit der DIRACschen Löchertheorie zusammen-

hängt, steht in keinerlei Beziehung zum MAXWELLschen Verschiebungsstrom). Gegenwärtig entsagen wir der modellmäßigen Deutung des Verschiebungsstromes und begnügen uns mit der Tatsache, daß die zeitliche Änderung der Feldstärke – anschaulich gesprochen die zeitliche Änderung der Kraftliniendichte – einer Stromdichte äquivalent sei. Die elektromagnetischen Wellen erheben die Richtigkeit dieser Anschauung über jeden Zweifel.

Die Quellenfreiheit stationärer Ströme, die in der Gleichung $\operatorname{div} \mathfrak{j} = 0$ zum Ausdruck kommt, besagt mit anderen Worten, daß es nur geschlossene konstante Ströme gibt. Dasselbe gilt jetzt infolge $\operatorname{div} \mathfrak{i} = 0$ auch für veränderliche Ströme, vorausgesetzt, daß man den Verschiebungsstrom gleichfalls in Rechnung stellt. Verbindet man z. B. die Pole einer Batterie mit den Belegungen eines Kondensators, so kommt ein Ladungsstrom in Gang, der so lange währt, bis die Potentialdifferenz der Belegungen der elektromotorischen Kraft der Batterie gleich wird. Im Dielektrikum zwischen den Platten fließt natürlich kein Leitungsstrom, aber mit Zunahme der Belegungsladungen steigt auch die Zahl der durch das Dielektrikum hindurchgehenden Induktionslinien. Der entstehende Verschiebungsstrom ist die direkte Fortsetzung des Leitungsstromes, und beide haben dieselbe Stärke. Dies ist leicht einzusehen. Es sei e die Ladung der positiven Belegung in einem Zwischenzustand. Der Ausdruck für die Stärke des Leitungsstromes ist dann

$$I = \frac{de}{dt}.$$

Es sei ω die Ladungsdichte, F der Flächeninhalt der Belegung. Dann berechnet sich der Verschiebungsvektor aus der Gleichung

$$|\mathfrak{D}| = \mathfrak{D}_n = 4\pi\omega = 4\pi\frac{e}{F}.$$

Daraus folgt die Stärke I' des Verschiebungsstromes:

$$I' = F\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{de}{dt} = I.$$

§ 54. Die erste MAXWELLsche Gleichungsgruppe

Es handelt sich um nichts anderes, als um die systematische Zusammenstellung der bisherigen Resultate. Die Gleichung (167) zusammen mit Gleichung (165) gibt vier Komponentengleichungen, die man erste (oft auch zweite) Vierergruppe der MAXWELLschen Feldgleichungen nennt.

Man mißt diesen Gleichungen unbeschränkte Gültigkeit bei und ist überzeugt, daß sie ein exaktes Naturgesetz zum Ausdruck bringen. Allerdings gehen die heutigen Wünsche weiter. Man verwirft die freie Wahl von ϱ und $\mathfrak{j}$ und möchte diese Größen gern durch Daten des Elektrons ersetzen. Sogar der Spin und die Bewegungsgleichungen des Elektrons sollten sich aus einer verallgemeinerten Theorie ergeben. So entstand die Elektrodynamik von BORN-INFELD, BOPP, DIRAC usw.

Der ungefähre Inhalt der ersten Gruppe kann folgendermaßen in Worte gefaßt werden: Jeder elektrische Strom erregt ein magnetisches Kraftfeld, dessen Linien den Strom in Form geschlossener Kurven umschließen. In der Richtung des Stromes betrachtet, stimmt ihr Umlaufsinn mit der Uhrzeigerdrehung überein.

Es war FARADAYs Überzeugung, daß zwischen Elektrizität und Magnetismus ein dualer Zusammenhang bestehen müsse. Nach jahrelangen Versuchen fand er die Verknüpfung in der Form seines Induktionsgesetzes. Es wird uns dazu verhelfen, der ersten MAXWELLschen Gruppe eine zweite duale an die Seite zu stellen.

§ 55. Induzierte Ströme

FARADAY machte im Jahre 1831 die Entdeckung, daß in einer geschlossenen Drahtwindung ein Strom entsteht, wenn in seiner Nähe ein Magnet bewegt wird. Es muß daher im Draht eine elektrische Feldkraft $\mathfrak{E}$ erregt werden, die die Elektrizität dort in Bewegung setzt. Die Arbeit $\int (\mathfrak{E}, d\mathfrak{s})$, die bei einer einmaligen Herumbewegung des Einheitspoles geleistet wird, heißt bekanntlich die elektromotorische Kraft. Ihr Wert ist leicht zu bestimmen. Der Draht wird an einer Stelle unterbrochen und die zwei Enden werden an ein ballistisches Galvanometer geschaltet. Der Ausschlag zeigt, daß das Linienintegral nicht verschwindet. Das bedeutet einen wesentlichen Unterschied gegenüber der Statik und dem Felde konstanter Ströme, wo es immer Null war. Im allgemeinen Fall ist somit $\operatorname{rot}\mathfrak{E} \neq 0$. $\mathfrak{E}$ ist nicht aus einem Potential ableitbar.

Wir legen durch den Draht eine beliebige Fläche f. Der Induktionsfluß F des Magneten, der durch die drahtberandete Fläche hindurchgeht, hat den Betrag

$$F = \int \mathfrak{B}_n \, df.$$

Durch die Bewegung des Magnets verändert sich dieser Fluß. Seine Zunahme pro Sekunde beträgt

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{d}{dt} \int \mathfrak{B}_n \, df.$$

Wie das Experiment zeigt, fällt der Sinn der induzierten elektromotorischen Kraft – in Richtung der Induktionslinien blickend – mit der Uhrzeigerdrehung dann zusammen, wenn der Induktionsfluß durch die Fläche abnimmt. Erfahrungsgemäß wird die elektromotorische Kraft durch folgenden Ausdruck wiedergegeben:

$$\oint (\mathfrak{E}, d\mathfrak{s}) = -\frac{1}{c} \frac{dF}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathfrak{B}_n \, df. \tag{168}$$

Diese Formel enthält alle Erfahrungen FARADAYs. Die Entdeckung der Induktion war besonders für die Technik von ungeheuerer Tragweite. Als Quellen der elektromotorischen Kraft waren bis dahin nur die eingeprägten Kräfte der Materie bekannt. Die Induktion ermöglicht es, durch mechanisch bewirkte

Änderung des Induktionsflusses in den Generatoren beliebige elektromotorische Kräfte zu erzeugen.

Gleichung (168) hat die Form eines Integralsatzes. Unser Bestreben geht dahin, daraus ein Differentialgesetz abzuleiten. Wir betrachten die Drahtwindung als ruhend. Dann kann die Zeitdifferentiation unter dem Integralzeichen durchgeführt werden. Schreibt man noch die linke Seite im Sinne des STOKESschen Satzes um, so geht Gleichung (168) in

$$\int \mathrm{rot}_n \mathfrak{E}\, df = -\frac{1}{c}\int \frac{\partial \mathfrak{B}_n}{\partial t}\, df$$

über. Da der Leitungsdraht und mit ihm f beliebig geformt sein können, folgt

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}. \tag{169}$$

Die MAXWELLsche Theorie setzt voraus, daß die induzierte Feldstärke im Vakuum oder in materiellen Medien auch dann auftritt, wenn kein Leiter zugegen ist, in dem ein Strom erzeugt werden kann. Wir müssen uns daher folgendes Bild vor Augen halten: Die Änderung von $\mathfrak{B}$ induziert ein den ganzen Raum erfüllendes elektrisches Kraftfeld. Dieses Feld ist quellenfrei, seine Linien sind geschlossene Kurven. Im zufällig anwesenden Leiter wird durch das Feld ein Strom in Gang gebracht.

Gleichung (169) ist offenbar dual zu Gleichung (167). Dies wird sofort klar, wenn man den Ausdruck der magnetischen Stromdichte $\mathfrak{i}_m$ bildet. Wahren Magnetismus gibt es nicht, somit auch keinen magnetischen Leitungs- oder Konvektionsstrom. Wohl aber entspricht der Dichte $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$ des elektrischen Verschiebungsstromes der Ausdruck $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$, den man somit als Dichte des magnetischen Verschiebungsstromes betrachten muß. Es folgt $\mathfrak{i}_m = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$. Gleichung (169) kann in Analogie zu Gleichung (167) geschrieben werden: $\frac{4\pi}{c}\mathfrak{i}_m = -\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}$. Entsprechend

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{M},$$

setzt sich auch der magnetische Strom aus zwei Teilen zusammen. $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$ gibt die Dichte des Vakuumstromes an, der immer auftritt, wenn die magnetische Feldstärke sich ändert. $\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}$ ist offensichtlich der magnetische Polarisationsstrom.

Nach alledem lautet die ungefähre Aussage der Gleichung (169) folgendermaßen: Ein magnetischer Strom erregt um sich ein elektrisches Kraftfeld, die Kraftlinien sind geschlossen und verlaufen entgegen der Uhrzeigerdrehung, wenn sie in der Stromrichtung betrachtet werden. Daher ergibt sich das negative Vorzeichen in Gleichung (169).

Die zu Gleichung (165) duale Gleichung ist selbstverständlich $\mathrm{div}\,\mathfrak{B} = 0$. In dieser sowie in Gleichung (169) erblicken wir die zweite MAXWELLsche Gleichungsgruppe.

§ 56. Die MAXWELLschen Feldgleichungen

Jetzt schreiben wir die zwei MAXWELLschen Gruppen, die als elektrodynamische Grundgleichungen ruhender Körper zu betrachten sind, ordnungsgemäß nebeneinander.

$$\begin{aligned} &\text{I.}\quad \frac{4\pi}{c}\mathfrak{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathfrak{H}, &&\text{II.}\quad \operatorname{div}\mathfrak{D} = 4\pi\varrho, \\ &\text{III.}\quad \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\mathfrak{E}, &&\text{IV.}\quad \operatorname{div}\mathfrak{B} = 0. \end{aligned} \tag{170}$$

Wir betrachten ϱ und $\mathfrak{j}$ als gegebene Raumzeitfunktionen. Die Aufgabe besteht in der Bestimmung des elektromagnetischen Feldes. Die Zahl der unbekannten Funktionen beträgt 12. Es sind dies die drei Komponenten der Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$. Zur Berechnung stehen uns jedoch nur 8 Gleichungen zur Verfügung. Offenbar benötigen wir weitere Beziehungen. Für isotrope, nicht ferromagnetische Körper stehen sie uns in den Materialgleichungen

$$\text{V.}\quad \mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}, \qquad \text{VI.}\quad \mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$$

zur Verfügung. Damit sinkt die Zahl der unbekannten Funktionen auf sechs. Es hat den Anschein, als wären die sechs Unbekannten durch acht Gleichungen überbestimmt. Es läßt sich aber leicht zeigen, daß zwischen diesen acht Gleichungen zwei Relationen bestehen, so daß es sich eigentlich nur um sechs unabhängige Gleichungen handelt. Das soll kurz bewiesen werden. Bildet man in Gleichung (170. I) beiderseits die Divergenz und benutzt Gleichung (170. II), so folgt die Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathfrak{j} = 0$. Die Funktionen ϱ und $\mathfrak{j}$ dürfen daher nicht beliebig gegeben werden, sondern so, daß sie die Kontinuitätsgleichung identisch befriedigen. Man darf also in der Divergenzform der Gleichung (170. I) statt $\operatorname{div}\mathfrak{j}$ einfach $-\frac{\partial \varrho}{\partial t}$ schreiben und erhält

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\mathfrak{D} - 4\pi\varrho) = 0.$$

Es folgt, daß der Klammerausdruck eine zeitliche Konstante ist, die durch einen geeigneten Anfangswert $\mathfrak{D}(\xi, \eta, \zeta, 0)$ zu Null gemacht werden kann. Dann bleibt sie immer 0, und Gleichung (170. II) wird überflüssig. Dasselbe gilt von den Gleichungen III und IV.

Die Ergänzungsgleichungen V und VI mit konstanten ε- und μ-Werten bewähren sich wohl in der Statik, führen aber in schnell veränderlichen Feldern zu falschen Resultaten. Handelt es sich z. B. um Wechselfelder mit Lichtfrequenz, dann hängt ε wesentlich von der Frequenz ab, was zu Dispersionserscheinungen führt. Es ist eine der Hauptaufgaben der Elektrodynamik, auf Grund der atomistischen Struktur und quantentheoretischen Behandlung der Materie das Verhalten der Größen ε, μ, σ zu untersuchen. Dies ist Gegenstand des dritten Teiles dieses Buches.

§ 57. Relaxationszeit

Es möge jetzt $\mathfrak{j}$ ausschließlich eine konduktive Stromdichte bedeuten. Wir wenden die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{j} = 0$$

zuerst auf einen Isolator an. Dann ist $\mathfrak{j} = 0$, mithin $\varrho = \text{const}$. Die einem Isolator mitgeteilte wahre Ladung bleibt ungeändert.

Im Leiter wird

$$\mathfrak{j} = \sigma \mathfrak{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \mathfrak{D}$$

und daher

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \operatorname{div} \mathfrak{D} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \varrho = 0.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} t}.$$

Die Zeit $t = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}$, während welcher die Dichte ϱ auf den Wert $\frac{\varrho_0}{e}$ sinkt, nennt man Relaxationszeit. Wir wollen ihre Größenordnung bestimmen. Dazu ist eine Abschätzung der dielektrischen Konstanten ε der Metalle nötig. In der Statik wurde darauf hingewiesen, daß dieses ε unendlich groß zu nehmen sei. Ganz anders steht die Sache bei veränderlichen Feldern. Die Wellenerscheinungen in Metallen führen zu der Erkenntnis, daß ε dann die Größenordnung der für Isolatoren gültigen nicht übersteigt. Setzen wir daher $\varepsilon \sim 1$, so wird die Größenordnung der Relaxationszeit durch $\frac{1}{4\pi\sigma}$ bestimmt. Nun haben die Leitfähigkeiten σ der Metalle so ungeheuer große Werte, daß die Relaxationszeit überaus klein wird. Die folgende Tabelle zeigt einige dieser Werte.

	σ	$\frac{1}{4\pi\sigma}$
Kupfer	$53 \cdot 10^{16}\,\text{s}^{-1}$	$0{,}15 \cdot 10^{-18}\,\text{s}$
Platin	$8{,}4 \cdot 10^{16}\,\text{s}^{-1}$	$0{,}95 \cdot 10^{-18}\,\text{s}$
Wismut.....	$0{,}75 \cdot 10^{16}\,\text{s}^{-1}$	$10{,}6 \cdot 10^{-18}\,\text{s}$

Allerdings darf nicht vergessen werden, daß unsere phänomenologische Theorie, die ihre Sätze von normalen Verhältnissen ableitet, für die Beschreibung sehr schnell verlaufender Erscheinungen nicht kompetent ist. Jedenfalls bekommen wir einen Begriff davon, wie rasch sich das elektrische Gleichgewicht in metallischen Leitern einstellt.

Weiterhin schreiben wir dem Körper endliche Werte von ε, μ und σ zu. Wir erreichen dadurch, daß wir nicht nur extreme Klassen, sondern (mit Ausschluß der ferromagnetischen Stoffe) die Gesamtheit der isotropen Körper in den Kreis unserer Betrachtungen einbeziehen können.

§ 58. Das Energieintegral

Durch entsprechende Kombination der MAXWELLschen Gleichungen kann ein Zusammenhang abgeleitet werden, der die energetischen Verhältnisse des elektromagnetischen Feldes wiedergibt. ε und μ sollen als konstant betrachtet werden. Wir schreiben die Gleichungen (170. I und III) nochmals nieder, ersetzen aber die Größe $\mathfrak{D}$ durch $\varepsilon\mathfrak{E}$, ebenso $\mathfrak{B}$ durch $\mu\mathfrak{H}$. Außerdem zerlegen wir die Stromdichte $\mathfrak{j}$ in ihre beiden Bestandteile. Es soll jetzt $\mathfrak{j}$ die konduktive, $\varrho\mathfrak{v}$ die konvektive Stromdichte bedeuten. Dann erhält man

$$\text{I}': \frac{4\pi}{c}\mathfrak{j} + \frac{4\pi}{c}\varrho\mathfrak{v} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathfrak{H}; \quad \text{III}': \frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\mathfrak{E}.$$

Man multipliziert die erste Gleichung mit $-\frac{c}{4\pi}\mathfrak{E}$, die zweite mit $-\frac{c}{4\pi}\mathfrak{H}$, summiert und integriert über ein beliebiges Volumen τ. Nach geeigneter Abänderung der Reihenfolge wird

$$-\frac{d}{dt}\int\left(\frac{\varepsilon}{8\pi}\mathfrak{E}^2 + \frac{\mu}{8\pi}\mathfrak{H}^2\right)d\tau = \int\Big\{(\mathfrak{j},\mathfrak{E}) + \varrho(\mathfrak{v},\mathfrak{E}) + \frac{c}{4\pi}\{(\mathfrak{H},\operatorname{rot}\mathfrak{E}) - (\mathfrak{E},\operatorname{rot}\mathfrak{H})\}\Big\}\,d\tau.$$

Jetzt benutzt man die bekannte Vektorgleichung

$$(\mathfrak{H},\operatorname{rot}\mathfrak{E}) - (\mathfrak{E},\operatorname{rot}\mathfrak{H}) = \operatorname{div}[\mathfrak{E},\mathfrak{H}]$$

und formt nach dem GAUSSschen Satz das Raumintegral der Divergenz in das entsprechende Flächenintegral um:

$$-\frac{d}{dt}\int\left(\frac{\varepsilon}{8\pi}\mathfrak{E}^2 + \frac{\mu}{8\pi}\mathfrak{H}^2\right)d\tau = \int\{(\mathfrak{j},\mathfrak{E}) + \varrho(\mathfrak{v},\mathfrak{E})\}\,d\tau + \frac{c}{4\pi}\int[\mathfrak{E},\mathfrak{H}]_n\,df. \tag{171}$$

Zwecks Interpretation dieser Gleichung setzen wir voraus, daß die Ausdrücke der Energiedichte und Energie

$$u = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon\mathfrak{E}^2 + \mu\mathfrak{H}^2), \quad U = \frac{1}{8\pi}\int(\varepsilon\mathfrak{E}^2 + \mu\mathfrak{H}^2)\,d\tau, \tag{172}$$

die in der Statik abgeleitet wurden, auch für veränderliche Felder Gültigkeit besitzen. Auf der linken Seite der Gleichung (171) steht dann $-\frac{dU}{dt}$. Dieser Ausdruck bedeutet bei negativem $\frac{dU}{dt}$ den absoluten Wert der Energieabnahme pro Sekunde. Daher bedeutet jedes positive Glied der rechten Seite eine Ener-

gieart, die als Äquivalent der Abnahme der Feldenergie auftritt, jedes negative eine Quelle der Zunahme der Feldenergie. Wir betrachten diese Glieder der Reihe nach. Das erste läßt sich schreiben

$$\int (\mathfrak{j}, \mathfrak{E})\, d\tau = \int (\mathfrak{j}, \mathfrak{E} + \bar{\mathfrak{E}})\, d\tau - \int (\mathfrak{j}, \bar{\mathfrak{E}})\, d\tau .$$

Im rechtsseitigen ersten Integral erkennen wir nach Gleichung (125) den Ausdruck der JOULEschen Wärme. Das zweite Integral gibt den Effekt der eingeprägten Kräfte, der infolge des negativen Vorzeichens dem Felde Arbeit erspart. (Im stationären Fall verschwindet $\int (\mathfrak{j}, \mathfrak{E})\, d\tau$. Dann gilt für jede geschlossene Stromröhre einzeln $\int (\mathfrak{j}_k, \mathfrak{E})\, d\tau = I_k \oint (\mathfrak{E}, d\mathfrak{s}) = 0$.)

Weitergehend untersuchen wir das zweite Glied auf der rechten Seite der Gleichung (171):

$$\int \varrho \cdot (\mathfrak{v}, \mathfrak{E}) \cdot d\tau .$$

Dies ist der Effekt der Feldkraft, wenn durch sie geladene Teilchen bewegt werden. Die entstehende kinetische Energie geht auf Kosten der Feldenergie. Es lohnt sich zu bemerken, daß an der Bewegungsarbeit die magnetische Kraft keinen Anteil hat. Die ponderomotorische Kraftdichte, soweit sie vom magnetischen Feld herstammt, ist gegeben durch Gleichung (149):

$$\mathfrak{k} = \frac{1}{c}\, [\mathfrak{j}, \mathfrak{B}] = \frac{\mu \varrho}{c}\, [\mathfrak{v}, \mathfrak{H}], \quad \text{wenn} \quad \mathfrak{j} = \varrho \mathfrak{v} .$$

$\mathfrak{k}$ als Vektorprodukt steht senkrecht auf $\mathfrak{v}$ und leistet daher keine Arbeit.

Das letzte Glied kann mit der Bezeichnung

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}\, [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}] \tag{173}$$

geschrieben werden: $\int \mathfrak{S}_n\, df$. Es bedeutet eine Ausströmung durch die den Integrationsraum begrenzende Fläche f. Da es infolge seines positiven Vorzeichens die im Raum befindliche Feldenergie verringert, muß es als Dichte eines Energiestromes betrachtet werden. Anschaulich bedeutet es die Energiemenge, die während einer Sekunde senkrecht durch 1 cm² hindurchgeht. $\mathfrak{S}$ heißt POYNTINGscher Vektor. Er ist überall von Null verschieden, wo sich elektrische und magnetische Felder kreuzen. Man könnte z. B. das Feld eines Kondensators senkrecht zum Feld eines Hufeisenmagnets einstellen. Dann muß ein Energiestrom in Gang kommen, der in geschlossenen Linien fließt und zeitlich konstant ist. Von weittragender Wichtigkeit wird der POYNTINGsche Vektor im Abschnitt der elektromagnetischen Wellen.

§ 59. Die LORENTZkraft

Da vorhin vom Konvektionsstrom die Rede war, soll die auf einen bewegten Ladungsträger wirkende ponderomotorische Kraft berechnet werden. Das Teilchen möge sich im Vakuum bewegen ($\varepsilon = \mu = 1$), seine Geschwindig-

keit sei $\mathfrak{v}$ und seine Ladung e. Nach Gleichung (150) wird die Kraftdichte des Feldes

$$\mathfrak{k} = \varrho \mathfrak{E} + \frac{\varrho}{c} [\mathfrak{v}, \mathfrak{H}].$$

Beiderseits integrieren wir nun über das Volumen des Teilchens, das so klein sei, daß in ihm $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ als konstant betrachtet und vor das Integral gesetzt werden können. Da $\int \varrho \, d\tau = e$ und $\int \mathfrak{k} \, d\tau = \mathfrak{K}$, folgt

$$\mathfrak{K} = e\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathfrak{v}, \mathfrak{H}]\right). \tag{174}$$

Das ist die sogenannte LORENTZkraft, die in der Elektronentheorie eine besondere Rolle spielt.

§ 60. Die MAXWELLschen Spannungen

In der Elektrostatik wurden unter Gleichung (96) die Komponenten des Spannungstensors niedergeschrieben und später bemerkt, daß neben diesen die magnetischen Komponenten von vollkommen gleicher Struktur zu berücksichtigen sind. So entsteht der Tensor der elektrischen und magnetischen Statik. Die Divergenz dieses Tensors gibt die auf Ladungen und Magnetismus wirkende ponderomotorische Kraftdichte. Zieht man auch Ströme in Betracht, so erweitert sich der Ausdruck der Kraftdichte nach Gleichung (149) um das Glied $\frac{1}{c} [\mathfrak{j}, \mathfrak{B}]$. Es erhebt sich nun die Frage: Wenn bei Berechnung der Divergenz nicht die statischen, sondern die allgemeinen MAXWELLschen Gleichungen zu Hilfe genommen werden, erhält man dann wirklich das erwähnte Zusatzglied?

Da wir nur die Komponente $\mathfrak{k}_x$ der Kraftdichte benötigen, führen wir nur die Komponenten T_{xx}, T_{xy} und T_{xz} des Tensors an:

$$T_{xx} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathfrak{E}_x^2 - \frac{\varepsilon}{8\pi} \mathfrak{E}^2 + \frac{\mu}{4\pi} \mathfrak{H}_x^2 - \frac{\mu}{8\pi} \mathfrak{H}^2,$$

$$T_{xy} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y + \frac{\mu}{4\pi} \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y,$$

$$T_{xz} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_z + \frac{\mu}{4\pi} \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_z.$$

Jetzt bilden wir den Ausdruck $\mathfrak{k}_x = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\mathfrak{k}_x = \frac{\varepsilon}{4\pi} &\left\{\mathfrak{E}_x \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \mathfrak{E}_y \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} + \mathfrak{E}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z}\right\} \\
&+ \frac{1}{4\pi} \mathfrak{E}_x \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} - \frac{\varepsilon}{8\pi} \frac{\partial \mathfrak{E}^2}{\partial x} - \frac{1}{8\pi} \mathfrak{E}^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \\
&+ \frac{\mu}{4\pi} \left\{\mathfrak{H}_x \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} + \mathfrak{H}_y \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} + \mathfrak{H}_z \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z}\right\} \\
&+ \frac{1}{4\pi} \mathfrak{H}_x \operatorname{div} \mu \mathfrak{H} - \frac{\mu}{8\pi} \frac{\partial \mathfrak{H}^2}{\partial x} - \frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2 \frac{\partial \mu}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Die Ausarbeitung wird durch das Einführen folgender Bezeichnungen erleichtert:

$$\frac{\varepsilon}{4\pi}\left\{\mathfrak{E}_x\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial x}+\mathfrak{E}_y\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial y}+\mathfrak{E}_z\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial z}\right\}=A,\quad \frac{\varepsilon}{8\pi}\frac{\partial\mathfrak{E}^2}{\partial x}=B,$$

$$\frac{\mu}{4\pi}\left\{\mathfrak{H}_x\frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial x}+\mathfrak{H}_y\frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial y}+\mathfrak{H}_z\frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial z}\right\}=A',\quad \frac{\mu}{8\pi}\frac{\partial\mathfrak{H}^2}{\partial x}=B'.$$

Es folgt dann

$$\mathfrak{k}_x=A-B+\varrho\mathfrak{E}_x-\frac{1}{8\pi}\mathfrak{E}^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+A'-B'-\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2\frac{\partial\mu}{\partial x}.$$

Hier wurden die Gleichungen (170. II und IV)

$$\frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\varepsilon\mathfrak{E}\equiv\frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\mathfrak{D}=\varrho,\quad \operatorname{div}\mu\mathfrak{H}\equiv\operatorname{div}\mathfrak{B}=0$$

benutzt. In A kann man schreiben

$$\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial y}\equiv\frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial x}-\operatorname{rot}_z\mathfrak{E},\quad \frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial z}\equiv\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial x}+\operatorname{rot}_y\mathfrak{E}.$$

Damit wird

$$A-B=\frac{\varepsilon}{4\pi}\left\{\mathfrak{E}_x\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial x}+\mathfrak{E}_y\frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial x}+\mathfrak{E}_z\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial x}\right\}-\frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}_y\operatorname{rot}_z\mathfrak{E}$$
$$+\frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}_z\operatorname{rot}_y\mathfrak{E}-\frac{\varepsilon}{8\pi}\frac{\partial\mathfrak{E}^2}{\partial x}\cdots.$$

Das erste und letzte Glied hebt sich heraus. Die Rotationskomponenten werden Gleichung (170. III) entnommen.

$$A-B=\frac{\varepsilon}{4\pi c}\left\{\mathfrak{E}_y\frac{\partial\mathfrak{B}_z}{\partial t}-\mathfrak{E}_z\frac{\partial\mathfrak{B}_y}{\partial t}\right\}=\frac{1}{4\pi c}\left[\mathfrak{D},\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}\right]_x.$$

In gleicher Weise ergibt sich

$$A'-B'=-\frac{\mu}{4\pi}\{\mathfrak{H}_y\operatorname{rot}_z\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_z\operatorname{rot}_y\mathfrak{H}\}.$$

Jetzt nimmt man die Rotationskomponenten aus der Gleichung (170. I):

$$A'-B'=-\frac{\mu}{4\pi}\left\{\mathfrak{H}_y\left(\frac{4\pi}{c}\mathfrak{j}_z+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{D}_z}{\partial t}\right)-\mathfrak{H}_z\left(\frac{4\pi}{c}\mathfrak{j}_y+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{D}_y}{\partial t}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4\pi c}\left[\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t},\mathfrak{B}\right]_x+\frac{1}{c}[\mathfrak{j},\mathfrak{B}]_x.$$

Als Resultat schreiben wir

$$\mathfrak{k}_x=\varrho\mathfrak{E}_x-\frac{1}{8\pi}\mathfrak{E}^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}-\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2\frac{\partial\mu}{\partial x}+\frac{1}{c}[\mathfrak{j},\mathfrak{B}]_x+\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{D},\mathfrak{B}]_x. \tag{175}$$

Die ersten vier Glieder stimmen tatsächlich mit Gleichung (150) überein. Das letzte Glied ist vollkommen neu. Wir formen es um:

$$\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{D},\mathfrak{B}]=\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E},\mathfrak{H}]=\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial t}.$$

Als letztes Glied von $\mathfrak{k}_x$ tritt daher $\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial t}$ auf. Es ist leicht einzusehen, daß hier etwas nicht in Ordnung ist. Energie kann in veränderlicher Weise im Vakuum strömen; dann ist $\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t}$ sicher nicht Null. Wir wählen eine Stelle, an der weder Ladung noch Strom vorhanden sind: $\varrho = \mathfrak{j} = 0$. Wegen $\varepsilon = \mu = 1$ verschwindet auch grad ε und grad μ. Dann bleibt von $\mathfrak{k}$ immer noch das letzte Glied $\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t}$ übrig. Das bedeutet, daß das Feld an einer Stelle des Vakuums, wo weder Ladung noch Strom vorhanden ist, eine Kraft ausübt. Worauf wirkt denn diese Kraft? Früher, als man noch an den Äther glaubte, gab man zur Antwort: auf den Äther. Heute, wo der Ätherglaube dahin ist, ist diese Antwort nicht mehr zulässig.

Das Rätsel wurde durch die Relativitätstheorie gelöst. Nach dieser hat der Spannungstensor nicht 9, sondern 16 Komponenten, die zu vieren in einem quadratischen Schema angeordnet werden. In der ersten Zeile befindet sich dann außer T_{xx}, T_{xy}, T_{xz} auch noch die Komponente T_{xt}. Die Viererdivergenz gibt

$$\mathfrak{k}_x = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial T_{xt}}{\partial t}.$$

Nach der Theorie ist T_{xt} gleich $-\frac{1}{c^2}\mathfrak{S}$. Zum letzten Glied von Gleichung (175) tritt noch der Ausdruck $-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial t}$ hinzu. Die endgültige und richtige Form der Kraftdichte wird daher

$$\mathfrak{k} = \varrho\mathfrak{E} - \frac{1}{8\pi}\mathfrak{E}^2 \operatorname{grad}\varepsilon - \frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2 \operatorname{grad}\mu + \frac{1}{c}[\mathfrak{j}, \mathfrak{B}] + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t}. \tag{176}$$

Jetzt ist keine Rede mehr von einer auf das Vakuum ausgeübten Kraft; denn für $\varepsilon = \mu = 1$ wird das letzte Glied Null. Der Ausdruck $T_{xt} = -\frac{1}{c^2}\mathfrak{S}$ ist leicht zu interpretieren. Da seine zeitliche Ableitung den Charakter einer Kraftdichte hat, kann der Ausdruck selbst nur eine Impulsdichte darstellen; denn nach dem zweiten Axiom der Dynamik ist der Impuls jene Größe, deren zeitliche Ableitung eine Kraft ergibt. Wir treffen hier auf die wertvollste Aussage der Relativitätstheorie, die von PLANCK gefunden wurde: Der durch c^2 dividierte Vektor des Energiestromes bedeutet den Impuls dieses Stromes. Für die elektromagnetische Impulsdichte $\mathfrak{g}$ besteht die Gleichung

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{c^2}\mathfrak{S}. \tag{177}$$

Das Verbleiben des mechanischen Impulses eines geschlossenen Systems ist nicht mehr gewährleistet, wenn neben den mechanischen Kräften auch solche elektromagnetischen Ursprunges ins Spiel kommen. Fällt z. B. eine elektromagnetische Welle auf das Elektron eines Atoms, so erhält es durch den eintretenden photoelektrischen Effekt einen mechanischen Impuls. Umsonst halten wir Ausschau nach dem ausgleichenden Impulsverlust irgendeines anderen

Körpers. Kein Körper, sondern das Feld verliert den entsprechenden Impuls. Der Impuls eines geschlossenen Systems ergibt sich nur dann als konstant, wenn man neben dem mechanischen auch den elektromagnetischen Impuls in Rechnung stellt.

§ 61. Axiomatische Elektrodynamik

Der Weg, der zu den MAXWELLschen Gleichungen führt, ist weder kurz noch gerade. Nicht nur Erfahrungen, auch Annahmen und Verallgemeinerungen mußten in Anspruch genommen werden, um ans Ziel zu gelangen. Man denke z. B. an den Verschiebungsstrom im Vakuum. Besonders schwer war das Eindringen in die Theorie, als sie noch nicht frei war von unnötigen Zutaten und das begriffliche Reinigungsverfahren noch nicht eingesetzt hatte. Eben deshalb wählte H. HERTZ in seinen Vorträgen den umgekehrten Weg. Sein Standpunkt war ungefähr folgender: Wir betrachten das MAXWELLsche Gleichungssystem als eine in Stein gemeißelte Offenbarung, forschen nicht nach seinem Ursprung, sondern wenden es auf die einzelnen Abschnitte der Elektrodynamik an und sehen zu, was dabei herauskommt. Der hervorragende Gelehrte A. SOMMERFELD, einstiger Hörer von HERTZ, zollt diesem Vorgehen seine volle Anerkennung.

Im Sinne dieser Methode wollen nun auch wir in großen Schritten rückwärtsschreitend dartun, daß die MAXWELLschen Gleichungen die ganze Statik und alle Gesetze der stationären Ströme restlos enthalten. Die Gleichungen (170) müssen dann noch mit dem OHMschen Gesetz (124) ergänzt werden. Zu der axiomatischen Methode gehört außerdem die genaue physikalische Erklärung aller Bezeichnungen.

1. *Statik.* Statisch nennt man das Feld, wenn jede Größe zeitlich konstant ist und kein Strom vorhanden ist:

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0, \quad \mathfrak{j} = 0.$$

Dann nehmen die Gleichungen (170) folgende Gestalt an:

$$\text{I.} \quad \operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0, \qquad \text{IV.} \quad \operatorname{div} \mu \mathfrak{H} = 0, \qquad \text{III.} \quad \operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0, \qquad \text{II.} \quad \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} = 4\pi\varrho.$$

Die beiden ersten Gleichungen enthalten nur $\mathfrak{H}$, die beiden letzten nur $\mathfrak{E}$. Das elektrische und das magnetische Feld sind als selbständige Gebilde zu betrachten. Aus den Gleichungen I und III folgt, daß $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ aus je einem Potential abgeleitet werden können:

$$\mathfrak{H} = -\operatorname{grad} \Phi_m, \quad \mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \Phi.$$

Nun erfordert die Allgemeinheit die Zulassung solcher Flächen, an denen sowohl Φ als auch $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ sprunghafte Änderungen erleiden. Die weiteren Betrachtungen knüpfen sich an den rein mathematischen Satz von GREEN:

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\Delta \Phi}{r}\, d\tau - \frac{1}{4\pi}\int\limits_f \frac{1}{r}\left\{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_2\right\} df + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{f'} (\Phi_1 - \Phi_2)\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, df'.$$

Als Quellen der beliebigen Funktion Φ erscheinen danach die Größen

$$-\frac{\Delta\Phi}{4\pi}, \quad -\frac{1}{4\pi}\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_1 - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_2\right\}, \quad \frac{1}{4\pi}(\Phi_1 - \Phi_2).$$

Handelt es sich um das elektrostatische Potential, so werden diese Quellen der Reihe nach mit ϱ', ω', ν' bezeichnet und als freie räumliche Dichte, freie Flächendichte, freie Momentdichte einer Doppelschicht angesehen. Mit diesen Bezeichnungen wird

$$\Phi = \int \frac{\varrho'}{r}\, d\tau + \int_f \frac{\omega'}{r}\, df + \int_{f'} \nu' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, df'.$$

In den anwesenden homogenen Leitern muß $\overline{\mathfrak{E}}$ verschwinden. Dann ergibt das OHMsche Gesetz $\mathfrak{j} = \sigma\mathfrak{E}$. Da aber die Statik Ströme ausschließt, folgt für den Leiterraum $\mathfrak{E} = 0$, d. h. $\Phi = \text{const}$.

Ganz ähnlich läßt sich auch das magnetische Feld behandeln.

Die Grenzbedingungen folgen ebenfalls aus den Grundgleichungen. Gleichung III ist nach dem STOKESschen Satz gleichwertig mit $\oint (\mathfrak{E}\, d\mathfrak{s}) = 0$. Daraus ergibt sich für eine Linie, die an den beiden Seiten einer Grenzfläche verläuft, dasselbe Resultat wie in § 21: $(\mathfrak{E}_t)_1 = (\mathfrak{E}_t)_2$. Aus Gleichung II erhält man für $\varrho = 0$: $\operatorname{div}\mathfrak{D} = 0$ oder $\int \mathfrak{D}_n df = 0$. Wie in § 21 wenden wir diese Gleichung auf einen kleinen Zylinder an, dessen Grundflächen beiderseits der Grenzfläche liegen. Wir erhalten wie dort

$$(\mathfrak{D}_n)_1 - (\mathfrak{D}_n)_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \varepsilon_1(\mathfrak{E}_n)_1 - \varepsilon_2(\mathfrak{E}_n)_2 = 0.$$

Damit ist dargetan, daß die MAXWELLschen Gleichungen die ganze Statik enthalten.

2. *Stationäre Ströme.* Jetzt sind zwar alle zeitlichen Ableitungen Null, aber $\mathfrak{j}$ verschwindet nicht. Daher gibt jetzt Gleichung I

$$\frac{4\pi}{c}\mathfrak{j} = \operatorname{rot}\mathfrak{H}.$$

Durch Divergenzbildung folgt $\operatorname{div}\mathfrak{j} = 0$. Aus Gleichung III schließt man wieder auf die Existenz eines Potentials. Die zu erfüllende Differentialgleichung erhält man aus $\operatorname{div}\mathfrak{j} = 0$, wenn $\mathfrak{j}$ im Sinne des OHMschen Gesetzes durch den Ausdruck $\sigma\left(-\operatorname{grad}\Phi + \overline{\mathfrak{E}}\right)$ ersetzt wird:

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad}\Phi) = \operatorname{div}\left(\sigma\overline{\mathfrak{E}}\right).$$

Die Grenzbedingungen für $\mathfrak{E}$ ergeben sich wie oben. Auch die Bedingung $(\mathfrak{j}_n)_1 = (\mathfrak{j}_n)_2$ folgt aus $\operatorname{div}\mathfrak{j} = 0$ mittels des erwähnten elementaren Hilfszylinders.

Wie man sieht, ermöglicht das MAXWELLsche System auch die erschöpfende Behandlung der stationären Ströme.

QUASISTATIONÄRE STRÖME

§ 62. Grundgleichungen

Nach der kurzen Abschweifung sollen die Feldgleichungen MAXWELLS wieder zur Beschreibung solcher Erscheinungen benutzt werden, die außerhalb des Rahmens der Statik und der stationären Ströme stehen. In der Technik spielen jene Ströme eine große Rolle, deren Stärke in einem beliebigen Zeitpunkt an jedem Querschnitt des Leitungsdrahtes dieselbe ist. Man kann daher von einer einheitlichen Stärke des Stromes sprechen. Wohl aber soll diese Stromstärke nicht mehr zeitlich konstant sein, wie das bei den stationären Strömen der Fall war. Solche Ströme nennt man quasistationär, wenn die weitere Bedingung erfüllt ist, daß die Stromfäden zeitlich unveränderliche Linien sind. Es soll also $\mathfrak{j}$ die Form haben

$$\mathfrak{j} = f(\xi, \eta, \zeta)\, g(t).$$

Dann kann man von bleibenden Stromröhren und von der Stärke der einzelnen Röhrenströme sprechen. Es folgt für jedes Röhrenstück die Gleichung

$$\int \mathfrak{j}_n df = 0, \quad \text{d.h. allgemein} \quad \operatorname{div} \mathfrak{j} = 0.$$

Diese Gleichung ist nach Gleichung (170. I) sicher erfüllt, wenn die Dichte des Verschiebungsstromes $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$ gegen die Dichte des Leitungsstromes $\mathfrak{j}$ vernachlässigt werden kann. In vielen Fällen der technischen Praxis ist dies tatsächlich erlaubt. Wechselströme z.B. mit Frequenzen von einigen tausend Hertz erfüllen diese Bedingung sehr gut. Es soll daher in diesem Abschnitt die Gleichung (170. I) ganz nach dem Muster von Gleichung (142) in der Form

$$\frac{4\pi}{c}\mathfrak{j} = \operatorname{rot} \mathfrak{H}$$

geschrieben werden.

Das OHMsche Gesetz für stationäre Ströme lautete $IR = E$, wobei die elektromotorische Kraft E von den eingeprägten Kräften herstammte. Die FARADAYsche Induktion machte uns mit einer neuen Quelle der elektromotorischen Kraft bekannt, die ihren Ursprung in der zeitlichen Änderung des durch den Leiter begrenzten Induktionsflusses hat:

$$E_i = -\frac{1}{c}\frac{dF}{dt}.$$

Daher lautet die Verallgemeinerung des OHMschen Gesetzes

$$IR = E - \frac{1}{c}\frac{dF}{dt}. \tag{178}$$

Sind mehrere Stromkreise zugegen, so gilt für jeden einzelnen Stromkreis

$$I_k R_k = E_k - \frac{1}{c}\frac{dF_k}{dt}. \tag{179}$$

F_k ist der Induktionsfluß, der durch den k-ten Kreis geht.

§ 63. Magnetisierungsarbeit

Aus Gleichung (178) läßt sich der allgemeine Ausdruck jener Arbeit herleiten, die zur Magnetisierung beliebiger – auch ferromagnetischer – Substanzen nötig ist. Wir wählen eine spezielle Anordnung, um uns auf frühere Resultate berufen zu können. Eine Kreisspule vom Querschnitt q und der Länge l sei mit n Windungen versehen. In ihrem Innern befinde sich z. B. ein Eisenkern. Die Spule werde an die Pole einer Batterie mit der elektromotorischen Kraft E angeschlossen. Der Gesamtwiderstand des Stromkreises sei R. Es vergeht eine gewisse Zeit, bis die Stromstärke ihren vollen Wert erreicht und der Strom stationär wird. Wir betrachten nun einen Zwischenzustand, in dem die Stromstärke den Wert I erreicht hat. In diesem Augenblick ist nach Gleichung (143) die magnetische Feldstärke in der Spule

$$|\mathfrak{H}| = \frac{4\pi}{c}\,\frac{n}{l}\,I, \tag{180}$$

und die eingeprägten Kräfte der Batterie leisten im nächstfolgenden Zeitelement dt gemäß Gleichung (136) die Arbeit $dA = E\,I\,dt$. Während der Zeit dt ändere sich der Induktionsfluß $F = \int \mathfrak{B}_n df$ um den Betrag

$$dF = qn\,\frac{d\,\mathfrak{B}_n}{dt}\,dt.$$

Jetzt benutzen wir das Ohmsche Gesetz (178):

$$IR = E - \frac{1}{c}\,\frac{dF}{dt} \quad \text{oder} \quad IR = E - \frac{qn}{c}\,\frac{d\,\mathfrak{B}_n}{dt}.$$

Wir multiplizieren beiderseits mit $I\,dt$ und erhalten

$$I^2 R\,dt = dA - \frac{qn}{c}\,I\,d\,\mathfrak{B}_n.$$

Im zweiten Glied rechts setzen wir I aus Gleichung (180) ein und schreiben in geänderter Reihenfolge

$$dA = I^2 R\,dt + \frac{ql}{4\pi}\,(\mathfrak{H}, d\,\mathfrak{B}) = I^2 R\,dt + \frac{1}{4\pi}\,(\mathfrak{H}, d\,\mathfrak{B})\,\tau.$$

$\tau = ql$ ist der Rauminhalt der Spule. Als Äquivalent der Stromarbeit erscheint hier außer der Jouleschen Wärme $I^2 R\,dt$ noch die Größe $\frac{1}{4\pi}\,(\mathfrak{H}, d\,\mathfrak{B})\,\tau$. Das ist jener Teil der Arbeit, der nötig ist, um die magnetische Induktion des Eisenkerns um $d\,\mathfrak{B}$ zu steigern. Diese Arbeit wird daher in Form magnetischer Feldenergie im Eisen aufgespeichert. War das Eisen, bevor der Strom eingeschaltet wurde, unmagnetisch, d. h., besaß es keinen remanenten Magnetismus, so erhält man als Ausdruck für die gesamte magnetische Energie das Integral

$$U_m = \frac{1}{4\pi}\int d\tau \int_0^{\mathfrak{B}} (\mathfrak{H}, d\,\mathfrak{B}),$$

das mit Hilfe der gegebenen Magnetisierungskurve ausgewertet werden kann. Will man z. B. die Energie des vollen remanenten Zustandes bestimmen, so hat man entlang der jungfräulichen Kurve bis zum Sättigungspunkt und dann zurück am überhöhtem Zweige der ($\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$)-Kurve bis $\mathfrak{H} = 0$ zu integrieren.

§ 64. Induktionskoeffizienten

Gegeben seien n lineare Stromkreise, die wir durch die Zeiger *1*, *2*, ..., k, ..., n voneinander unterscheiden. Der k-te Kreis hat den Widerstand R_k und die elektromotorische Kraft E_k. Dann ist auch die Stromstärke I_k bekannt. Jeder Stromkreis erzeugt ein magnetisches Feld. Unsere Aufgabe soll in der Bestimmung des magnetischen Flusses F_k bestehen, der durch den k-ten Stromkreis geht. Permanente Magnete sollen nicht zugegen sein. Die Permeabilität der einbettenden Substanz sei μ.

Bedeutet f_k eine durch den k-ten Leiter berandete Fläche, dann ist

$$F_k = \int \mathfrak{B}_n d f_k .$$

Statt $\mathfrak{B}$ schreiben wir nach Gleichung (145) rot $\mathfrak{A}$:

$$F_k = \int \operatorname{rot}_n \mathfrak{A}\, d f_k ,$$

oder im Sinne des STOKESschen Satzes

$$F_k = \oint (\mathfrak{A}, d\mathfrak{s}_k) . \tag{181}$$

$\mathfrak{A}$ als Ortsfunktion ist hier an der Stelle von $d\mathfrak{s}_k$ zu nehmen. Der Ausdruck für $\mathfrak{A}$ steht in Gleichung (146) bereit:

$$\mathfrak{A} = \frac{\mu}{c} \int \frac{\mathfrak{i}}{r}\, d\tau .$$

Die Integration ist auf alle Stellen zu erstrecken, an denen Strom zugegen ist. r bedeutet den Abstand der Stelle vom Aufpunkt, den wir jetzt in das Element $d\mathfrak{s}_k$ verlegen. Wir wählen das Element $d\mathfrak{s}_i$ des i-ten Kreises und bezeichnen seine Entfernung von $d\mathfrak{s}_k$ mit r_{ik}. Für lineare Kreise wird $\mathfrak{i}\, d\tau = I d\mathfrak{s}$. Es ist über alle Stromkreise zu integrieren, auch über den k-ten selbst. An der Stelle von $d\mathfrak{s}_k$ wird

$$\mathfrak{A} = \frac{\mu}{c} \sum_{i=1}^{n} I_i \int \frac{d\mathfrak{s}_i}{r_{ik}}$$

und

$$\frac{1}{c} F_k = \frac{\mu}{c^2} \sum_{i=1}^{n} I_i \int_i \int_k \frac{(d\mathfrak{s}_i, d\mathfrak{s}_k)}{r_{ik}} . \tag{181'}$$

Wir unterwerfen den i-ten Summanden

$$I_i \frac{\mu}{c^2} \int_i \int_k \frac{(d\mathfrak{s}_i, d\mathfrak{s}_k)}{r_{ik}}$$

einer näheren Betrachtung. Der Koeffizient von I_i hängt nur von der Größe, Gestalt und relativen Lage, d.h. nur von der Geometrie des i-ten und k-ten Kreises ab. Er heißt gegenseitiger Induktionskoeffizient und wird mit L_{ki} bezeichnet. Mit I_i multipliziert, gibt er jenen Teil des durch den k-ten Kreis hindurchgehenden Induktionsflusses, der vom i-ten Stromkreis herstammt:

$$L_{ki} = \frac{\mu}{c^2} \int\limits_i \int\limits_k \frac{(d\mathfrak{s}_i, d\mathfrak{s}_k)}{r_{ik}}. \tag{182}$$

L_{ik} ist offensichtlich symmetrisch in i und k: $L_{ki} = L_{ik}$. Dabei bedeutet $L_{ik} I_k c$ den Teil des durch den i-ten Kreis gehenden Induktionsflusses, der vom k-ten Kreis geliefert wird.

Jetzt kann der Ausdruck $\frac{1}{c} F_k$ in der Gestalt geschrieben werden:

$$\frac{1}{c} F_k = L_{k1} I_1 + L_{k2} I_2 + \cdots + L_{kk} I_k + \cdots + L_{kn} I_n = \sum_i L_{ki} I_i = \sum_i L_{ik} I_i. \tag{183}$$

Besondere Aufmerksamkeit verdient das Glied $L_{kk} I_k$. Dieser Teil des Induktionsflusses stammt vom k-ten Strom selbst her. Deshalb wird L_{kk} der Selbstinduktionskoeffizient des k-ten Stromes genannt:

$$L_{kk} = \frac{\mu}{c^2} \int\limits_k \int\limits_{k'} \frac{(d\mathfrak{s}_k, d\mathfrak{s}_{k'})}{r_{kk'}}. \tag{184}$$

Bei der Berechnung des Selbstinduktionskoeffizienten kann der Leiterkreis nicht mehr als linear betrachtet werden; denn sobald $d\mathfrak{s}_k$ mit $d\mathfrak{s}_{k'}$ zusammenfällt, wird $r_{kk'}$ Null. Dem Leitungsdraht muß in diesem Falle, der Wirklichkeit entsprechend, ein endlicher Querschnitt zugeschrieben und der Strom in infinitesimale Röhren zerlegt werden.

Die Induktionskoeffizienten sind konstant, wenn Gestalt und gegenseitige Lage der Leiter unverändert bleiben. Eine Änderung des Induktionsflusses kann dann nur durch Änderung der Stromstärken zustande kommen. In diesem Falle nimmt das System (179) der verallgemeinerten OHMschen Gleichungen folgende Gestalt an:

$$I_k R_k + L_{k1} \dot{I}_1 + L_{k2} \dot{I}_2 + \cdots + L_{kn} \dot{I}_n = E_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{185}$$

Dies bedeutet ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen mit der gleichen Anzahl der Unbekannten $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Die Induktionskoeffizienten L_{ki}, die Widerstände R_k und die elektromotorischen Kräfte E_k sind als gegeben zu betrachten. Es kann z.B. E_k eine periodische Funktion der Zeit sein. Wir geben später für einige typische Fälle Lösungen dieses Systems.

§ 65. Magnetische Energie der Stromkreise

Unter Ausschluß ferromagnetischer Substanzen lautet der allgemeine Ausdruck der magnetischen Feldenergie

$$U_m = \frac{1}{8\pi} \int (\mathfrak{H}, \mathfrak{B})\, d\tau.$$

$\mathfrak{B}$ kann wieder durch rot $\mathfrak{A}$ ersetzt werden: $(\mathfrak{H}, \mathfrak{B}) = (\mathfrak{H}, \operatorname{rot}\mathfrak{A})$. Indem man die Identität

$$(\mathfrak{H}, \operatorname{rot}\mathfrak{A}) = (\mathfrak{A}, \operatorname{rot}\mathfrak{H}) + \operatorname{div}[\mathfrak{A}, \mathfrak{H}]$$

benutzt, erhält man

$$(\mathfrak{H}, \mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}, \operatorname{rot}\mathfrak{H}) + \operatorname{div}[\mathfrak{A}, \mathfrak{H}].$$

Rechts kann $\frac{4\pi}{c}\,\mathfrak{j}$ statt rot $\mathfrak{H}$ geschrieben werden. Dann wird

$$U_m = \frac{1}{2c}\int (\mathfrak{A}, \mathfrak{j})\, d\tau, \tag{186}$$

denn das Raumintegral von $\operatorname{div}[\mathfrak{A}, \mathfrak{H}]$ läßt sich in ein Flächenintegral überführen und verschwindet bei Integration über die unendliche Kugelfläche. Beschränken wir uns auf lineare Leiter, so folgt wegen $\mathfrak{j}\,d\tau = I\,d\mathfrak{s}$

$$U_m = \frac{1}{2c}\sum_{k=1}^{n} I_k \int (\mathfrak{A}, d\mathfrak{s}_k).$$

Das Integral bedeutet nach Gleichung (181) den durch den k-ten Leiterkreis hindurchgehenden Induktionsfluß F_k. Daher ist

$$U_m = \frac{1}{2c}\sum_{k=1}^{n} I_k F_k.$$

Schließlich ziehen wir noch den Ausdruck (183) von F_k in Betracht und erhalten

$$U_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} L_{ik} I_i I_k. \tag{187}$$

Die magnetische Energie der Ströme ergibt sich als quadratische Form der Stromstärken. Bemerkenswert ist die formale Beziehung

$$\frac{\partial U_m}{\partial I_k} = \sum_{i=1}^{n} L_{ik} I_i = \frac{1}{c} F_k.$$

§ 66. Die Energiegleichung

Die Energie eines Stromsystems ändert sich aus zweierlei Gründen: Entweder ändern sich die Stromstärken oder aber die gegenseitige Lage der Leiter. Ersteres tritt immer ein, wenn die elektromotorischen Kräfte Zeitfunktionen sind. Bei Änderung der gegenseitigen Lage verändern sich nur die Wechselinduktionskoeffizienten, bei Deformation der einzelnen Leiter auch die Selbstinduktionskoeffizienten.

Wir behandeln die zwei Hauptfälle gesondert und schreiben die Erhaltungsgleichung der Energie zuerst für jenen Fall auf, wo sich ausschließlich die Stromstärken ändern. Die pro Zeiteinheit geleistete Arbeit der eingeschalteten Stromquellen beträgt für das ganze System $\sum_{k=1}^{n} E_k I_k$. Diese Arbeit deckt sowohl

die pro Sekunde auftretende JOULEsche Wärme $\sum_{k=1}^{n} I_k^2 R_k$ als auch die sekundliche Zunahme $\frac{\partial U_m}{\partial t}$ der magnetischen Energie. Somit

$$\sum_k E_k I_k = \sum_k I_k^2 R_k + \frac{\partial U_m}{\partial t}, \tag{188}$$

wobei nach Gleichung (187)

$$\frac{\partial U_m}{\partial t} = \sum_i \sum_k L_{ik} \dot{I}_k I_i.$$

Es ist leicht zu beweisen, daß dieser Erhaltungssatz in den Gleichungen (185) enthalten ist. Wir multiplizieren die dort ausgeschriebene k-te Gleichung mit I_k und summieren über k. Dann folgt genau die Gleichung (188).

Etwas ausführlichere Rechnung erfordert der zweite Fall. Wenn die Stromkreise gegeneinander bewegt werden, tritt auf der rechten Seite der Gleichung (188) noch die pro Sekunde berechnete Arbeit $\frac{dA}{dt}$ hinzu, die von den ponderomotorischen Kräften geleistet wird:

$$\sum_k E_k I_k = \sum_k I_k^2 R_k + \frac{\partial U_m}{\partial t} + \frac{dA}{dt}.$$

Jetzt gilt natürlich

$$\frac{\partial U_m}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \frac{d L_{ik}}{dt} I_i I_k. \tag{189}$$

Wir wollen den konkreten Ausdruck der Arbeit dA berechnen. Die Leiter mögen sich im einbettenden Medium mit der Permeabilität μ befinden. Die Kraft, die auf das Volumenelement $d\tau$ eines Leiters wirkt, ist

$$d\mathfrak{K} = \frac{1}{c} [\mathfrak{j}, \mathfrak{B}]\, d\tau = \frac{I}{c} [d\mathfrak{s}, \mathfrak{B}].$$

Der Verschiebungsvektor des Stromelementes sei $d\mathfrak{l}$. Dann wird die geleistete Arbeit

$$(d\mathfrak{l}, \mathfrak{K}) = \frac{I}{c}\, d\mathfrak{l}\, [d\mathfrak{s}, \mathfrak{B}] = \frac{I}{c} \mathfrak{B} [d\mathfrak{l}, d\mathfrak{s}].$$

Das Vektorprodukt ist der gerichtete Inhalt jenes Parallelogramms, das durch die Verschiebung $d\mathfrak{l}$ des Elementes $d\mathfrak{s}$ entsteht. $\mathfrak{B}[d\mathfrak{l}, d\mathfrak{s}]$ ist der hindurchgehende Induktionsfluß. Über den ganzen Leiter integriert, folgt

$$dA = \frac{I}{c}\, dF, \tag{190}$$

wobei jetzt dF den Fluß durch jene Fläche bedeutet, die durch die Anfangs- und Endlage des Leiters begrenzt ist. Wir beziehen diese Gleichung auf den k-ten Leiter

$$dA_k = \frac{I_k}{c}\, dF_k.$$

Der Faktor $\frac{1}{c}\,dF_k$ folgt aus Gleichung (183) in der Form

$$\frac{1}{c}\,d\,F_k = \sum_i (d\,L_{ik})_k\,I_i \qquad (i \neq k).$$

$(d\,L_{ik})_k$ bedeutet jene Änderung des Induktionskoeffizienten L_{ik}, die eintritt, wenn sich nur der k-te Kreis bewegt, der i-te nicht. Die entsprechende Arbeit wird

$$d\,A_k = \sum_i (d\,L_{ik})_k\,I_i\,I_k \qquad (i \neq k).$$

Man kann die Einschränkung $i \neq k$ einfach weglassen; denn bei der starren Bewegung des k-ten Leiters ist die Änderung $d\,L_{kk}$ des Selbstinduktionskoeffizienten selbstverständlich Null. Bewegt sich nur der i-te Leiter, so erhält man nach obigem Muster

$$d\,A_i = \sum_k (d\,L_{ik})_i\,I_i\,I_k.$$

Summiert man über i und k, so erhält man jede Paarkombination der Leiterkreise zweimal. Als Ausdruck der gesamten Arbeit, die bei der Bewegung aller Kreise geleistet wird, folgt daher

$$\begin{aligned} d\,A &= \frac{1}{2}\sum_i\sum_k (d\,A_i + d\,A_k) = \frac{1}{2}\sum_i\sum_k \{(d\,L_{ik})_i + (d\,L_{ik})_k\}\,I_i\,I_k \\ &= \frac{1}{2}\sum_i\sum_k d\,L_{ik}\,I_i\,I_k. \end{aligned} \qquad (190')$$

Die Formel bleibt auch für den allgemeineren Fall richtig, daß infolge der Deformationen der einzelnen Leiter die Selbstinduktionskoeffizienten ebenfalls Veränderungen erleiden. Den Beweis wollen wir hier nicht bringen.

Schreibt man die Gleichung (190′) in der Form

$$\frac{d\,A}{d\,t} = \frac{1}{2}\sum_i\sum_k \frac{d\,L_{ik}}{d\,t}\,I_i\,I_k$$

und vergleicht sie mit Gleichung (189), so erkennt man, daß die Arbeit der ponderomotorischen Kräfte des Feldes, die bei der Bewegung und Deformation der Leiter geleistet wird, gleich der Zunahme der magnetischen Feldenergie ist. Die Arbeit erfolgt somit keinesfalls auf Kosten der Feldenergie, im Gegenteil, die Feldenergie wächst um denselben Betrag. Als primäre „Arbeitsleister" sind die Stromquellen der einzelnen Kreise zu betrachten. Wird z. B. bei der Bewegung eines Leiters in diesem durch Induktion eine elektromotorische Kraft erzeugt, so muß mittels eines Potentiometers die an den Kreis gelegte Spannung gesteigert werden, um die Stromstärke unverändert zu erhalten (diese Konstanz ist die Vorbedingung für die Gültigkeit der Gleichungen (189) und (190′)). Der gesteigerten Spannung entspricht eine vergrößerte Stromarbeit.

Die von selbst eintretende, natürliche Bewegung der Leiter ist die, die mit einer positiven Arbeitsleistung der ponderomotorischen Kräfte verbunden ist. Dabei vergrößert sich unserer Feststellung gemäß auch die magnetische Ener-

gie. Dieser Umstand kann zur Aufstellung eines Prinzipes benutzt werden: Bei gleichbleibenden Stromstärken strebt die magnetische Feldenergie der Leiter einem Maximum zu. Im Gleichgewichtszustand ist dieses Maximum erreicht. Betrachten wir z. B. zwei starre Leiter. Der veränderliche Teil der Energie ist dann

$$U_{12} = L_{12} I_1 I_2.$$

Es ist dies jener Teil der magnetischen Energie, der vom gemeinsamen Fluß der beiden Leiterkreise herrührt. Diesen gemeinsamen Fluß stellen jene Induktionslinien dar, die beide Kreise zugleich umschlingen. Die zwei Leiter suchen sich daher so zu orientieren, daß der gemeinsame Fluß möglichst groß wird. Bei ebenen Leitern wird das dann eintreten, wenn die Ebenen parallel, die Ströme gleichsinnig sind und die Stellen größter Liniendichte sich in Deckungslage befinden. Daher resultiert die qualitative Regel, daß parallele und gleichgerichtete Ströme einander anziehen. Zum selben Resultat führt übrigens auch das COULOMBsche Gesetz, wenn die zwei Stromkreise durch magnetische Doppelschichten ersetzt werden.

§ 67. Berechnung von Induktionskoeffizienten

1. *Selbstinduktionskoeffizient einer Spule.* Wir setzen voraus, daß der Radius des Drahtes klein sei im Vergleich zum Halbmesser R der Spule und dieser wieder klein gegenüber der Spulenlänge l. Im Innern der Spule wirken dann nach Gleichung (143) die magnetische Feldstärke

$$|\mathfrak{H}| = \frac{4\pi}{c} \frac{nI}{l}$$

und die Energie

$$U_m = \frac{\mu}{8\pi} \int \mathfrak{H}^2 d\tau = \frac{\mu}{8\pi} \mathfrak{H}^2 R^2 \pi l = \frac{2\pi^2 \mu R^2 n^2}{c^2 l} I^2.$$

Andererseits ist

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2.$$

Aus der Gleichsetzung der beiden Ausdrücke folgt

$$L = \frac{4\pi \mu n^2}{c^2 l} R^2 \pi.$$

Die Rechnung setzt voraus, daß die gesamte magnetische Energie im Innern der Spule konzentriert sei. Bei langen und engen Spulen ist diese Annahme zulässig, bei Ringspulen noch viel mehr. Besitzt die Spule einen Eisenkern, so wächst der Selbstinduktionskoeffizient wegen $\mu \approx 500$ ganz beträchtlich.

2. *Zwei parallele Kreisleiter* (Abb. 19). Die Radien der zwei Kreise seien R_1 und R_2, der Abstand ihrer Ebenen b. Wir wählen zwei Leiterelemente $d\mathfrak{s}_1$ bzw.

$d\mathfrak{s}_2$ aus, die um den Winkel ϑ gegeneinander verdreht sind. Der Kosinussatz ergibt ihre Entfernung:

$$r_{12}^2 = b^2 + R_1^2 + R_2^2 - 2\,R_1 R_2 \cos\vartheta,$$

und ihr skalares Produkt ist

$$(d\mathfrak{s}_1, d\mathfrak{s}_2) = ds_1 ds_2 \cos\vartheta.$$

Wir gehen vom allgemeinen Ausdruck des gegenseitigen Induktionskoeffizienten aus:

$$L_{12} = \frac{\mu}{c^2} \oint \frac{(d\mathfrak{s}_1 \cdot d\mathfrak{s}_2)}{r_{12}},$$

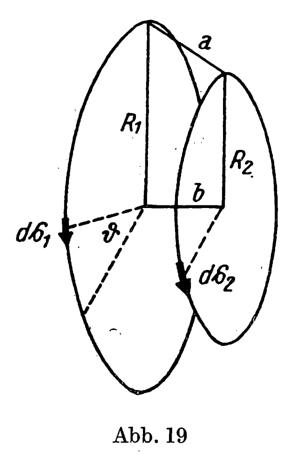


Abb. 19

und integrieren bei fixiertem ds_1 zuerst nach $ds_2 = R_2 d\vartheta$:

$$L_{12} = \frac{\mu}{c^2} \oint d\mathfrak{s}_1 \oint \frac{R_2 \cos\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{b^2 + R_1^2 + R_2^2 - 2\,R_1 R_2 \cos\vartheta}}.$$

Das erste Integral gibt $\oint ds_1 = 2\pi R_1$, daher

$$L_{12} = \frac{2\pi\mu}{c^2} \int\limits_0^{2\pi} \frac{R_1 \cdot R_2 \cos\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{b^2 + R_1^2 + R_2^2 - R_1 R_2 \cos\vartheta}}.$$

Jetzt führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$k^2 = \frac{4\,R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2 + b^2}, \quad \vartheta = \pi - 2\varphi.$$

Dann wird

$$\cos\vartheta = -\cos 2\varphi = 2\sin^2\varphi - 1,$$

$$r_{12} = \sqrt{b^2 + R_1^2 + R_2^2 - 4\,R_1 R_2 \sin^2\varphi + 2\,R_1 R_2} = \sqrt{b^2 + (R_1 + R_2)^2}\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}.$$

Man erhält damit

$$L_{12} = \frac{4\pi\mu}{c^2}\, k\, \sqrt{R_1 R_2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2\varphi - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}\, d\varphi.$$

Der Integrand kann in zwei Summanden zerlegt werden:

$$\frac{2\sin^2\varphi - 1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{k^2}\left\{\frac{2 - k^2}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} - 2\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\right\}.$$

Damit ist erreicht, daß L_{12} als Summe von zwei vollständigen elliptischen Integralen erster und zweiter Gattung dargestellt werden kann. Wir benutzen die gebräuchlichen Bezeichnungen

$$K = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \quad E = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

und erhalten

$$L_{12} = \frac{4\pi\mu}{c^2}\sqrt{R_1 R_2}\left\{\left(\frac{2}{k} - k\right)K - \frac{2E}{k}\right\}. \tag{191}$$

Die Integralwerte K und E können für ein bekanntes k entsprechenden Tabellen entnommen werden.

Bisher sind die Rechnungen ohne Vernachlässigungen durchgeführt. Jetzt aber wollen wir unsere Resultate zwecks Vereinfachung auf jenen speziellen Fall anwenden, daß die Halbmesser der Kreisleiter nur sehr wenig verschieden seien und auch der Abstand b klein sei gegenüber den Radien:

$$|R_1 - R_2| \ll R_1, \quad b \ll R_1.$$

Dann wird auch der Abstand

$$a = \sqrt{(R_1 - R_2)^2 + b^2}$$

der Peripherien klein im Verhältnis zu den Halbmessern. Aus der Gleichung

$$\varepsilon^2 \equiv 1 - k^2 = \frac{(R_1 - R_2)^2 + b^2}{(R_1 + R_2)^2 + b^2} \approx \left(\frac{a}{2R}\right)^2$$

ist ersichtlich, daß k beinahe 1 wird und daher in guter Näherung

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi = 1$$

ist. Etwas umständlicher ist die Berechnung von K, da der Integrand für $k = 1$ in der Umgebung von $\frac{\pi}{2}$ unendlich wird. Durch die Transformation $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ erhalten wir

$$K = \int_0^{\psi_0} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\cos^2\psi}} + \int_{\psi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\cos^2\psi}}.$$

ψ_0 soll ein kleiner Winkel sein von der Größenordnung $1 - k^2 \ll \psi_0 \ll 1$. In das zweite Integral kann anstandslos der Wert $k = 1$ eingesetzt werden. Man erhält

$$\int_{\psi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sin\psi} = \ln \operatorname{tg}\frac{\psi_0}{2} \approx \ln\frac{\psi_0}{2}.$$

Im ersten Integral, in dem ψ nur kleine Werte annimmt, schreibt man statt $\cos^2\psi$ $1 - \psi^2$. Dadurch wird das Integral

$$\int_0^{\psi_0} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 + k^2\psi^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{\varepsilon^2 + k^2\psi^2}}.$$

Es folgt daher

$$K = \ln \frac{1}{\varepsilon} \left(\psi_0 + \sqrt{\varepsilon^2 + \psi_0^2}\right) - \ln \frac{\psi_0}{2}.$$

Hier kann noch ε^2 unter der Wurzel neben ψ_0^2 vernachlässigt werden. Damit wird

$$K = \ln \frac{2\psi_0}{\varepsilon} - \ln \frac{\psi_0}{2} = \ln \frac{4}{\varepsilon} = \ln \frac{8R}{a},$$

so daß

$$L_{12} = \frac{4\pi\mu}{c^2} R \left(\ln \frac{8R}{a} - 2\right). \tag{192}$$

Die erhaltene Formel befähigt dazu, für jedes Windungspaar einer gegenüber ihrem Halbmesser kurzen Spule den Wechselinduktionskoeffizienten zu berechnen. Die strenge Formel (191) ermöglicht dasselbe im Falle einer beliebigen Spule. Es ist jedoch klar, daß die Summe dieser Koeffizienten über alle Paare noch nicht den Selbstinduktionskoeffizienten der ganzen Spule ergibt. Dazu ist notwendig, die Selbstinduktionskoeffizienten der einzelnen Windungen der Summe beizufügen. Unsere nächste Aufgabe besteht daher in der Bestimmung des Selbstinduktionskoeffizienten einer Windung.

3. *Selbstinduktionskoeffizienten eines kreisförmigen Leiters.* Der Halbmesser des Leiters sei R, der des Drahtes r. Wir setzen voraus, daß $r \ll R$ ist. Die Stärke des Stromes sei I.

Der Induktionsfluß, den der Strom erregt, besteht anschaulich aus zwei Teilen. Der erste verläuft ausschließlich im äußeren Medium mit der Permeabilität μ_e und ist durch den Kreis mit dem Halbmesser $R - r$ begrenzt. Der zweite beschränkt sich auf die Leitersubstanz mit der Permeabilität μ_i. Diesen zwei Teilen entsprechend, zerlegen wir den totalen Selbstinduktionskoeffizienten L ebenfalls in zwei Teile:

$$L = L_e + L_i.$$

Um L_e zu berechnen, greifen wir zu einer Näherung. Wir denken uns, der ganze Strom fließe in der Mittellinie des Drahtes, also in einem Kreis mit dem Halbmesser R. Dann ist L_e durch die Gleichung (183) definiert:

$$\frac{1}{c} F_e = L_e I,$$

wobei F_e jenen Fluß bedeutet, den der Strom durch den Kreis mit dem Radius R hindurchsendet. L_e ist daher der gegenseitige Induktionskoeffizient der Kreise mit den Halbmessern R bzw. $R - r$ und folgt aus Gleichung (192), wenn man den dortigen Peripherieabstand a durch r ersetzt:

$$L_e = \frac{4\pi\mu_e}{c^2} R \left(\ln \frac{8R}{r} - 2\right). \tag{193}$$

Für L_i erweist sich die Definition, die in Gleichung (187) enthalten ist, als bequem. Auf unseren Fall angewendet, lautet Gleichung (187)

$$U_m = \frac{1}{2} L_i I^2, \tag{194}$$

wobei aber U_m nur die im Drahtraum enthaltene Feldenergie bedeutet. Diese ist leicht zu berechnen, wenn man die Feldstärke $\mathfrak{H}$ der Formel (152) entnimmt, die für einen langen geraden Draht abgeleitet wurde:

$$|\mathfrak{H}| = \frac{2I}{c\,r^2}\,\varrho;$$

ϱ bezeichnet den Abstand von der Drahtachse. Auf die Längeneinheit des Drahtes entfällt die Energie

$$\frac{\mu_i}{8\pi}\int_0^r \mathfrak{H}^2\, 2\pi\varrho\, d\varrho = \frac{\mu_i I^2}{4c^2}.$$

Da die Drahtlänge $2\pi R$ beträgt, wird die gesamte innere magnetische Energie

$$U_m = \frac{\mu_i \pi I^2}{2c^2}.$$

Der Vergleich mit Gleichung (194) ergibt

$$L_i = \mu_i \frac{\pi}{c^2} R. \tag{195}$$

Der volle Selbstinduktionskoeffizient des Kreisleiters lautet daher auf Grund der Gleichungen (193) und (195)

$$L = \frac{4\pi R}{c^2}\left\{\frac{\mu_i}{4} + \mu_e\left(\ln\frac{8R}{r} - 2\right)\right\}. \tag{195'}$$

Die relative Größenordnung der in der Klammer enthaltenen zwei Summanden hängt wesentlich davon ab, ob der Draht aus ferromagnetischem Stoff besteht oder nicht. Wenn ja, wird $\mu_i \approx 500$, $\mu_e = 1$. Übersteigt $\frac{R}{r}$ den Wert von 100 nicht, so wird das erste Glied vielfach größer als das zweite. Der überwiegende Teil der Energie befindet sich im Draht. Handelt es sich jedoch um Kupferdraht ($\mu_i = 1$), so liegt der größte Teil der Energie im äußeren Felde.

Jetzt kann durch die Gleichung (192) und (195') der Selbstinduktionskoeffizient einer zylindrischen Spule berechnet werden. Die Rechnung ist bei einer größeren Windungszahl viel zu mühsam, um von Fall zu Fall ausgeführt zu werden. Man findet in technischen Lehrbüchern Näherungsformeln, die dem besonderen Typ der Spule angepaßt sind und eine schnelle Rechnung ermöglichen.

§ 68. LENZsche Regel

Ein geschlossener Leiter möge im magnetischen Felde so bewegt werden, daß sich der durch ihn durchtretende Induktionsfluß F ändert. Dann wird im Leiter ein Strom der Stärke I induziert, für den nach Gleichung (178) folgt:

$$IR = -\frac{1}{c}\frac{dF}{dt}.$$

Zugleich wirken auf den Leiter ponderomotorische Kräfte, die nach Gleichung (190) die Arbeit

$$d A = \frac{I}{c} d F = \frac{I}{c} \frac{d F}{d t} d t$$

leisten. Wird hier für I der Ausdruck $-\frac{1}{R c} \frac{d F}{d t}$, wie er aus der vorletzten Gleichung folgt, eingesetzt, so erhält man

$$d A = -\frac{1}{R c^2} \left(\frac{d F}{d t}\right)^2 d t.$$

Die Arbeit ist stets negativ. Die Bewegung erfordert die Überwindung der ponderomotorischen Kräfte. Der Induktionsstrom hat daher immer eine solche Richtung, daß die auftretenden ponderomotorischen Kräfte die induzierende Bewegung zu verhindern suchen. Dies ist die bekannte LENZsche Regel.

§ 69. Stromkreis mit Widerstand und Selbstinduktion

Wir befassen uns im folgenden als Anwendung der allgemeinen Gleichungen mit Stromerscheinungen, wie sie in einem bzw. in zwei unbewegten Leitern auftreten.

Als ersten Fall betrachten wir einen Stromkreis, der den OHMschen Widerstand R und den Selbstinduktionskoeffizienten L besitzt. Maßgebend für diesen Fall ist das Gleichungssystem (185), das sich für einen Stromkreis auf die Gleichung

$$R I + L \frac{d I}{d t} = E \tag{196}$$

reduziert. Vom analytischen Standpunkt betrachtet, liegen die Verhältnisse am einfachsten, wenn die elektromotorische Kraft E verschwindet. Praktisch bedeutet dies, daß wir im Leiter z. B. durch Induktionsstoß im Zeitpunkt $t = 0$ einen Strom I_0 erzeugen und diesen sich selbst überlassen. Die Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$R I + L \frac{d I}{d t} = 0$$

lautet

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}. \tag{197}$$

Die Stromstärke nimmt exponentiell mit der Zeit ab. Die Abnahme der Stromstärke erfolgt um so langsamer, je größer der Induktionskoeffizient L im Vergleich zu R ist. Ein Strom von längerer Dauer erzeugt nun eine größere JOULEsche Wärme. Da aber bei großem L zur Erzeugung des Stromes I_0 auch eine größere Arbeit erforderlich ist, besteht kein energetischer Widerspruch.

Der nächsteinfache Fall besteht darin, daß die elektromotorische Kraft konstant ist. Wird z. B. eine Batterie zur Zeit $t = 0$ eingeschaltet, so ist die ent-

sprechende Stromstärke $I_0 = 0$. Die Gleichung kann jetzt durch die Substitution $I = \bar{I} + \frac{E}{R}$ homogen gemacht werden:

$$R\bar{I} + L\frac{d\bar{I}}{dt} = 0.$$

Die Lösung ist

$$I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \tag{198}$$

Nicht sofort nach dem Einschalten, sondern erst nach dem Abklingen des exponentiellen Gliedes nimmt die Stromstärke den Wert an, den das OHMsche Gesetz erfordert.

In die energetischen Verhältnisse erhalten wir Einblick, wenn wir die Gleichung (196) beiderseits mit I multiplizieren und in folgender Anordnung schreiben:

$$EI = I^2R + LI\frac{dI}{dt} = I^2R + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2\right).$$

Das letzte Glied bedeutet die Änderung der magnetischen Energie pro Zeiteinheit. Nun möge die Batterie aus dem Kreis abgeschaltet werden. Das kann leicht dadurch geschehen, daß der Stromkreis geschlossen bleibt. Dann wird die Energiegleichung

$$I^2R = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2\right).$$

Die JOULEsche Wärme, die durch den exponentiellen abklingenden Strom erzeugt wird, findet ihre Quelle in der abnehmenden Energie des Feldes.

Zu charakteristischen neuen Erkenntnissen führt die Annahme, daß sich die elektromotorische Kraft des Kreises mit der Zeit periodisch ändert:

$$E = E_0 \cos \omega t.$$

E_0 ist die Amplitude, ω die Kreisfrequenz $2\pi\nu$ der eingeschalteten Wechselspannung. Gleichung (196) wird jetzt

$$RI + L\frac{dI}{dt} = E_0 \cos \omega t. \tag{199}$$

Bedenkt man, daß $\cos\omega t$ der reelle Teil der Funktion $e^{i\omega t}$ ist, so kann die Gleichung viel handlicher gemacht werden, indem man die Exponentialfunktion einsetzt. Dann ergibt sich zwar eine komplexe Lösung für I, aber der reelle Anteil befriedigt die ursprüngliche Gleichung (199). In diesem Sinne schreiben wir die Gleichung in der Gestalt

$$RI + L\frac{dI}{dt} = E_0 e^{i\omega t}. \tag{200}$$

Die Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung besteht bekanntlich aus der Summe aus einer Partikularlösung und einer vollständigen Lösung der

homogenen Gleichung. Diese letztere steht uns in Gleichung (197) bereits zur Verfügung:

$$I = A e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Durch Variation der Konstanten A erhält man eine partikuläre Lösung. Wir betrachten daher A als Funktion von t und erhalten

$$\frac{dI}{dt} = \left(\frac{dA}{dt} - \frac{R}{L} A\right) e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Setzt man die Ausdrücke für I und $\frac{dI}{dt}$ in Gleichung (200) ein, so folgt

$$\frac{dA}{dt} = \frac{E_0}{L} e^{\left(\frac{R}{L} + i\omega\right) t}$$

und nach Integration

$$A = \frac{E_0}{R + i\omega L} e^{\left(\frac{R}{L} + i\omega\right) t} + C.$$

Es wird somit

$$I = \frac{E_0}{R + i\omega L} e^{i\omega t} + C e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Das zweite zeitlich abklingende Glied trägt zur Ausbildung bleibender Verhältnisse nichts bei und soll deshalb weggelassen werden. Es verbleibt als stationäre Lösung

$$I = \frac{E_0}{R + i\omega L} e^{i\omega t}. \tag{201}$$

Endlich ist noch die Spaltung in den reellen und imaginären Bestandteil vorzunehmen. Zu diesem Zweck schreiben wir

$$\frac{1}{R + i\omega L} = \frac{R - i\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = a - ib$$

mit

$$a = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad \text{und} \quad b = \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Führen wir den Winkel δ durch die Definition

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\omega L}{R}$$

ein, so wird

$$I = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{i(\omega t - \delta)},$$

und die endgültige Form der Lösung lautet

$$I = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \delta). \tag{202}$$

Wie man sieht, hat die Stromstärke dieselbe Frequenz wie die elektromotorische Kraft. Aber die beiden Größen schwingen nicht in derselben Phase. Die Stromstärke erreicht die jeweilige Phase der elektromotorischen Kraft um die Zeit $\frac{\delta}{\omega}$ später. Man nennt δ den Phasenwinkel.

Der Vergleich mit dem OHMschen Gesetz zeigt, daß der Ausdruck $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ als Widerstand des Kreises zu betrachten ist. Sein Wert hängt nicht nur von den Daten des Kreises ab, sondern auch von der Stromfrequenz. Man nennt diesen Widerstand Impedanz. Der Teil ωL heißt Induktanz oder induktiver Widerstand.

Abb. 20 gibt von allen hier auftretenden Größen ein anschauliches Bild. Der OHMsche Widerstand R wird von dem Anfangspunkt auf der reellen X-Achse abgetragen, im Endpunkt senkrecht dazu der induktive Widerstand ωL. Kurz gefaßt, die Größe $R + i\omega L$ wird in der komplexen Zahlenebene durch den Punkt P dargestellt. Der absolute Wert $\overline{OP}$ gibt die Impedanz, der Bogen δ den Phasenwinkel.

Abb. 20

Wir bezeichnen die Amplitude oder den Scheitelwert des Stromes

$$\frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

mit I_0 und schreiben

$$I = I_0 \cos(\omega t - \delta). \tag{203}$$

Zunächst interessiert uns die Leistung der periodischen elektromotorischen Kraft:

$$E\,I = E_0\,I_0 \cos\omega t \cdot \cos(\omega t - \delta).$$

Wegen der schnellen Veränderlichkeit hat nur der zeitliche Mittelwert praktische Bedeutung. Wir bilden den Mittelwert über die Zeit $T = \frac{2\pi}{\omega}$ einer Periode:

$$\overline{E\,I} = E_0\,I_0 \frac{1}{T} \int_0^T \cos\omega t \cdot \cos(\omega t - \delta)\,dt$$

$$= E_0\,I_0 \frac{1}{T} \int_0^T (\cos^2\omega t \cdot \cos\delta + \cos\omega t \cdot \sin\omega t \cdot \sin\delta)\,dt.$$

Der Mittelwert von $\cos^2\omega t$ beträgt $\frac{1}{2}$, der von $\cos\omega t \cdot \sin\omega t$ ist Null. Daher wird

$$\overline{E\,I} = \frac{1}{2}\,E_0\,I_0 \cos\delta = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\,\frac{I_0}{\sqrt{2}} \cos\delta.$$

Nach Gleichung (203) ist $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$ die Wurzel aus dem Mittelwert von I^2. Ebenso ist $\frac{E_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{\overline{E^2}}$. Diese Größen werden effektive Stromstärke bzw. effektive elektromotorische Kraft genannt. Hitzdrahtinstrumente messen diese Größen. Wir haben daher

$$\overline{E\,I} = E_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}} \cos\delta. \tag{204}$$

Nähert sich der Phasenwinkel δ dem Wert $\pi/2$, so konvergiert die Stromleistung gegen Null. Es entsteht keine nennenswerte JOULEsche Wärme. Man spricht in diesem Falle von wattlosem Strom. Ein derartiger Strom fließt z. B. im unbelasteten Transformator. Sein Energieverbrauch ist so gering, daß ein Ausschalten unnötig ist.

§ 70. „Vektor“diagramm

Bisher wurde die analytische Lösung der Gleichung (200) besprochen. Diese kann aber auch graphisch gelöst werden (Abb. 21). Bekanntlich wird die komplexe Zahl $a + ib$ in der komplexen Zahlenebene durch einen Vektor dargestellt. Wird der absolute Wert der Zahl mit r, ihr Arcus mit φ bezeichnet, so erfolgt die Darstellung in der Weise, daß auf die reelle Achse der Winkel φ aufgetragen und auf seinen freien Schenkel der Wert r aufgemessen wird. In diesen Polarkoordinaten wird

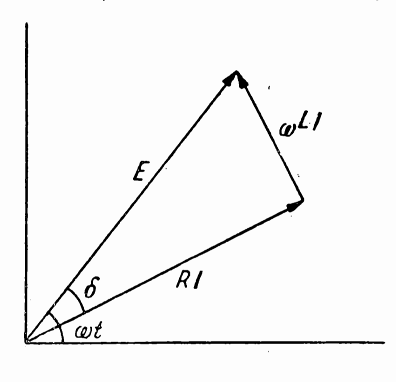


Abb. 21

$$a + ib = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r e^{i\varphi}.$$

Die gegebene elektromotorische Kraft $E_0 e^{i\omega t}$ kann daher als Vektor vom Betrage E_0 dargestellt werden, der mit der reellen Achse den veränderlichen Winkel ωt einschließt. Der „Vektor E“ dreht sich daher mit der Winkelgeschwindigkeit ω um den Anfangspunkt in der Richtung reelle–imaginäre Achse. Die Summe zweier komplexer Zahlen entspricht der Resultanten der darstellenden Vektoren. Was das Produkt der Zahlen $r_1 e^{i\varphi_1}$ und $r_2 e^{i\varphi_2}$ anbelangt, so wird der Absolutwert r_1, r_2, der Arcus $\varphi_1 + \varphi_2$. Da nun $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ist, bedeutet Multiplikation mit i die positive Drehung des zu multiplizierenden Vektors um 90°. Die zeitliche Differentiation der Größe $Ae^{i\omega t}$ erfolgt durch Multiplizieren mit $i\omega$.

Setzt man daher voraus, daß die Gleichung (200) eine Lösung von der Gestalt $I = I_0 e^{i\omega t}$ besitzt, so kann die Gleichung folgendermaßen geschrieben werden:

$$RI + i\omega LI = E.$$

Sie besagt, daß der Vektor E die zwei orthogonalen Komponenten RI und $\omega L I$ hat. Die gegebene Größe E kann mit Hilfe des Absolutwertes E_0 und des Bogens ωt leicht konstruiert werden. Der Endpunkt des entsprechenden Vektors beschreibt während einer Periode einen Kreis um den Anfangspunkt. Die Richtung von RI ist in jedem Augenblick durch den Bogen $\omega t - \delta$ gegeben. Es handelt sich also darum, E in zwei senkrechte Komponenten zu zerlegen. Nach Lösung dieser elementaren Aufgabe kann man durch Projektion auf die reelle Achse auch die reellen Komponenten der Vektoren E, RI und $\omega L I$ konstruieren.

§ 71. Stromkreis mit Selbstinduktion, Kapazität und Widerstand

Wir ergänzen unsere bisherigen Betrachtungen und denken uns in den Stromkreis einen Kondensator mit der Kapazität C eingeschaltet (Abb. 22). Der Leitungsstrom endet an den Belegungen, die Fortsetzung zwischen diesen bleibt dem Verschiebungsstrom überlassen. Die von den Klemmen des Kondensators ausgehenden Flächenströme über die Belegungen und der Verschiebungsstrom durch das Dielektrikum nehmen dem Kreis den Charakter der Linearität. Strenggenommen müßte man daher den geschlossenen Strom in elementare Röhren zerlegen und den Induktionsfluß für jede einzelne Röhre berechnen. Ist jedoch der Abstand der Platten klein, so wird der Induktionsfluß der einzelnen Röhren nur sehr wenig von jenem abweichen, den der Kreis mit kurzgeschlossenem Kondensator besitzt. In dieser Näherung kann man daher von einem linearen Strom sprechen und die elektromotorische Kraft der Induktion gleich $-L\frac{dI}{dt}$ setzen. Damit lassen wir allerdings das magnetische Feld im Dielektrikum des Zwischenraumes, das durch den Verschiebungsstrom entsteht, außer acht. Dieses ist jedoch sehr schwach und auf einen kleinen Raum beschränkt.

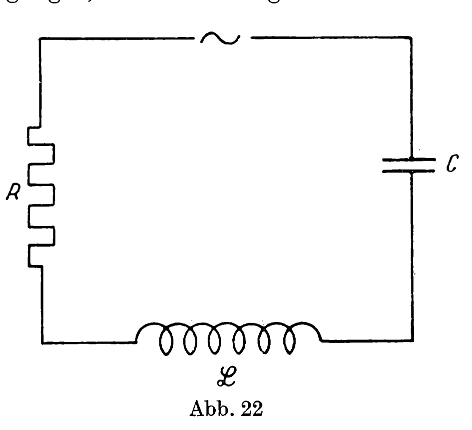


Abb. 22

Da der Leitungsstrom jetzt nicht geschlossen ist, muß das verallgemeinerte OHMsche Gesetz im Sinne der Gleichung (135) in folgender Form geschrieben werden:

$$RI = E + (\Phi_1 - \Phi_2) - L\frac{dI}{dt}.$$

Bezieht man die Stromrichtung auf die des Potentialgefälles, so bedeutet positives I, daß der Strom in der Richtung dieses Gefälles, d. h. von der positiven

Belegung zur negativen fließt. Ist daher die momentane Ladung der positiven Belegung e, so wird

$$I = -\frac{de}{dt} \quad \text{und} \quad e = -\int_{t_0}^{t} I\,dt,$$

wobei t_0 einen Zeitpunkt bedeutet, in dem die Belegung ladungslos war. Für die Potentialdifferenz gilt

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{e}{C} = -\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} I\,dt.$$

Dies eingesetzt, lautet die Stromgleichung:

$$RI = E - \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} I\,dt - L\frac{dI}{dt}.$$

Schafft man noch mittels Zeitdifferentiation das Integral weg, so entsteht die Gleichung zweiter Ordnung

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{E}. \tag{205}$$

Wir integrieren die Gleichung zuerst für $E = 0$ und nachfolgend für

$$E = E_0 e^{i\omega t}.$$

1. Den Kreis, der keine elektromotorische Kraft enthält, denken wir uns durch einen einmaligen Induktionsstoß, der z. B. auf die Spule L wirkt, erregt und dann sich selbst überlassen. Die Vorgänge werden durch die Gleichung

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0 \tag{206}$$

beschrieben. Sie ist das Analogon derjenigen Gleichung, die in der Mechanik gedämpfte Schwingungen beschreibt. Die entsprechende charakteristische Gleichung $Lk^2 + Rk + \frac{1}{C} = 0$ besitzt die Wurzeln

$$k_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{CL}}.$$

Die Lösung wird daher

$$I = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t}.$$

Nun sind je nach dem Wert der Diskriminante zwei Fälle zu unterscheiden. Ist

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{CL} \geqq 0,$$

dann sind die zwei Wurzeln k_1, k_2 reell und negativ. I ist keine periodische Funktion der Zeit. Wir wählen die Anfangsbedingung, daß die Entladung des

Kondensators und daher auch die Entstehung des Stromes im Augenblick $t = 0$ beginnt. Damit wird $c_2 = -c_1$ und

$$I = c_1(e^{k_1 t} - e^{k_2 t}).$$

Die Stromstärke steigt von Null bis zu einem gewissen Maximum an, dessen Zeitpunkt durch die Gleichung

$$k_1 e^{k_1 t} - k_2 e^{k_2 t} = 0$$

angegeben wird:

$$t = \frac{\ln k_2 - \ln k_1}{k_1 - k_2}.$$

Nachdem der Scheitelwert erreicht ist, fällt die Stromstärke rasch gegen Null ab.

Vom physikalischen Standpunkt aus wesentlich wichtiger ist der Fall der negativen Diskriminante. Wir gebrauchen die Bezeichnung

$$\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{CL}} = i\omega$$

und schreiben mit $c_1 = \frac{a}{2i}$

$$I = \frac{a}{2i} e^{-\frac{R}{2L}t} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) = a e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega t. \tag{207}$$

Die Entladung des Kondensators erfolgt jetzt in der Form oszillierender Ströme. Die Belegungen laden sich abwechselnd mit positiver und negativer Elektrizität auf. Besitzt der Kreis eine Funkenstrecke, so entsteht nicht ein Funke, sondern eine ganze Reihe solcher Funken (FEDDERSEN, 1858), die im rotierenden Spiegel beobachtet und auch photographiert werden können. Die Amplituden der Stromschwingungen sind jedoch nicht konstant. Der Faktor $e^{-\frac{R}{2L}t}$ in Gleichung (207) zeigt, daß es sich um gedämpfte Schwingungen handelt. Kann $\left(\frac{R}{2L}\right)^2$ gegen $\frac{1}{CL}$ vernachlässigt werden, so wird die Frequenz der Schwingungen

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Dies ist die bekannte THOMSONsche Formel. ω_0 wird Eigenfrequenz des Kreises genannt. Durch passende Dimensionierung kann erreicht werden, daß die Frequenz entsprechend ansteigt. Der Induktionsfluß, der durch die Spule des Kreises geht, ändert sich dann sehr schnell. $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$ nimmt sehr große Werte an. TESLA (1891) benutzte eine aus wenigen weiten Windungen bestehende Spule als Primärteil eines Transformators. An den Polen der Sekundärspule, die aus vielen Windungen dünnen Drahtes bestand, ergaben sich dann überaus hohe Wechselspannungen.

Wir behandeln noch kurz den allgemeineren Fall einer eingeschalteten periodischen elektromotorischen Kraft. Die zu lösende Differentialgleichung lautet dann

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C} I = i\omega E_0 e^{i\omega t}.$$

Man erkennt in ihr die Struktur der Gleichung der erzwungenen Schwingungen. Wir beschränken uns auf die stationäre Lösung und erhalten mit $I = I_0 e^{i\omega t}$ die algebraische Gleichung

$$I_0\left(-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C}\right) = i\omega E_0 \quad \text{und daraus} \quad I_0 = \frac{E_0}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

Es wird daher

$$I = \frac{E_0 e^{i\omega t}}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

Die Lösung unterscheidet sich von Gleichung (201) nur dadurch, daß an Stelle von ωL jetzt $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ steht. Die endgültige reelle Lösung folgt daher sofort aus Gleichung (202)

$$I = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\omega t - \delta), \tag{208}$$

wobei aber jetzt

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

ist. Zwischen Stromstärke und elektromotorischer Kraft besteht wieder eine Phasenverschiebung. Im reinen RC-Kreise, in dem $L = 0$ ist, wird

$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{1}{\omega C R}.$$

Die Phase der Stromstärke eilt derjenigen der elektromotorischen Kraft voraus. Selbstinduktion bewirkt Verzögerung, Kapazität hingegen Beschleunigung der Stromphase. Im Fall $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ verschwindet die Phasenverschiebung, und die Impedanz reduziert sich auf den OHMschen Widerstand R. Zugleich wird

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0.$$

In Worte gefaßt, heißt das: Stimmt die Frequenz der eingeschalteten elektromotorischen Kraft mit der Eigenfrequenz des Kreises überein (Resonanzfall), dann verschwindet die Phasenverschiebung, und die Amplitude der Stromstärke nimmt ihren Scheitelwert $\frac{E_0}{R}$ an.

Der Ausdruck $-\frac{1}{\omega C}$ heißt kapazitiver Widerstand. Er wird um so kleiner, je größer die Kapazität des Kondensators und die Frequenz der Schwingungen ist. Abb. 23 zeigt, wie Impedanz und Phasenverschiebung graphisch dargestellt werden können.

Die Stromleistung wird auch jetzt durch den Ausdruck $E_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}} \cos\delta$ gegeben. Ist vom Standpunkte der Leistung der Wert von δ in einem RL-Kreise ungünstig, so ist leicht einzusehen, daß er durch Einschalten einer Kapazität in gewünschter Weise abgeändert werden kann.

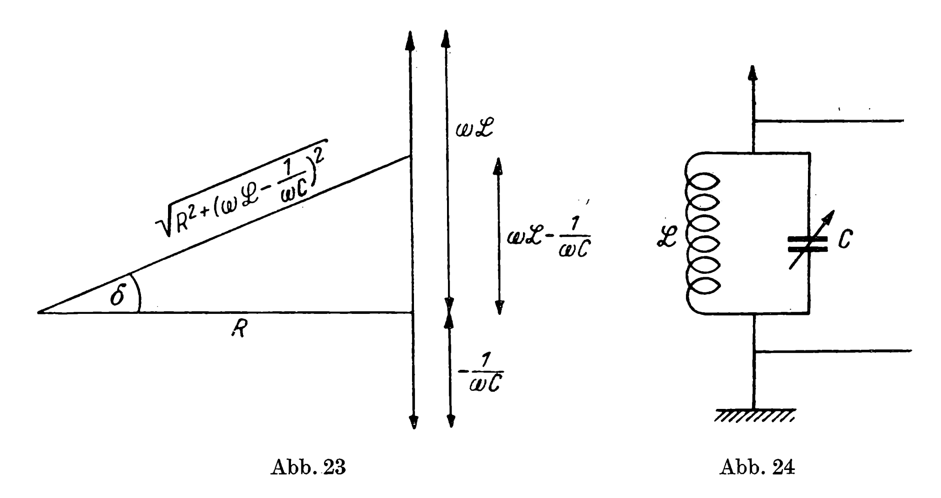


Abb. 23 Abb. 24

Der Strom einer Antenne geht bekanntlich durch einen Schwingungskreis, der durch die veränderliche Kapazität des Drehkondensators auf die Empfangsfrequenz abgestimmt wird. Wir fragen nach dem Widerstand des Kreises. Der Einfachheit halber möge der OHMsche Widerstand vernachlässigt werden. Nach Abb. 24 sind induktiver und kapazitiver Widerstand parallelgeschaltet. Nennt man den resultierenden Widerstand r, so wird

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\omega L} - \omega C = -\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega L}.$$

Infolge der Abstimmung des Kreises wird ω gleich der Eigenfrequenz:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}, \quad \text{daher} \quad \frac{1}{r} = 0, \quad r = \infty.$$

Stellt man auch den OHMschen Widerstand in Rechnung, so wird r zwar nicht unendlich, aber noch immer sehr groß. Der abgestimmte Kreis repräsentiert einen beträchtlichen Widerstand. An seinen Zuleitungspunkten tritt eine große Potentialdifferenz auf, die der ersten Verstärkerstufe zugeleitet wird.

§ 72. Zwei induktiv gekoppelte Kreise

Wir denken uns zwei RL-Kreise. Im ersten wirkt die elektromotorische Kraft $E_0 e^{i\omega t}$, der zweite besitzt keine Stromquelle und erhält seine Anregung durch den Induktionsfluß, den der erste durch seine Spule hindurchsendet. Die für die Vorgänge maßgebenden Differentialgleichungen sind

$$L_{11}\dot{I}_1 + L_{12}\dot{I}_2 + R_1 I_1 = E_0 e^{i\omega t}, \quad L_{12}\dot{I}_1 + L_{22}\dot{I}_2 + R_2 I_2 = 0. \qquad (209)$$

Sind die Induktionsspulen der beiden Kreise so angeordnet, daß der Fluß der ersten Spule nur zu einem geringen Teil durch die zweite geht, so spricht man von schwacher Koppelung. Die beiden Spulen können auch auf einen lamellierten Eisenring montiert sein, wie das beim Transformator der Fall ist. Der ganze Induktionsfluß geht dann durch den Ring und somit durch beide Spulen hindurch. Man spricht hier von fester Koppelung. Zu bedenken ist jedoch, daß bei Anwesenheit eines Eisenkerns die Induktionskoeffizienten nach Gleichung (182) keine Konstanten mehr sind; denn μ hängt dann wesentlich von der Feldstärke $\mathfrak{H}$ ab.

Unter der Voraussetzung, daß die elektromotorische Kraft Ströme gleicher Frequenz erzeugt, können wir folgende Ansätze machen:

$$I_1 = i_1 e^{i\omega t}, \quad I_2 = i_2 e^{i\omega t}. \qquad (210)$$

i_1 und i_2 sind komplexe Zahlen, mit deren Hilfe etwaige Phasenverschiebungen beschrieben werden können:

$$i_1 = i_1^0 e^{-i\delta_1}, \quad i_2 = i_2^0 e^{-i\delta_2}.$$

Rückgehend erhalten wir somit

$$I_1 = i_1^0 e^{i(\omega t - \delta_1)}, \quad I_2 = i_2^0 e^{i(\omega t - \delta_2)}.$$

Es bedeuten δ_1 und δ_2 die Phasenverzögerungen der beiden Ströme der elektromotorischen Kraft gegenüber, i_1^0, i_2^0 die Stromamplituden. Wir setzen die Ausdrücke (210) in die Gleichungen (209) ein und erhalten

$$i\omega L_{11} i_1 + i\omega L_{12} i_2 + R_1 i_1 = E_0,$$

$$i\omega L_{12} i_1 + i\omega L_{22} i_2 + R_2 i_2 = 0.$$

Aus der Einführung der Abkürzungen

$$a_1 = R_1 + i\omega L_{11}, \quad a_2 = R_2 + i\omega L_{22}, \quad b = i\omega L_{12}$$

resultiert

$$a_1 i_1 + b i_2 = E_0,$$

$$b i_1 + a_2 i_2 = 0.$$

Die Lösung lautet

$$i_1 = E_0 \frac{a_2}{a_1 a_2 - b^2}, \quad i_2 = -E_0 \frac{b}{a_1 a_2 - b^2}. \qquad (211)$$

Der nächste Schritt würde darin bestehen, die reellen und imaginären Teile zu trennen und aus den sich ergebenden vier Gleichungen die vier Unbekannten i_1^0, i_2^0, δ_1 und δ_2 zu bestimmen. Wir begnügen uns damit, das Amplitudenverhältnis $\frac{i_2^0}{i_1^0}$ und die Phasendifferenz $\delta_2 - \delta_1$ der beiden Ströme zu berechnen. Wir erhalten

$$\frac{i_2^0}{i_1^0} e^{-i(\delta_2-\delta_1)} = -\frac{b}{a_2} = -\frac{i\omega L_{12}}{R_2 + i\omega L_{12}}.$$

Hier kann die Trennung in reelle und imaginäre Bestandteile leicht durchgeführt werden. Man erhält

$$\frac{i_2^0}{i_1^0} = \frac{\omega L_{12}}{\sqrt{R_2^2 + \omega^2 L_{22}^2}}, \quad \operatorname{tg}(\delta_2 - \delta_1) = -\frac{R_2}{\omega L_{22}}.$$

Es ist zu ersehen, daß die Amplitude des induzierten Stromes um so größer wird, je fester die Koppelung (je größer L_{12}) und je kleiner die Impedanz des zweiten Kreises ist. Der Tangens der Phasendifferenz der beiden Ströme wird im Falle $R_2 \ll \omega L_{22}$ eine sehr kleine negative Zahl, d. h. $\delta_2 - \delta_1 = \pi$. Die zwei Ströme haben entgegengesetzte Richtungen. Ihre ponderomotorische Wirkung äußert sich daher in gegenseitiger Abstoßung. Damit ist das Experiment ELIHU THOMSONS erklärt, bei dem der zweite Leiterkreis ein leichter Aluminiumring mit überaus kleinem OHMschem Widerstand war.

§ 73. Der Transformator

Aus der festen Koppelung, die beim Transformator vorliegt, ergeben sich einige Relationen zwischen den Induktionskoeffizienten. Die Windungszahl der primären Spule sei n_1, die der sekundären n_2. Da zwischen I_1 und I_2 eine Phasendifferenz besteht, wählen wir einen Zeitpunkt, in dem der Sekundärstrom gerade verschwindet: $I_1 \neq 0$, $I_2 = 0$. Der magnetische Induktionsfluß im Eisenkern sei in diesem Augenblick F. Da dieser durch alle n_1 Windungen des Primärkreises hindurchgeht, wird der Gesamtfluß durch diesen Kreis $F_1 = n_1 F$. Ebenso wird der durch den sekundären Kreis hindurchtretende Induktionsfluß $F_2 = n_2 F$. Andererseits folgt aus Gleichung (183)

$$F_1 = c L_{11} I_1, \quad F_2 = c L_{12} I_1.$$

Daher ist

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{L_{11}}{L_{12}} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Durch ähnliche Überlegungen findet man für den Fall, daß der Strom momentan nur im Sekundärkreis fließt:

$$\frac{L_{12}}{L_{22}} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Aus diesen Ergebnissen folgt:

$$L_{12} = \sqrt{L_{11} L_{22}}, \quad \frac{L_{11}}{L_{22}} = \frac{n_1^2}{n_2^2}. \tag{212}$$

Kreis *1* besteht aus dem Generator und der Primärwicklung des Transformators. Die Leitungen in diesem Kreis sind so dimensioniert, daß der Widerstand R_1 verschwindend klein ist. Dann wird $a_1 = i\omega L_{11}$ und daher

$$i_2 = -E_0 \frac{i\omega L_{12}}{i\omega L_{11}(R_2 + i\omega L_{22}) - i^2\omega^2 L_{12}^2} = -E_0 \frac{L_{12}}{L_{11}R_2 + i\omega(L_{11}L_{22} - L_{12}^2)}$$

und, wenn man noch Gleichung (212) heranzieht,

$$i_2 = -\frac{E_0}{R_2}\frac{n_2}{n_1}. \tag{213}$$

Dem negativen Vorzeichen nach ist der Sekundärstrom der primären elektromotorischen Kraft entgegengesetzt gerichtet. Seine Amplitude ist

$$i_2^0 = \frac{E_0}{R_2}\frac{n_2}{n_1}.$$

Nach dem OHMschen Gesetz ist dies so zu erklären, daß die Spannung im Sekundärkreis das $\frac{n_2}{n_1}$fache der Primärspannung ist. $\frac{n_2}{n_1}$ heißt Übersetzungsverhältnis des Transformators. Nimmt bei wachsender Belastung R_2 ab (Parallelschaltung der Verbraucher), so nimmt i_2^0 entsprechend zu.

In unseren Rechnungen war L_{22} der Selbstinduktionskoeffizient der Sekundärwicklung des Transformators, nicht der des ganzen Sekundärkreises. Unsere Ergebnisse besitzen daher nur für solche Fälle Gültigkeit, wo im Verbraucherkreis ein OHMscher Widerstand (Glühlampen), nicht aber eine Selbstinduktion (Motoren) eingeschaltet sind.

Bei offenem Sekundärkreis ist $R_2 = \infty$. Für i_1 folgt

$$i_1 = \frac{E_0}{a_1} = \frac{E_0}{i\omega L_{11}} = \frac{E_0}{\omega L_{11}} e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Da jetzt $\delta_1 = \frac{\pi}{2}$ ist, verschwindet die Leistung des Primärstromes.

ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN

§ 74. Homogenes isotropes Dielektrikum

Alle bisher behandelten Probleme wurden schon von der vormaxwellschen Elektrodynamik gelöst. Die Erscheinungen, die im Rahmen der Statik, der stationären und quasistationären Ströme besprochen wurden, haben den gemeinsamen Zug, daß die Frage nach der Fortpflanzung elektromagnetischer Wirkungen überhaupt nicht auftaucht. Die damaligen Forschungsaufgaben erforderten eine so enge Nachbarschaft des Primär- und Sekundärkreises, daß die Frage, auf welche Weise der Abstand beider durch die induzierende Wirkung überbrückt wird, nicht zeitgemäß war.

Gegenwärtig, wo die zwei Kreise in der Form des Senders und Empfängers auf einige tausend Kilometer entfernt sind, wird die Fortpflanzung auch vom

Laien als Problem empfunden. Aber selbst jene wenigen, wie FARADAY, die die Frage aufwarfen, fanden in der damaligen Theorie keinen Stützpunkt, auf den sie hätten bauen können. Die theoretische Forschung war ganz und gar auf die ponderomotorische Kraft, die zwischen Stromelementen oder auch bewegten Ladungen wirksam ist, eingestellt. Solche Kräfte erscheinen notwendigerweise als Fernkräfte. Erst wenn man MAXWELLS Leistung an diesen hoffnungslosen wissenschaftlichen Zuständen mißt, ist man imstande, die epochemachende Bedeutung seines Werkes voll zu würdigen.

(Ein halbes Jahrhundert später erfolgte ein ähnlicher Schritt auf einem anderen Gebiet. Auch die NEWTONsche Gravitation bedeutet eine zeitlos wirkende Fernkraft. Hier war es EINSTEIN, der auf dem Boden der raumzeitlichen Fortpflanzung eine Feldtheorie der Gravitation ausbaute.)

Die Auswertung des elektrodynamischen Feldes soll zuerst im homogenen isotropen Dielektrikum behandelt werden. Dazu benutzen wir das vollständige MAXWELLsche Gleichungssystem ohne Vernachlässigung von $\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$. Im Dielektrikum ist die Leitfähigkeit σ und die Stromdichte $\mathfrak{j}$ gleich Null. Als einzige Daten treten ε und μ auf. Da auch von Ladungen abgesehen werden soll, setzen wir $\varrho = 0$. Mit diesen Beschränkungen lauten die Gleichungen (170)

$$\text{I. } \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathfrak{H}, \quad \text{II. } \operatorname{div}\mathfrak{E} = 0, \quad \text{III. } \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\mathfrak{E}, \quad \text{IV. } \operatorname{div}\mathfrak{H} = 0. \tag{214}$$

$\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ sind leicht zu separieren. Man bildet die Rotation von (I)

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathfrak{E} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{H} - \Delta\mathfrak{H}.$$

Wird noch $\operatorname{rot}\mathfrak{E}$ aus (III) eingesetzt und (IV) berücksichtigt, so folgt

$$-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{H}}{\partial t^2} = -\Delta\mathfrak{H} \quad \text{oder} \quad \Delta\mathfrak{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{H}}{\partial t^2} = 0. \tag{215}$$

Auf ähnliche Weise erhält man

$$\Delta\mathfrak{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{216}$$

Alle drei Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ befriedigen die aus der Mechanik wohlbekannten Wellengleichungen. Diese sechs Wellengleichungen sind jedoch nur eine Teilfolge der Grundgleichungen und nicht gleichwertig mit diesen.

Wegen ihrer praktischen Bedeutung befassen wir uns etwas eingehender mit den ebenen Wellen. Als ebene Welle bezeichnet man jene partikuläre Lösung der Gleichungen (214), die eine Richtung (die Fortpflanzungsrichtung) in folgendem Sinne auszeichnet: In jedem Punkte einer Ebene, die auf der Fortpflanzungsrichtung senkrecht steht, ist $\mathfrak{E}$ konstant. Dasselbe gilt für $\mathfrak{H}$. Diese Ebenen werden Phasenebenen genannt. Wählt man als ausgezeichnete Rich-

tung die X-Achse, so müssen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ von y und z unabhängig sein. Wir schreiben nun die Gleichungen (214) in Komponenten auf

$$\begin{aligned}
&\text{I.}\ \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}, \quad \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x}, \qquad \text{II.}\ \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} = 0; \\
&\text{III.}\ \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}, \quad \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}, \quad \text{IV.}\ \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} = 0.
\end{aligned} \tag{217}$$

Die Komponenten $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{H}_x$, die in die ausgezeichnete Richtung fallen, hängen nach Gleichung (217) weder von x noch von t ab: $\mathfrak{E}_x = \text{const}$, $\mathfrak{H}_z = \text{const.}$ Diese zwei Gleichungen kennzeichnen offenbar ein elektrostatisches bzw. magnetostatisches Feld, das dem Wellenfeld überlagert ist. Da uns nur letzteres interessiert, setzen wir die beiden Konstanten gleich Null:

$$\mathfrak{E}_x = 0, \quad \mathfrak{H}_x = 0.$$

Die verbleibenden vier Gleichungen zerfallen in zwei Gruppen. Die zweite und siebente Gleichung des Systems enthalten nur $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{H}_z$ als Unbekannte, die dritte und sechste nur $\mathfrak{E}_z$ und $\mathfrak{H}_y$. Die zwei Gruppen können daher gesondert behandelt werden. Wir schreiben die Gleichungen der ersten nebeneinander:

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}, \quad \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}. \tag{218}$$

Die entsprechend separierten Gleichungen folgen aus (215) und (216):

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial t^2} = 0.$$

Man erkennt in ihnen die Differentialgleichung der schwingenden Saite. Die allgemeine Lösung kann aus der Mechanik übernommen werden

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}_y &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left\{f(x - vt) - \bar{f}(x + vt)\right\}, \\
\mathfrak{H}_z &= \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left\{f(x - vt) + \bar{f}(x + vt)\right\},
\end{aligned} \qquad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{219}$$

f und $\bar{f}$ bedeuten zwei beliebige Funktionen. Durch Einsetzen überzeugt man sich, daß die Gleichungen (218) befriedigt sind. Der Funktionswert $f(x - vt)$, der an der Stelle x zur Zeit t gültig ist, tritt an einer entfernteren Stelle x' zur späteren Zeit t' ein, wenn $x - vt = x' - vt'$, d. h.

$$v = \frac{x' - x}{t' - t}.$$

v bedeutet daher die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle. $f(x - vt)$ kennzeichnet eine in der positiven X-Richtung fortschreitende Welle, $\bar{f}(x + vt)$ eine entgegengesetzt gerichtete. Die durch Gleichung (219) dargestellte Welle ist linear polarisiert. Die elektrische Feldstärke schwingt ausschließlich in der Y-Richtung.

In derselben Weise erhält man die Lösung der zweiten Gruppe:

$$\mathfrak{E}_z = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \{g(x - vt) - \bar{g}(x + vt)\},$$

$$\mathfrak{H}_y = -\frac{1}{\sqrt{\mu}} \{g(x - vt) + \bar{g}(x + vt)\}.$$

Die Schwingungsrichtung der elektrischen Feldstärke fällt jetzt in die Z-Achse.

Wir beschränken uns auf Wellen, die längs der positiven X-Achse fortschreiten, und stellen die Lösungen zusammen:

$$\mathfrak{E}_x = 0, \quad \mathfrak{E}_y = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} f(x - vt), \qquad \mathfrak{E}_z = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} g(x - vt),$$

$$\mathfrak{H}_x = 0, \quad \mathfrak{H}_y = -\frac{1}{\sqrt{\mu}} g(x - vt), \quad \mathfrak{H}_z = \frac{1}{\sqrt{\mu}} f(x - vt). \tag{220}$$

Die Wellen sind transversal. Sowohl die elektrische als auch die magnetische Feldstärke stehen senkrecht auf der Fortpflanzungsrichtung; denn die longitudinalen Komponenten $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{H}_x$ sind Null. Aus Gleichung (220) folgt sofort

$$\mathfrak{E}_x\mathfrak{H}_x + \mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_y + \mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_z = (\mathfrak{E}, \mathfrak{H}) = 0.$$

Elektrische und magnetische Feldstärke stehen senkrecht aufeinander. Was ihre Beträge betrifft, ergibt sich

$$\varepsilon\mathfrak{E}^2 = \mu\mathfrak{H}^2 = f^2 + g^2. \tag{221}$$

Im Vakuum sind daher die beiden Feldstärken gleich groß.

Ein sehr anschauliches Bild vom Wesen der Ausbreitung erhält man, wenn man die Kurve $\mathfrak{E}_y = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} f(x - vt)$ für einen beliebigen Zeitpunkt, z. B. $t = 0$, graphisch darstellt. Diese Kurve verschiebt sich im Laufe der Zeit als starres Ganzes mit der Geschwindigkeit $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ in der Richtung der X-Achse, so daß an einer fixen Stelle x immer andere Ordinaten als Feldstärken erscheinen.

Von besonderem Interesse sind die einfachen periodischen Funktionen $f(x) = g(x) = \cos x$ mit der Periode λ oder der Kreisfrequenz

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{v}{\lambda}.$$

Das Argument $x - vt$ ist dann ausführlicher in der Form $\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$ anzusetzen. Pflanzt sich die Welle in Richtung des Einheitsvektors $\mathfrak{k}$ (α, β, γ) fort, so legt man einfach die X'-Achse eines neuen Koordinatensystems in diese Richtung und hat als Argument $\omega\left(t - \frac{x'}{v}\right)$. Will man im alten Koordinatensystem verbleiben, so setzt man den Ausdruck $x' = \alpha x + \beta y + \gamma z = (\mathfrak{k}, \mathfrak{r})$ ein und erhält das Argument in der Form $\omega\left(t - \frac{(\mathfrak{k}, \mathfrak{r})}{v}\right)$. Gewöhnlich bedient man sich

noch der komplexen Schreibweise und hat dann für die Feldstärken der periodischen ebenen Welle:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{e}\, e^{i\omega\left(t - \frac{(\mathfrak{k},\mathfrak{r})}{v}\right)}, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{h}\, e^{i\omega\left(t - \frac{(\mathfrak{k},\mathfrak{r})}{v}\right)}. \tag{222}$$

Hier sind $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{h}$ konstante Vektoren, für die nach obigen Erörterungen die Gleichungen bestehen:

$$(\mathfrak{e},\mathfrak{k}) = 0, \quad (\mathfrak{h},\mathfrak{k}) = 0, \quad (\mathfrak{e},\mathfrak{h}) = 0, \quad |\mathfrak{e}| = |\mathfrak{h}|.$$

Periodizität und Transversalität sind die charakteristischen Eigenschaften der Lichtwellen. Identifiziert man z. B. die elektrische Feldstärke mit dem schwingenden Lichtvektor, dann stellt die f-Welle eine linear polarisierte Lichtwelle dar, deren Vektor mit der y-Achse parallel schwingt. Ebenso wie die g-Welle eine polarisierte Lichtwelle mit der Schwingungsrichtung Z darstellt. Die Superposition beider führt daher zu einer elliptisch polarisierten Welle. Es besteht somit die Möglichkeit, die Optik elektrodynamisch zu begründen. Eine entscheidende Rolle spielt die Frage der Ausbreitungsgeschwindigkeit. Vom Licht ist bekannt, daß es sich im Vakuum mit der Geschwindigkeit $3 \cdot 10^{10}\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$ ausbreitet. Aus Gleichung (219) folgt für $\varepsilon = 1, \mu = 1$, daß diese Geschwindigkeit gleich c ist. Die Konstante c trat zum erstenmal in der Gleichung (141)

$$\oint (\mathfrak{H}, d\mathfrak{s}) = \frac{4\pi}{c} I$$

als Proportionalitätsfaktor auf und diente zur Verknüpfung der in elektromagnetischen Einheiten gemessenen Feldstärke $\mathfrak{H}$ mit der in elektrostatischen Einheiten gemessenen Stromstärke I. Aus Messungen von Weber und Kohlrausch, aber auch aus neueren, genaueren ergab sich der Wert $3 \cdot 10^{10}\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$. Diese Übereinstimmung bedeutete den ersten durchschlagenden Erfolg der Maxwellschen elektromagnetischen Lichttheorie.

Viel ungünstiger steht jedoch die Sache im Falle dielektrischer Körper. Der Brechungsindex n folgt aus Gleichung (219):

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon\mu}\,. \tag{223}$$

Da die Permeabilität der meisten Isolatoren sich nur sehr wenig von 1 unterscheidet, gilt sehr angenähert

$$n^2 = \varepsilon.$$

Aus den Messungen Boltzmanns ist bekannt, daß diese Beziehung für einige Gase wirklich zahlenmäßig richtig ist. Für die überwiegende Mehrzahl der Isolatoren aber ist sie falsch. Für Wasser z. B. ist $\varepsilon = 81$ und $n = 1{,}33$. Forscht man nach dem Grunde der Abweichung, so sind die Gleichungen $\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\mathfrak{E}$ in Betracht zu ziehen, die die Definition von ε enthalten. In der Elektrostatik bewährt sich zwar der konstante Wert von ε. Wir besitzen aber keine Garantie dafür, daß auch in schnell veränderlichen Feldern das Verhältnis von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{E}$ konstant bleibt. Der dritte Teil dieses Buches behandelt die Frage

auf Grund der atomistischen Theorie. Dort erscheint die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Frequenz als natürliche Folge der Zwangsbewegung, die das Elektron unter der Einwirkung des Lichtes beschreibt. Die Hauptgleichungen I–IV der MAXWELLschen Theorie bleiben auch in der atomistischen Theorie als exaktes Naturgesetz gültig. Nur die Materialgleichungen V und VI erfahren eine Abänderung.

§ 75. Energie und POYNTINGscher Vektor

Jede ebene elektromagnetische Welle führt Energie mit sich, deren Dichte nach dem allgemeinen Ausdruck

$$u = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon \mathfrak{E}^2 + \mu \mathfrak{H}^2)$$

ist. Aus Gleichung (221) folgt

$$u = \frac{1}{4\pi}(f^2 + g^2). \tag{224}$$

Die Dichte des Energiestromes

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{H}]$$

wird in unserem Fall, wo die Welle sich in der x-Richtung ausbreitet,

$$\mathfrak{S}_x = \frac{c}{4\pi}(\mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_y) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{1}{4\pi}(f^2 + g^2) = v u, \quad \mathfrak{S}_y = \mathfrak{S}_z = 0. \tag{225}$$

Energiestrom tritt nur in der Fortpflanzungsrichtung auf, und seine Dichte wird erhalten als Produkt der Energiedichte und der Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Als wichtige Größe muß noch die Impulsdichte

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{c^2}\mathfrak{S} \tag{226}$$

der Strahlung erwähnt werden. Ändert die Welle z. B. infolge Reflexion ihre Richtung, so ändert sich mit $\mathfrak{S}$ auch $\mathfrak{G}$. Zur Änderung des Impulses ist aber nach den Axiomen der Mechanik eine Kraft nötig, die in diesem Falle vom Spiegel auf die Strahlungsenergie ausgeübt wird. Die Rückwirkung auf den Spiegel äußert sich in der Form des Strahlungsdruckes, der von LEBEDEW experimentell nachgewiesen wurde.

§ 76. Strahlungsdruck

Da der Strahlungsdruck in der Thermodynamik eine wichtige Rolle spielt, möge sein expliziter Ausdruck kurz abgeleitet werden. In Abb. 25 bedeutet f die Fläche des vollkommen reflektierenden Spiegels. Von links unten nach rechts oben gehend, trifft die Welle mit der Geschwindigkeit c unter dem Einfallswinkel ϑ auf den Spiegel und wird unter dem gleichen Reflexionswinkel total zurückgeworfen. Der rechtsseitige Pfeil stellt den Impuls $\mathfrak{G}$ dar, der wäh-

rend einer Sekunde auf den Spiegel fällt. Dieser Impuls befindet sich offenbar in jenem linksseitigen Parallelepipedon, dessen Grundfläche f und dessen Höhe $c \cos\vartheta$ ist. Daher gilt

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{g} f c \cos\vartheta .$$

Der nach links gerichtete Pfeil $\mathfrak{G}'$ zeigt den reflektierten Impuls an, der dem Betrage nach mit $\mathfrak{G}$ übereinstimmt. Die Vektordifferenz der beiden beträgt $-2\mathfrak{G}\cos\vartheta$. Dies ist die Kraft, die der Spiegel auf die Strahlung ausübt. Die Gegenkraft der Strahlung, die den Spiegel angreift, wird daher

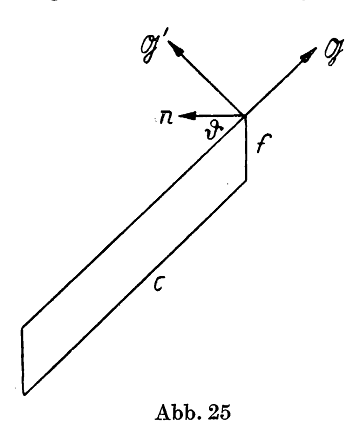


Abb. 25

$$|\mathfrak{K}| = 2\mathfrak{G}\cos\vartheta = 2\,\mathfrak{g} f c \cos^2\vartheta$$

und steht senkrecht auf dem Spiegel. Aus Gleichung (226) folgt noch

$$\mathfrak{K} = \frac{2}{c}\,\mathfrak{S} f \cos^2\vartheta .$$

Da $f\cos\vartheta$ die Projektion von f auf die Ebene der einfallenden Welle bedeutet, ist $\mathfrak{S} f \cos\vartheta$ gleich jenem Energiebetrag, der pro Sekunde auf den Spiegel fällt. Bezeichnet man diese anschauliche Größe nach PLANCK mit I, so erhält man als rückwirkende Kraft der Strahlung

$$|\mathfrak{K}| = \frac{2\cos\vartheta}{c}\, I . \tag{227}$$

Wegen des großen Nenners wird diese Kraft unter gewöhnlichen Verhältnissen sehr klein. Zu ihrem Nachweis benutzten LEBEDEW und HULL die Drehwaage. Die an den Balkenenden angebrachten Metallplättchen wurden im Takte der Eigenschwingung abwechselnd belichtet und durch Resonanz gut beobachtbare Ausschläge erhalten.

Im Inneren der Sterne nimmt der Strahlungsdruck außerordentlich hohe Werte an. Bei den dort herrschenden Temperaturen von vielen Millionen Grad sind nämlich unvergleichlich größere Beträge von I in Rechnung zu stellen als beim Laboratoriumsversuch.

§ 77. Ebene Wellen in Leitern

Wir betrachten die Ausbreitung ebener Wellen in einem gleichförmigen und isotropen Medium, dessen Leitfähigkeit σ nicht verschwindet. Dann tritt in der ersten MAXWELLschen Hauptgleichung auch das Glied $\frac{4\pi}{c}\,\mathfrak{i} = \frac{4\pi}{c}\,\sigma\mathfrak{E}$ auf. Das Gleichungssystem lautet jetzt

$$\text{I.}\ \frac{4\pi}{c}\,\sigma\,\mathfrak{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathfrak{H}, \quad \text{II.}\ \operatorname{div}\mathfrak{E} = 0, \tag{228}$$

$$\text{III.}\ \frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\mathfrak{E}, \quad \operatorname{div}\mathfrak{H} = 0.$$

Die Separierung von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ kann auch jetzt leicht durchgeführt werden. Man bilde wieder die Rotation von I:

$$\frac{4\pi}{c}\sigma \operatorname{rot}\mathfrak{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathfrak{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{H} - \Delta\mathfrak{H},$$

und setze $\operatorname{rot}\mathfrak{E}$ aus III ein:

$$\Delta\mathfrak{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{H}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = 0. \tag{229}$$

Auf gleiche Weise folgt

$$\Delta\mathfrak{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} = 0. \tag{230}$$

Letztere Gleichung wird Telegraphengleichung genannt.

Die Integration soll für eine in der X-Richtung laufende ebene Welle durchgeführt werden. Es hängt also keine Feldgröße von y und z ab. In Komponentengleichungen zerlegt, lautet dann Gleichung (228)

$$\text{I.}\ \frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E}_x + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{4\mu\sigma}{c}\mathfrak{E}_y + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial t} = -\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial x},$$

$$\frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E}_z + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial t} = \frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial x}, \quad \text{II.}\ \frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial x} = 0,$$

$$\text{III.}\ \frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial t} = \frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial x}, \quad \frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial t} = -\frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial x}, \quad \text{IV.}\ \frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial x} = 0.$$

Die Komponente $\mathfrak{H}_x$ hängt nach III und IV weder von t noch von x ab. Ihr Wert ist konstant. Da uns ein statisches Feld gegenwärtig nicht interessiert, setzen wir die Konstante gleich Null. Es gilt mithin der Satz: Die magnetische Feldstärke steht senkrecht auf der Fortpflanzungsrichtung. Für $\mathfrak{E}_x$ gibt I und II eine Abhängigkeit von t allein. Die Integration von I führt zur Lösung

$$\mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}_x^0\, e^{-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}t}. \tag{231}$$

Auch dieser Ausdruck steht in keinem organischen Zusammenhang mit der Wellenausbreitung. Gleichung (231) besagt, daß die Feldstärke $\mathfrak{E}_x^0$, die zur Zeit $t = 0$ im ganzen Leiter zugegen war, in unmeßbar kurzer Zeit auf Null herabsinkt. Schon bei der Berechnung der Relaxationszeit wurde darauf hingewiesen, welch ungeheuere Werte $\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}$ für metallische Leiter annimmt. Das elektrostatische Feld im Leiter bricht sofort zusammen. Alles dies hat nichts zu tun mit elektromagnetischen Wellen, die ein den ganzen Leiter erfüllendes ortsunabhängiges Feld gar nicht hervorbringen können. Wir schreiben deshalb $\mathfrak{E}_x = 0$ und haben den Satz: Ebene Wellen sind auch in leitenden Medien streng transversal.

Die verbleibenden vier Gleichungen zerfallen wieder in zwei Gruppen. Wir wählen diejenigen, die $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{H}_z$ enthalten:

$$\frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E}_y + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}, \quad \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}. \tag{232}$$

Im Gegensatz zu den Wellen im Dielektrikum gelingt jetzt die Integration nicht mehr mit beliebigen Funktionen f und g, sondern nur mit zeitlich periodischen. Wir machen daher den Ansatz

$$\mathfrak{E}_y = f(x)\, e^{i\omega t}$$

und setzen diesen vorerst in die Telegraphengleichung

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = 0$$

ein. Für f folgt dann die Gleichung

$$\frac{d^2 f}{d x^2} + \left(\frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} - i\,\frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}\right) f = 0.$$

Als Lösung ergibt sich sofort

$$f(x) = A e^{\pm \frac{i}{c}\sqrt{\varepsilon\mu\omega^2 - i 4\pi\sigma\mu\omega}\, x}. \tag{233}$$

Wellen, die in der positiven X-Richtung laufen, erfordern das negative Vorzeichen der Wurzel. Als Fingerzeig kann man den Fall $\sigma = 0$ benutzen; dann wird nämlich

$$\mathfrak{E}_y = A e^{i\omega\left(t - \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}x\right)}.$$

Der Radikand soll nun als vollständiges Quadrat geschrieben werden:

$$\omega^2\left(\varepsilon\mu - i\,\frac{4\pi\sigma\mu}{\omega}\right) = \omega^2(n - i\varkappa)^2. \tag{234}$$

Der Exponent von $\mathfrak{E}_y$ wird dann rational:

$$\mathfrak{E}_y = A e^{i\omega\left(t - \frac{n}{c}x\right)} e^{-\frac{\omega\varkappa}{c}x}.$$

Die neu eingeführten Konstanten n und $\varkappa$ sind durch Gleichung (234) bestimmt

$$n^2 - \varkappa^2 = \varepsilon\mu, \quad n\varkappa = \frac{2\pi\sigma\mu}{\omega} = \frac{\mu\sigma}{\nu} = \mu\sigma\tau, \tag{235}$$

wobei τ die Schwingungsdauer der Welle bedeutet. Als Lösung erhält man

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{2}\left(\sqrt{\varepsilon^2 + 4\sigma^2\tau^2} + \varepsilon\right)}, \quad \varkappa = \sqrt{\frac{\mu}{2}\left(\sqrt{\varepsilon^2 + 4\sigma^2\tau^2} - \varepsilon\right)}. \tag{236}$$

n heißt reeller Brechungsindex, $\varkappa$ Extinktionskoeffizient. Ihr physikalischer Sinn wird im folgenden noch besprochen.

Nachdem $\mathfrak{E}_y$ bekannt ist, wird $\mathfrak{H}_z$ aus der zweiten Gleichung (232) bestimmt

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = -\frac{c}{\mu}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} = i\frac{\omega}{\mu}(n - i\varkappa)\, A e^{-\frac{\omega\varkappa}{c}x} e^{i\omega\left(t-\frac{n}{c}x\right)},$$

und integriert:

$$\mathfrak{H}_z = \frac{n - i\varkappa}{\mu}\mathfrak{E}_z.$$

Um auf reelle Amplituden überzugehen, benutzen wir die trigonometrische Form von $n - i\varkappa$:

$$n - i\varkappa = \sqrt{n^2 + \varkappa^2}\, e^{-i\gamma}, \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{\varkappa}{n}. \tag{237}$$

Die endgültige Lösung lautet jetzt

$$\mathfrak{E}_y = A e^{-\frac{\omega\varkappa}{c}x} e^{i\omega\left(t-\frac{n}{c}x\right)},$$

$$\mathfrak{H}_z = \frac{\sqrt{n^2+\varkappa^2}}{\mu} A e^{-\frac{\omega\varkappa}{c}x} e^{i\left[\omega\left(t-\frac{n}{c}x\right)-\gamma\right]}. \tag{238}$$

Der Faktor $e^{-\frac{\omega\varkappa}{c}x}$ zeigt die Dämpfung der Welle an. Die Dämpfung ist der Frequenz und dem Extinktionskoeffizienten proportional. Wellen geringerer Frequenz erleiden eine schwächere Dämpfung und dringen daher tiefer in den Leiter ein. Die Dämpfung erscheint als Folge der im Leiter stattfindenden Absorption. Um den Extinktionskoeffizienten anschaulich interpretieren zu können, schreibt man $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$, wobei λ_0 die Wellenlänge im Vakuum bedeutet. Für den Dämpfungsfaktor folgt dann:

$$e^{-\frac{\omega\varkappa}{c}x} = e^{-2\pi\varkappa\frac{x}{\lambda_0}}.$$

Nach dem Durchlaufen der Strecke $x = \frac{\lambda_0}{\varkappa}$ sinkt daher die Amplitude auf den $e^{-2\pi}$-ten Teil ihres Anfangswertes. Die Strecke $\frac{\lambda_0}{\varkappa}$ kann daher als Eindringtiefe der Welle betrachtet werden.

Die Phase der magnetischen Feldstärke bleibt hinter der Phase der elektrischen um den Winkel γ zurück.

Viel handlicher werden die Formeln (236), wenn ε neben $2\sigma\tau$ vernachlässigt werden kann:

$$n = \varkappa = \sqrt{\mu\sigma\tau}, \quad \gamma = \frac{\pi}{4}. \tag{239}$$

Diese Näherung gilt natürlich nur bis zu einer gewissen Grenze der Frequenz. Für ultrarotes Licht mit $\lambda_0 = 10^{-4}$ cm wird $\tau = \frac{\lambda_0}{c} = 3{,}3 \cdot 10^{-15}$ s. Andererseits ist für Kupfer $\sigma = 5{,}1 \cdot 10^{17}\ \mathrm{s}^{-1}$, so daß $2\sigma\tau = 3400$. Neben diesem Wert kann ε ruhig gestrichen werden. Aus Gleichung (239) erhält man dann

$$n = \varkappa = \sqrt{1700} = 41.$$

Gemäß der Formel $n = \frac{c}{v}$ entspricht der Ausbreitungsgeschwindigkeit des ultraroten Lichtes im Kupfer $v = \frac{c}{41}$. Für höhere Frequenzen wird sie entsprechend größer. Diese Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von der Frequenz ist der Grund, weswegen die Integration der Feldgleichungen mit einem Ansatz bestimmter Frequenz versucht wurde. Die Eindringtiefe der ultraroten Wellen in Kupfer beträgt $\frac{\lambda_0}{\varkappa} = \frac{1}{41} \cdot 10^{-4}$ cm. Das ist eben die Wellenlänge dieser Strahlung in Kupfer. Im Falle ultravioletten oder gar Röntgenlichtes wird die Näherung (239) hinfällig.

In unseren Rechnungen wurde σ als Konstante betrachtet und mit dem stationären Wert identifiziert. Bis zu gewissen minimalen Wellenlängen bewährt sich dieser Erfahrungswert recht gut. Unterhalb dessen aber macht sich die Frequenzabhängigkeit von σ stark bemerkbar. Ganz alltägliche Beispiele weisen darauf hin. Nach unserer Theorie müßte jeder Isolator durchsichtig sein, denn mit $\sigma = 0$ müßte nach Gleichung (236) auch $\varkappa$ verschwinden. Jeder Leiter hingegen wäre undurchsichtig. In Wirklichkeit ist Ebonit als guter Isolator undurchsichtig und die gut leitenden Kochsalzlösungen durchsichtig. Im Frequenzbereich des sichtbaren Lichtes ist daher der stationäre Wert von σ keinesfalls mehr anwendbar.

Die Energiedichte der Strahlung ist $u = (\varepsilon \mathfrak{E}_y^2 + \mu \mathfrak{H}_z^2)/8\pi$. Aus Gleichung (238) folgt nun

$$\mu \mathfrak{H}_z^2 = \frac{n^2 + \varkappa^2}{\varepsilon \mu} (\varepsilon \mathfrak{E}_y^2).$$

Das besagt für ultrarotes Licht:

$$\mu \mathfrak{H}_z^2 = \frac{2 \sigma \tau}{\varepsilon} (\varepsilon \mathfrak{E}_y^2) \approx 3400 (\varepsilon \mathfrak{E}_y^2).$$

Die Strahlungsenergie in metallischen Leitern besteht daher zum allergrößten Teil aus magnetischer Feldenergie.

§ 78. Reflexion an Metallen

Wir denken uns eine ebene Welle, die, von $x = -\infty$ kommend, in der positiven X-Richtung fortschreitet. Die YZ-Ebene sei die Grenzfläche eines metallischen Leiters, der den Halbraum der positiven X-Werte erfüllt. An der Grenzfläche wird die einfallende Welle in eine eindringende und eine reflektierte Welle aufgespalten.

Für die einfallende Welle schreiben wir

$$\mathfrak{E}_y^i = \mathfrak{H}_z^i = a e^{i\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)},$$

und für die reflektierte

$$-\mathfrak{E}_y^r = \mathfrak{H}_z^r = a' e^{i\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)}.$$

(Wellennormale, elektrische und magnetische Feldstärke bilden ein Rechtssystem. Läuft die Welle in der negativen X-Richtung, so sind die dazugehörenden Rechtsrichtungen — Y und Z. Daher kommt das negative Vorzeichen von $\mathfrak{E}_y^r$.) Die Feldstärken der eindringenden Welle sind uns schon bekannt. Wir schreiben sie noch einmal nieder in der Form

$$\mathfrak{E}_y = A e^{i\omega\left(t - \frac{n - i\varkappa}{c} x\right)}, \quad \mathfrak{H}_z = A \frac{n - i\varkappa}{\mu} e^{i\omega\left(t - \frac{n - i\varkappa}{c} x\right)}.$$

Die zu erfüllenden Grenzbedingungen an der Ebene $x = 0$ lauten: Die tangentialen Komponenten sowohl der elektrischen als auch der magnetischen Feldstärke müssen beiderseits der Grenzfläche gleich sein. Dieser Satz wurde in der Statik aus den Forderungen $\oint(\mathfrak{E}, d\mathfrak{s}) = 0$ bzw. $\oint(\mathfrak{H}, d\mathfrak{s}) = 0$ für Isolatoren abgeleitet. Der Integrationsweg bezog sich auf den Umfang eines rechteckigen Viereckes (Abb. 7), dessen Längsseiten eng an die Grenzfläche anschließen. Es ist leicht zu beweisen, daß das Verschwinden dieser Kreisintegrale eine Folge der MAXWELLschen Gleichungen, daher auch für Leiter gültig ist. Wir begnügen uns hier mit dem Hinweis.

Für $x = 0$ muß daher gelten:

$$\mathfrak{E}_y^i + \mathfrak{E}_y^r = \mathfrak{E}_y, \quad \mathfrak{H}_z^i + \mathfrak{H}_z^r = \mathfrak{H}_z.$$

Daraus folgen die Amplitudengleichungen

$$a - a' = A, \quad a + a' = A \frac{n - i\varkappa}{\mu}.$$

Hier ist a als gegeben zu betrachten. Wir führen für $n - i\varkappa$ das Zeichen p ein und erhalten als Lösung

$$a' = a \frac{p - \mu}{p - \mu}, \quad A = a \frac{2\mu}{p + \mu}.$$

Unter dem Reflexionsvermögen R eines Mediums versteht man das Verhältnis der reflektierten zu der einfallenden Strahlungsintensität, die dem entsprechenden Amplitudenquadrat proportional ist. Da nun das Quadrat des Absolutwertes einer komplexen Größe durch Multiplizieren mit dem konjugierten Wert erhalten wird, findet man

$$R = \frac{a' n'^*}{a a^*} = \frac{(p - \mu)(p^* - \mu)}{(p + \mu)(p^* + \mu)}.$$

Setzt man $p = n - i\varkappa$, $p^* = n + i\varkappa$ ein, so wird

$$R = \frac{(n - \mu)^2 + \varkappa^2}{(n + \mu)^2 + \varkappa^2}. \tag{240}$$

Ideal nennt man jenen Leiter, dessen Leitvermögen σ unendlich groß ist. In diesem Falle gibt Gleichung (236)

$$n = \varkappa \to \infty,$$

und R wird 1. Der ideale Leiter reflektiert die gesamte einfallende Strahlungsenergie. In der Praxis kommt diesem Grenzfall der Silberspiegel am nächsten.

Wie eben gezeigt wurde, gilt für Wellenlängen bis 10^{-3} mm

$$n = \varkappa = \sqrt{\mu \sigma \tau} \gg 1.$$

Setzt man außerdem unter Ausschluß ferromagnetischer Substanzen $\mu = 1$, so wird aus Gleichung (240)

$$R = \frac{2n^2 - 2n + 1}{2n^2 + 2n + 1} \approx \frac{n-1}{n+1} \approx 1 - \frac{2}{n}, \quad R \approx 1 - \frac{2}{\sqrt{\sigma \tau}}. \tag{241}$$

Diese Relation fand durch Messung des Reflexionsvermögens im Ultrarot eine gute experimentelle Bestätigung. Bis zu Wellenlängen $\lambda = 25 \cdot 10^{-4}$ cm bewährt sich daher die aus stationären Strommessungen bestimmte Leitfähigkeit σ. Die Messungen zeigen jedoch, daß für kürzere Wellen das beobachtete Reflexionsvermögen viel geringer wird als das aus Formel (241) berechnete. Die freien Elektronen der Metalle, besonders aber die schweren Ionen der Elektrolyte vermögen infolge ihrer Trägheit dem raschen Wechsel der Feldstärke nicht voll zu folgen. Die Stromstärke sinkt, was einer verringerten Leitfähigkeit entspricht. Bei Elektrolyten erfolgt das in solchem Maße, daß sie sich Lichtfrequenzen gegenüber wie leitungsunfähige Medien, wie Isolatoren verhalten.

§ 79. Skineffekt

Ein Wechselstrom hoher Frequenz erfüllt den Querschnitt des Leiters nicht gleichmäßig, sondern verdichtet sich zur Oberfläche hin. Um den Vorgang theoretisch zu erklären, denken wir uns einen sehr langen kreiszylinderischen Leiter, der von einem quasistationären Wechselstrom durchflossen wird. Die Mittellinie des Leiters legen wir in die X-Achse und nennen den Abstand eines seiner Punkte von der Achse r. Die zu lösenden MAXWELLschen Hauptgleichungen sind folgende

$$\text{I.} \quad \frac{4\pi}{c}\,\mathfrak{j} = \operatorname{rot}\mathfrak{H}, \quad \text{III.} \quad \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{1}{\sigma}\operatorname{rot}\mathfrak{j}.$$

Die unbekannte Funktion ist die Stromdichte $\mathfrak{j}$. Um $\mathfrak{H}$ zu eliminieren, differenzieren wir die erste Gleichung nach t und bilden die Rotation der dritten Gleichung. Dann erscheint in beiden $\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathfrak{H}$. Nach Wegschaffen dieser Größe gelangt man zur Gleichung

$$-\frac{4\pi\mu}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{j}}{\partial t} - \frac{1}{\sigma}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{j} = 0.$$

Da $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{j} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{j} - \Delta\mathfrak{j}$ und $\operatorname{div}\mathfrak{j} = 0$, folgt

$$\Delta\mathfrak{j} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{j}}{\partial t}.$$

Im unendlich geraden Leiter reduziert sich $\mathfrak{j}$ auf die Komponente $\mathfrak{j}_x$, die nur von t und r abhängt:

$$\mathfrak{j}_x = u(r, t).$$

Bekanntlich ist

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Die zu lösende Differentialgleichung wird

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Die Abhängigkeit von der Zeit sei periodisch:

$$u = f(r)\, e^{i\omega t},$$

wobei ω die gegebene Kreisfrequenz des Wechselstromes bedeutet. Für f folgt dann die Gleichung

$$\frac{d^2 f}{d r^2} + \frac{1}{r}\frac{d f}{d r} - i\,\frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2} f = 0. \tag{242}$$

Durch Transformation der unabhängigen Variablen r kann man erreichen, daß der Koeffizient von f gleich 1 wird. Die geeignete Transformation ist

$$x = \alpha r, \quad \alpha = \frac{1}{c}\sqrt{-\,i\,4\pi\sigma\mu\omega}.$$

Die Differentialgleichung nimmt jetzt folgende Form an:

$$\frac{d^2 f}{d x^2} + \frac{1}{x}\frac{d f}{d x} + f = 0.$$

Dies ist die BESSELsche Differentialgleichung nullter Ordnung, von deren zwei partikulären Lösungen natürlich nur die in Betracht kommt, die für $x = 0$ endlich bleibt. Sie wird gewöhnlich mit $\mathfrak{J}_0(x)$ bezeichnet. Gemäß dieser Schreibweise lautet die Lösung

$$\mathfrak{j}_x = u = A\,\mathfrak{J}_0(\alpha r)\, e^{i\omega t}.$$

Da das Argument von $\mathfrak{J}_0$ komplex ist, wird auch $\mathfrak{J}_0$ selbst komplex, so daß geschrieben werden kann:

$$\mathfrak{J}_0(\alpha r) = |\mathfrak{J}_0(\alpha r)|\, e^{i\delta(\alpha r)}.$$

Sowohl der absolute Wert als auch die Phase δ sind Funktionen von r. Es wird also

$$\mathfrak{j}_x = A\,|\mathfrak{J}_0(\alpha r)|\, e^{i(\omega t + \delta(\alpha r))}. \tag{243}$$

Das Resultat ist leicht zu interpretieren. Man teilt den Draht in dünne konzentrische Zylinderschalen, die durch den Wert von r charakterisiert sind. Die Größe der Stromdichte wird durch die Amplitude $A\,|\mathfrak{J}_0(\alpha r)|$ angegeben, ihre Phase durch $\delta(\alpha r)$. Die Stromdichte ändert sich sowohl ihrer Größe als auch ihrer Phase nach von Schale zu Schale. Entnimmt man die reellen und ima-

ginären Werte von $\mathfrak{J}_0(\alpha r)$ den entsprechenden Tabellen, so sieht man, daß, von der Drahtachse ausgehend, Absolutwert $|\mathfrak{J}_0(\alpha r)|$ und Phase $\delta(\alpha r)$ ständig wachsen. Die Stromdichte ist daher ihrem Betrage nach in der Drahtachse am kleinsten, an der Oberfläche am größten. In den einzelnen aufeinanderfolgenden Schalen schwingt der Wechselstrom gegenüber dem Achsenstrom mit stetig zunehmender Phasenverschiebung. Bei genügender Drahtdicke kann es Schalen geben, in denen der Strom dem Achsenstrom entgegenläuft. Besonders ausgeprägt ist die Erscheinung der Stromverdrängung von der Achse gegen die Oberfläche bei großem μ und ω, also z. B. bei Eisendrähten oder hochfrequenten Schwingungen. Der größte Teil des Stromes fließt dann an der Oberfläche, wodurch der OHMsche Widerstand zunimmt. Dagegen wird der Selbstinduktionskoeffizient L_i verkleinert (siehe § 67).

Der Parameter $\alpha = \frac{1}{c}\sqrt{-i\,4\pi\sigma\mu\omega}$ steht in engem Zusammenhang mit der Eindringtiefe d, die der Frequenz ω entspricht. Der Ausdruck für d war

$$d = \frac{\lambda_0}{\varkappa}.$$

Da nun $\lambda_0 = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega}$ ist und in der oben benutzten Näherung

$$\varkappa = \sqrt{\mu\sigma\tau} = \sqrt{\frac{2\pi\mu\sigma}{\omega}},$$

so wird

$$d = \frac{2\pi c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}$$

und

$$\alpha = \frac{2\pi\sqrt{2}}{d}\sqrt{-i}.$$

α ist der Eindringtiefe umgekehrt proportional. Je weniger die Wellen in den Leiter eindringen, um so mehr drängt sich der Strom mit derselben Frequenz an der Oberfläche zusammen. Extreme Verhältnisse treten beim idealen Leiter ein. Aus Gleichung (242) folgt nach Division durch σ und Grenzübergang $\sigma \to \infty$, daß f und dadurch auch $\mathfrak{j}_x$ verschwinden. Im Innern des idealen Leiters fließt überhaupt kein Strom. Ausschließlich Flächenladungen laufen an ihm entlang. Wohl ist der ideale Leiter eine begriffliche Abstraktion; aber bei orientierenden theoretischen Berechnungen leistet er oft gute Dienste.

§ 80. Drahtwellen

Die Frage, wie ebene Wellen, mit denen wir uns bisher beschäftigt haben, überhaupt zustande kommen, wurde bisher nicht berührt. Da sie aus dem Unendlichen kommen, liegen ihre Erregerstellen sicher nicht im Endlichen. Jetzt sollen Wellenarten betrachtet werden, die von zugänglichen bewegten Ladungen ausgehen. Wenn man einen sehr langen idealen Leitungsdraht an einen Schwingungskreis koppelt, so werden auch im Draht Stromschwingungen ent-

stehen. An seiner Oberfläche geraten Flächenladungen in oszillatorische Bewegung. Von den Ladungen gehen elektrische Kraftlinien aus, die sich im umgebenden Dielektrikum ausbreiten. Ebenso erregt der Strom ein magnetisches Feld, das sich im Dielektrikum fortpflanzt. Unsere Aufgabe soll darin bestehen, die Eigenschaften dieser Wellen aus den MAXWELLschen Gleichungen herzuleiten. Zu diesem Zwecke denken wir uns den Draht der Z-Achse parallel und unendlich lang. Die elektrischen und magnetischen Kraftlinien mögen für jedes z in einer zum Leiter senkrechten Ebene liegen. Es folgt dann $\mathfrak{E}_z = 0$, $\mathfrak{H}_z = 0$. Mit dieser vereinfachenden Annahme schreiben wir jetzt das volle MAXWELLsche Gleichungssystem (170) in Komponentengleichungen nieder.

Aus I $\quad \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathfrak{H}$ folgt:

$$1.\quad \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}, \qquad 2.\quad \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z}, \qquad 3.\quad 0 = \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y},$$

aus II $\quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$:

$$4.\quad \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} = 0,$$

aus III $\quad \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathfrak{E}$:

$$5.\quad \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z}, \qquad 6.\quad \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z}, \qquad 7.\quad 0 = \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}$$

und aus IV $\quad \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$:

$$8.\quad \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} = 0.$$

Das System dieser Gleichungen hat eine charakteristische Struktur. Die Gleichungen 3, 4, 7 und 8 enthalten Ableitungen nur nach x und y, 1, 2, 5 und 6 nur solche nach z und t. Dies weist auf die Möglichkeit der Separation hin.

Die allgemeine Lösung der Gleichung (7) ist

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \mathfrak{E}_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \tag{244}$$

und Gleichung 4 fordert

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \tag{245}$$

Ebenso folgt aus Gleichung 8

$$\mathfrak{H}_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \mathfrak{H}_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{246}$$

und nach Gleichung 3

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0. \tag{247}$$

Aus Gleichung (244) folgt, daß sich das elektrische Feld aus einem Potential ableiten läßt. Dies muß an der Kreislinie eines Drahtquerschnittes konstant sein; denn die elektrischen Feldlinien stehen an der Oberfläche eines idealen Leiters senkrecht. Eine Neigung gegen die Drahtachse würde wegen der unendlichen Leitfähigkeit einen unendlichen Strom erzeugen. Dieser Forderung genügt das Potential

$$\Phi = -k \ln r,$$

wobei r den Abstand des Aufpunktes von der Drahtachse bedeutet. Auch Gleichung (245) ist dann erfüllt.

Ebenso muß die Kreislinie eine magnetische Kraftlinie darstellen; im Inneren eines idealen Leiters gibt es keinen Strom und daher kein magnetisches Feld. Aus der Fläche selbst aber kann die magnetische Kraftlinie nicht entspringen; denn sonst wäre die Fläche eine magnetische Quelle. Es muß daher nach § 51 auch Ψ an der Kreislinie konstant sein:

$$\Psi = -K \ln r.$$

Wir haben daher folgendes Bild des elektromagnetischen Kraftfeldes: In einer zum Draht senkrechten Ebene verlaufen die elektrischen Kraftlinien wie vom Draht ausgehende Radien, die magnetischen wie um den Draht geschlungene konzentrische Kreise.

Wie dieses Feld von z abhängt und sich mit der Zeit verändert, wollen wir am einzelnen Draht, der nur geringes praktisches Interesse besitzt, nicht weiter verfolgen und gehen lieber gleich zur Doppelleitung über. Wir stellen dem Draht im Abstand d einen gleichen in paralleler Lage gegenüber und nehmen an, daß in zwei Punkten, die zu gleichem z gehören, der Strom in den beiden Leitern entgegengesetzt gerichtet und von gleicher Stärke sei. Dann hat man einfach die zwei Potentiale $-k \ln r_1$ und $+k \ln r_2$ zu überlagern und ebenso die zwei entsprechenden Ψ. Man weiß aus früheren Überlegungen, daß dann auch die Randbedingungen für den Fall, daß der Abstand d groß ist gegenüber dem Drahthalbmesser b, in guter Näherung erfüllt sind. Wir haben daher

$$\Phi = k \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad \Psi = K \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Entnehmen wir die Werte der Konstanten k und K den Gleichungen (154) und (155), so folgt

$$\Phi = \frac{e}{\varepsilon} F(x, y), \quad \Psi = \frac{I}{c} F(x, y), \quad F(x, y) = 2 \ln \frac{r_2}{r_1}. \tag{248}$$

Hier bedeutet, wie schon an der betreffenden Stelle bemerkt, e die Längendichte, I die Stromstärke. Der Kraftlinienverlauf in einer Ebene $z = \text{const}$ wird durch Abb. 18 dargestellt.

Der Unterschied zwischen dem früher dargestellten stationären Fall und dem jetzigen besteht darin, daß I und e dort konstante Größen waren, hier aber von z und t abhängen. Die Form der Abhängigkeit wird durch die Gleichungen 1, 2, 5 und 6 bestimmt. Setzt man die mit Hilfe von Gleichung (248)

gebildeten Feldstärken (244) und (246) in diese Gleichungen ein, so führen 1 und 2 gleichlautend auf

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} = 0, \tag{249}$$

5 und 6 auf

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial z} = 0. \tag{250}$$

Eliminiert man durch Differentiation e oder I, so erhält man für beide Größen die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 e}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0.$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

stimmt mit jener der homogenen ebenen Wellen überein. Die allgemeine Lösung der Gleichungen (249) und (250) lautet

$$e = f\left(t - \frac{z}{v}\right) + g\left(t + \frac{z}{v}\right), \tag{251}$$

$$I = vf\left(t - \frac{z}{v}\right) - vg\left(t + \frac{z}{v}\right). \tag{252}$$

Man ist jetzt in der Lage, die Ausdrücke von Φ, Ψ und den Feldstärken explizit hinzuschreiben. Setzt man z. B. $g = 0$, so handelt es sich um eine inhomogene ebene Welle, die in der Z-Richtung mit der Geschwindigkeit v fortschreitet. Anschaulich hat man sich vorzustellen, daß die Abb. 18, an den Stellen P_1, P_2 von den Drähten senkrecht durchstoßen, an diesen mit der Geschwindigkeit v entlanggleitet. Während der Bewegung bleiben die eingezeichneten Kraftlinien ihrer Form nach unverändert, nur ihre Dichten, die Feldstärken, ändern sich nach Maßgabe von $f\left(t - \frac{z}{v}\right)$. g bedeutet eine zweite Welle in der entgegengesetzten Richtung.

Die Messungen beziehen sich nicht auf die Wellen im Dielektrikum, sondern auf die Größen I und e, die zum Leiter gehören. Es ist daher verständlich, daß man die bezüglichen Gleichungen (249) und (250) aus allgemeineren Prinzipien, die mit den Begleitwellen nichts gemein haben, abzuleiten wünscht. Bevor wir dazu übergehen, wollen wir die Größen der Kapazität und Induktivität pro cm einführen. Wir bezeichnen sie mit C und L. Denkt man sich durch zwei Parallelschnitte zwei Zylinder der Höhe 1 cm aus der Doppelleitung abgesondert, so wird definitionsgemäß

$$C = \frac{e}{\Phi_1 - \Phi_2}. \tag{253}$$

Aus den Gleichungen (134′) und (134″) bekommt man

$$\Phi_1 = \frac{2e}{\varepsilon}\ln\frac{d}{b}, \quad \Phi_2 = \frac{2e}{\varepsilon}\ln\frac{b}{d}, \quad \Phi_1 - \Phi_2 = \frac{4e}{\varepsilon}\ln\frac{d}{b}$$

und

$$C = \frac{\varepsilon}{4 \ln \frac{d}{b}}. \tag{254}$$

Um den entsprechenden Induktionskoeffizienten zu finden, legen wir in die Doppelleitung einen rechteckigen Streifen mit der Grundlinie d und der Höhe dz. Wie groß ist der hindurchgehende Induktionsfluß? Längs des ganzen Streifens ist

$$\mathfrak{H}_n = \mathfrak{H}_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

somit der Kraftfluß

$$dz \int_1^2 \mathfrak{H}_y \, dx = -dz \int_1^2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx = dz (\Psi_1 - \Psi_2)$$

und der durch c dividierte Induktionsfluß

$$\frac{1}{c} dF = dz \frac{\mu}{c} (\Psi_1 - \Psi_2). \tag{255}$$

Umgerechnet auf einen Streifen von 1 cm Höhe, erhalten wir

$$\frac{1}{c} F = \frac{\mu}{c} (\Psi_1 - \Psi_2).$$

Nach Gleichung (183) ist dieser Ausdruck gleich $L I$, so daß folgt:

$$L = \frac{\mu}{c I} (\Psi_1 - \Psi_2).$$

Aus Gleichung (248) ergibt sich

$$\Psi = \frac{I \varepsilon}{c e} \Phi, \quad \Psi_1 - \Psi_2 = \frac{I \varepsilon}{c e} (\Phi_1 - \Phi_2) = \frac{I}{c} 4 \ln \frac{d}{b} \tag{256}$$

und daher

$$L = \frac{\mu}{c^2} 4 \ln \frac{d}{b}.$$

Vergleicht man dies mit Gleichung (252), so findet man

$$LC = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} = \frac{1}{v^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{LC}} = v. \tag{257}$$

Jetzt sollen die Gleichungen (249) und (250) aus bekannten Sätzen unmittelbar abgeleitet werden. Am ersten Leiter grenzen wir einen schmalen Kreisstreifen ab. Der untere Kreis gehöre zu z, der obere zu $z + dz$. Die Ladung des Streifens ist $e dz$, ihre Änderung in der Zeiteinheit $\frac{\partial e}{\partial t} dz$. Am Kreise z tritt in der Sekunde die Ladung I_z ein, am Kreise $z + dz$ die Ladung I_{z+dz} aus. Der Erhaltungssatz der Elektrizität erfordert

$$\frac{\partial e}{\partial t} dz = I_z - I_{z+dz} = -\frac{\partial I}{\partial z} dz$$

oder

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} = 0. \tag{258}$$

Gleichung (249) ist also eine direkte Folge des Erhaltungssatzes.

Um Gleichung (250) zu erhalten, wenden wir den FARADAYschen Induktionssatz auf den erwähnten Rechteckstreifen an (Abb. 26). Der hindurchgehende Induktionsfluß, mit dem Faktor $\frac{1}{c}$ versehen, steht unter Gleichung (255). Dieser Fluß weist in die Richtung der Y-Achse. Seine negative zeitliche Zunahme ist gleich der induzierten elektromotorischen Kraft, die als Kreisintegral der elektrischen Feldstärke, erstreckt über die Linie $AA'B'BA$, erhalten wird:

$$\int\limits_{AA'B'BA} (\mathfrak{E}, d\mathfrak{s}) = \int\limits_{A'B'} \mathfrak{E}_x\, dx + \int\limits_{BA} \mathfrak{E}_x dx = \int\limits_{AB} \{(\mathfrak{E}_x)_{z+dz} - (\mathfrak{E}_x)_z\}\, dx = dz \frac{\partial}{\partial z} \int\limits_{AB} \mathfrak{E}_x dx.$$

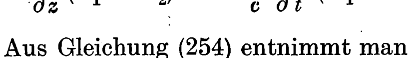
Es ist klar, daß längs der Strecken $\overline{AA'}$ und $\overline{B'B}$ keine Arbeit geleistet wird, da die Feldstärke $\mathfrak{E}_z$ an den idealen Leitern verschwindet. Ersetzt man noch den Integranden $\mathfrak{E}_x$ durch $-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, so wird die induzierte elektromotorische Kraft

$$dz \frac{\partial}{\partial z} (\Phi_1 - \Phi_2).$$

Die negative zeitliche Zunahme des Flusses folgt aus Gleichung (255):

$$-\frac{1}{c} \frac{dF}{dt} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\Psi_1 - \Psi_2)\, dz.$$

Das Induktionsgesetz findet daher seinen Ausdruck in der Gleichung



$$\frac{\partial}{\partial z} (\Phi_1 - \Phi_2) = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\Psi_1 - \Psi_2).$$

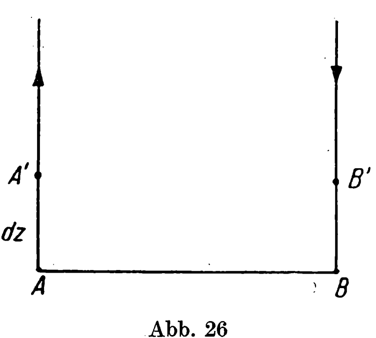


Abb. 26

Aus Gleichung (254) entnimmt man

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{e}{\varepsilon} 4 \ln \frac{d}{b}, \quad \frac{\mu}{c} (\Psi_1 - \Psi_2) = \frac{\mu}{c^2} I 4 \ln \frac{d}{b}.$$

Dies eingesetzt, erhält man nach entsprechender Kürzung die Gleichung (250):

$$\frac{\partial e}{\partial z} + \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial I}{\partial t} = 0. \tag{258'}$$

In der Praxis interessiert uns zunächst die Potentialdifferenz $\Phi_1 - \Phi_2$ zwischen zwei entsprechenden Punkten der beiden Leiter und die Stromstärke I. Benutzen wir die Bezeichnung

$$V = \Phi_1 - \Phi_2,$$

so folgt aus Gleichung (253)

$$V = \frac{e}{C}.$$

Es handelt sich einfach darum, in den Lösungen (251), (252) e durch V zu ersetzen. Wird der Faktor $\frac{1}{C}$ in die Funktionen f und g einbezogen, so lauten die gewünschten Gleichungen

$$V = f\left(t - \frac{z}{v}\right) + g\left(t + \frac{z}{v}\right), \tag{259}$$

$$\frac{1}{Cv} I = f\left(t - \frac{z}{v}\right) - g\left(t + \frac{z}{v}\right). \tag{260}$$

§ 81. LECHERsche Wellen

Die letzten beiden Gleichungen haben ein mannigfaltiges Anwendungsgebiet. Hier soll die Theorie der LECHERschen Versuche in ihren Grundzügen wiedergegeben werden. Das Leitungspaar beginne an der Stelle $z = -l$ und ende in der $z = 0$-Ebene. Durch letztere Festlegung sind die verschiedenen Bedingungen am Leitungsende leichter zu handhaben. Der Anfang der Drähte sei an einen periodischen Schwingungskreis gekoppelt. Dann wird auch V und I periodisch. f sowie g sind in ihrer zeitlichen Abhängigkeit durch $e^{i\omega t}$ zu ersetzen. Für die fortschreitende Welle schreiben wir daher

$$f\left(t - \frac{z}{v}\right) = a e^{i\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)}.$$

Für die reflektierte Welle lassen wir die Möglichkeit einer Phasenverschiebung β offen:

$$g\left(t + \frac{z}{v}\right) = b e^{i\omega\left(t + \frac{z}{v}\right) + i\beta}.$$

Jetzt nehmen die Gleichungen (259), (260) folgende Gestalt an:

$$V = a e^{i\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)} + b e^{i\omega\left(t + \frac{z}{v}\right) + i\beta}, \tag{261}$$

$$\frac{1}{Cv} I = a e^{i\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)} - b e^{i\omega\left(t + \frac{z}{v}\right) + i\beta}. \tag{262}$$

Die Enden der Drähte können allgemein durch einen Widerstand geschlossen sein. Es steht frei, durch Einschalten einer Spule, eines Kondensators oder auch eines einfachen Drahtes alle drei Arten des Widerstandes zu verwirklichen. Wir wählen als einfachsten Fall den OHMschen Widerstand R. An den Enden ($z = 0$) gilt dann das OHMsche Gesetz $V = IR$. Da jetzt R positiv reell ist, muß an der Stelle $z = 0$ der Quotient

$$\frac{V}{I} = \frac{1}{Cv} \frac{a + b e^{i\beta}}{a - b e^{i\beta}} = R$$

ebenfalls positiv reell sein. Dies ist nur möglich, wenn $\beta = 0$ und $a > b$ ist. Die Gleichung wird dann

$$\frac{a+b}{a-b} = RCv.$$

Daraus läßt sich das Amplitudenverhältnis $\frac{b}{a}$ der reflektierten und fortschreitenden Welle berechnen:

$$\frac{b}{a} = \frac{RCv - 1}{RCv + 1}. \tag{263}$$

Für eine beliebige Stelle z der Leitung wird der Quotient von Spannung und Strom

$$\frac{V}{I} = \frac{1}{Cv} \frac{a + b e^{i\frac{2\omega z}{v}}}{a - b e^{i\frac{2\omega z}{v}}}.$$

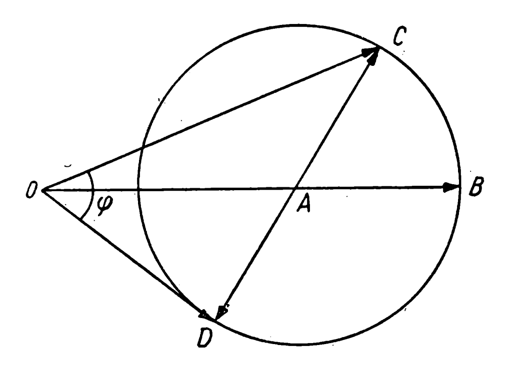


Abb. 27

Eine einfache graphische Darstellung läßt die Größen- und Phasenverhältnisse klar hervortreten (Abb. 27). Die Strecke $\overline{OA}$ bedeutet die Amplitude a, der Halbmesser des um A geschlagenen Kreises die Amplitude b. Wird im Punkte A von der Geraden $\overline{AB}$ der Winkel $\frac{2\omega z}{v}$ abgetragen, dessen Schenkel den Kreis in den Punkten C und D schneidet, so stellt $\overrightarrow{AC}$ den komplexen Vektor $b e^{i\frac{2\omega z}{v}}$ dar, $\overrightarrow{AD}$ hingegen den Vektor $-b e^{i\frac{2\omega z}{v}}$. Es gibt daher $\overrightarrow{OC}$ die Spannung V, $\overrightarrow{OD}$ aber $\frac{1}{Cv} I$ im gewählten Querschnitt z. Der Winkel $COD = \varphi$ stellt die Phasendifferenz zwischen Strom und Spannung dar.

Offene Drahtenden entsprechen dem Fall $R = \infty$. Aus Gleichung (263) folgt dann $b = a$. Die reflektierte Welle hat die gleiche Amplitude wie die fortschreitende. In der Abbildung geht jetzt der Kreis durch O, und φ wird zum rechten Winkel. Zwischen Strom und Spannung besteht an jeder Stelle die Phasendifferenz $\frac{\pi}{2}$. Aus der Abbildung läßt sich leicht entnehmen, daß die Nullstellen von V durch die Gleichung $\frac{2\omega z}{v} = (2n+1)\pi$, die von I durch die Gleichung $\frac{2\omega z}{v} = 2n\pi$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ gegeben sind. Es bilden sich stehende Wellen aus. Die Nullstellen von V und I sind die Knotenpunkte der entsprechenden Größen.

Besonders interessant ist der Fall $R = \frac{1}{Cv}$. Gleichung (263) sagt dann aus, daß es keine reflektierte Welle gibt: $b = 0$. Die fortschreitende Welle wird durch den Widerstand R vollständig absorbiert. Man hat daher die Möglichkeit, in der endlichen Drahtleitung nur fortschreitende Wellen zu erzeugen. In der Abbil-

dung schrumpft dann der Kreis auf den Punkt A zusammen, an jeder Stelle haben $\frac{1}{Cv} I$ und V die gleiche Größe und Phase. Der kritische Wert $R = \frac{1}{Cv}$ heißt Wellenwiderstand.

§ 82. Drahtwellen unter Berücksichtigung des Widerstandes

Alle unsere Betrachtungen bezogen sich auf den Fall idealer Leiter. Es besteht ein großes praktisches Interesse, die Theorie auf wirkliche Leiter auszudehnen; denn nur auf diesem Wege kann den Anforderungen der Telegraphie und Telephonie Genüge geleistet werden.

Wir beginnen sofort mit der mathematischen Behandlung der Frage. Die Doppelleitung habe ihren Anfang an der Stelle $z = 0$, wo z. B. durch die Tonfrequenz des Mikrophons Ströme in ihr induziert werden. In der Technik ist der gebräuchliche Mittelwert dieser Frequenz $\omega = 5000\,\mathrm{s}^{-1}$. Die Leitung erstrecke sich in der Z-Richtung ins Unendliche. Den Widerstand von 1 cm Doppelleitung bezeichnen wir mit R. Gelingt es, diese Größe in die Grundgleichungen einzuführen, so ist damit die theoretische Behandlungsweise gesichert. Die Kontinuitätsgleichung (258) bleibt natürlich unverändert. Die zweite Gleichung steht unter (258'). Bei ihrer Ableitung wurde vorausgesetzt, daß bei der Berechnung der elektromotorischen Kraft an den Wegstrecken AA', BB' die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}_z$ keine Arbeit leistet, da sie an idealen Leitern verschwindet. Ist der Leiter jedoch nicht ideal, so wird $\mathfrak{E}_z \neq 0$. Die auf beiden Seiten geleistete Arbeit beträgt $R\,I\,dz$. Jetzt lautet das Induktionsgesetz

$$RI + \frac{\partial}{\partial z}(\Phi_1 - \Phi_2) = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\Psi_1 - \Psi_2).$$

Mit

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{e}{C}, \quad \frac{\mu}{c}(\Psi_1 - \Psi_2) = LI$$

folgt daraus die Gleichung

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\frac{\partial e}{\partial z} = 0.$$

Auf Grund des Zusammenhanges $V = \frac{e}{C}$ führen wir wieder V statt e ein und schreiben unsere Hauptgleichungen

$$C\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} = 0, \tag{264}$$

$$L\frac{\partial I}{\partial t} + RI + \frac{\partial V}{\partial z} = 0. \tag{265}$$

Elimination von V führt zu der Gleichung

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - LC\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - RC\frac{\partial I}{\partial t} = 0.$$

Sie ist von genau demselben Typ, wie die „Telegraphengleichung" (230), was jetzt nachträglich die Benennung rechtfertigt. Zur Lösung machen wir den Ansatz

$$I = f(z)\, e^{i\omega t} \tag{266}$$

und erhalten für f

$$\frac{d^2 f}{d z^2} + (\omega^2 LC - i\omega RC) f = 0,$$

woraus

$$f = A\, e^{-i\sqrt{\omega^2 LC - i\omega RC}\, z}$$

folgt. Der Kürze halber bezeichnen wir den Radikanden mit γ^2:

$$\gamma^2 = \omega^2 LC - i\omega RC.$$

Die Zerlegung

$$\gamma = \alpha - i\beta$$

zeigt, daß sowohl der Realteil α als auch der Imaginärteil β unmittelbare physikalische Bedeutung haben; denn die Phase von I in Gleichung (266) wird jetzt

$$i(\omega t - \alpha z + i\beta z) = -\beta z + i\omega\left(t - \frac{\alpha}{\omega} z\right).$$

Es ist daher β die Dämpfungskonstante der Drahtwelle, $\frac{\alpha}{\omega}$ der reziproke Wert der Ausbreitungsgeschwindigkeit $\frac{\alpha}{\omega} = \frac{1}{v}$. Zur Berechnung von α und β dient die Gleichung

$$\alpha^2 - \beta^2 - i2\alpha\beta = \omega^2 LC - i\omega RC,$$

die in folgende zwei zerfällt:

$$\alpha^2 - \beta^2 = \omega^2 LC, \quad 2\alpha\beta = \omega RC.$$

Die Lösungen lauten

$$\alpha^2 = \frac{\omega C}{2}\left(\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2} + \omega L\right), \quad \beta^2 = \frac{\omega C}{2}\left(\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2} - \omega L\right). \tag{266}$$

Sie sind das genaue Analogon der Gleichung (236).

Die Ausdrücke sind nicht einfach. Wir beschränken uns daher auf zwei extreme Fälle:

$$1.\quad l \equiv \frac{\omega L}{R} \ll 1.$$

Der Ohmsche Widerstand ist groß gegenüber dem induktiven, der Strom ist stark gedämpft. In diesem Falle wird

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega RC}{2}}. \tag{267}$$

2. $l \gg 1$.

Als Resultat der Reihenentwicklung folgt

$$\alpha = \omega \sqrt{LC}\,, \quad \beta = \sqrt{\frac{R^2 C}{4L}} = \sqrt{\frac{\omega R C}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2l}}\,. \tag{268}$$

Man sieht, daß in diesem Falle der schwachen Dämpfung die Ausbreitungsgeschwindigkeit $\frac{\omega}{\alpha}$ und auch die Dämpfungskonstante β frequenzunabhängig sind. In diesem Falle ist die Leitung verzerrungsfrei. Ein Zahlenbeispiel soll die Verhältnisse klarlegen. Die Kapazität wird mittels Gleichung (254) berechnet. Wir wählen den Wert $C = 0{,}1$ cm, der in der Praxis als untere Grenze gelten kann. Der Induktionskoeffizient folgt aus Gleichung (257): $L = \frac{1}{C}\frac{1}{v^2}$, wobei v für Luftleitung gleich der Lichtgeschwindigkeit ist:

$$L = 10 \cdot \frac{1}{9 \cdot 10^{20}}\,\mathrm{s^2\,cm^{-1}} = 1{,}1 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{s^2\,cm^{-1}}.$$

Der Querschnitt der Kupferleitung betrage 1 mm². Mit $\sigma = 53 \cdot 10^{16}\,\mathrm{s^{-1}}$ erhält man für R:

$$R = \frac{1}{\sigma}\,\frac{l}{q} = 4 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{s\,cm^{-1}}.$$

Daher wird

$$l = \frac{\omega L}{R} = \frac{5000 \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-20}}{4 \cdot 10^{-16}} = 0{,}14.$$

Der erhaltene Wert ist noch klein gegen 1; die angegebenen Leiterdimensionen würden noch zu starker Dämpfung führen. Die Dämpfungskonstante β hätte nach Gleichung (267) den Wert $3{,}1 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{cm^{-1}}$. Es müßte also die Stromstärke nach Durchlaufen des Weges $z = \frac{1}{\beta} = 32$ km auf den e-ten Teil ihres Anfangswertes sinken. Um in das Gebiet schwacher Dämpfung zu gelangen, bietet sich als einziger gangbarer Weg die Erhöhung der Induktivität L. Zu diesem Zweck werden Induktionsspulen, sogenannte Pupinspulen, in die Leitung eingebaut (etwa vier pro Wellenlänge) und dadurch L vervielfacht. Der hundertfache Wert von L hebt l auf 14 und führt daher in das Gebiet schwacher Dämpfung. Die Konstante β, jetzt aus Gleichung (268) berechnet, zeigt einen fünffachen Abfall, was einer fünfmal so großen Reichweite (160 km) entspricht. Durch Verstärkung kann die Reichweite noch weitgehend erhöht werden.

§ 83. Wellenleiter

Schon der Einzeldraht dient, wenn auch in sehr unvollkommener Weise, als Wellenleiter. Die elektrischen Kraftlinien gehen von seinen Flächenladungen aus, und dadurch bleibt die Welle an den Draht gefesselt. Aber die auslaufenden Linien münden in die Wände und übrigen Gegenstände des Laboratoriums, wodurch die Welle verzerrt wird. Der zweite Paralleldraht Lechers bedeutete

einen großen Fortschritt in der Wellenleitung. Er verhindert das Vagabundieren der Feldlinien, die nun auch an ihren Einmündungsstellen metallisch geführt werden.

Im Gebiet der Zentimeterwellen ($\omega \sim 10^{10}\,\mathrm{s}^{-1}$) dient der Hohlleiter zur gerichteten Übertragung. Seinem Wesen nach besteht er aus einer Leiterröhre von kreisförmigem oder rechteckigem Querschnitt. Wir wählen hier der größeren Einfachheit wegen den rechteckigen Querschnitt und setzen ideale Leitfähigkeit voraus. Die relative Lage zum Koordinatensystem zeigt Abb. 28. Die Länge der Querschnittskanten sei a bzw. b. Wir denken uns die Welle längs der Z-Achse fortschreitend und setzen dem Vakuum entsprechend $\varepsilon = \mu = 1$.

Die Wellen im Hohlleiter sind im Gegensatz zu den Drahtwellen nicht transversal. Je nachdem, ob die magnetische oder die elektrische Feldstärke eine longitudinale Komponente besitzt, spricht man vom H- bzw. E-Wellentyp. Wir befassen uns zuerst mit dem H-Typ.

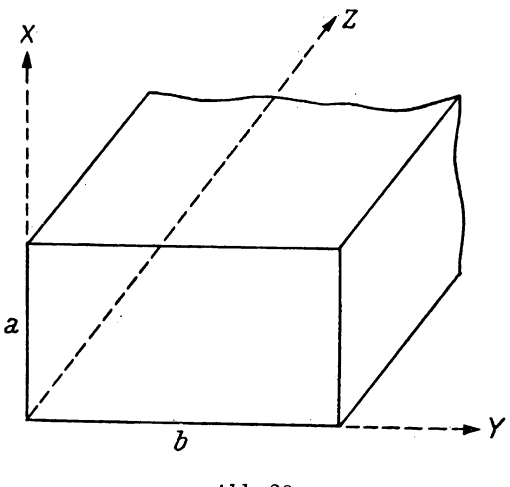


Abb. 28

Die drei Komponenten der elektrischen Feldstärke müssen die Wellengleichung

$$\Delta \mathfrak{E}_i - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i = x, y, z)$$

und die Divergenzgleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} = 0$$

befriedigen. Wir machen die Ansätze

$$\mathfrak{E}_x = f_1(x)\, g_1(y)\, e^{i(\omega t - kz)},$$

$$\mathfrak{E}_y = f_2(x)\, g_2(y)\, e^{i(\omega t - kz)},$$

$$\mathfrak{E}_z = 0,$$

wobei k die Wellenzahl $\frac{2\pi}{\lambda}$ im Hohlleiter bedeutet. Aus der Wellengleichung von $\mathfrak{E}_x$ folgt

$$\frac{f_1''}{f_1} + \frac{g_1''}{g_1} - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0.$$

Durch Separation erhält man daher

$$f_1'' + \alpha^2 f_1 = 0, \quad g_1'' + \beta^2 g_1 = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 + k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \tag{269}$$

Die allgemeine Lösung von g_1 lautet

$$g_1 = A_1 \sin\beta y + B_1 \cos\beta y.$$

Da nun aber $\mathfrak{E}_x$ für $y = 0$ tangential wird und daher dort verschwinden muß, folgt $B_1 = 0$. Ebenso wird $\mathfrak{E}_x$ an der Stelle $y = b$ tangential, woraus sich $\beta = \frac{n\pi}{b}$ ergibt. Man hat daher

$$g_1 = A_1 \sin \frac{n\pi}{b} y$$

(n ganze Zahl). Auf die gleiche Weise erhält man aus der Wellengleichung von $\mathfrak{E}_y$: $\alpha = \frac{m\pi}{a}$ und

$$f_2 = A_2 \sin \frac{m\pi}{a} x$$

(m ganze Zahl). Die Kontinuitätsgleichung führt zur Relation

$$f_1' g_1 + f_2 g_2' = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{f_1'}{f_2} = -\frac{g_2'}{g_1} = p.$$

Es lassen sich daher f_1 und g_2 durch einfache Integration bestimmen. Das Endergebnis lautet

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= A \frac{a}{m\pi} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i(\omega t - kz)}, \\ \mathfrak{E}_y &= -A \frac{b}{n\pi} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i(\omega t - kz)}, \\ \mathfrak{E}_z &= 0. \end{aligned} \tag{270}$$

Die magnetischen Feldstärken folgen sofort aus der Gleichung

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathfrak{E}.$$

Der E-Typ ($\mathfrak{H}_z = 0$) läßt sich auf analoge Art behandeln. Jetzt macht man die gleichen Ansätze für die Komponenten der magnetischen Feldstärke, bedenkt aber, daß an der idealen Leiteroberfläche die Normalkomponenten verschwinden müssen. Die Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_x &= B \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i(\omega t - kz)}, \\ \mathfrak{H}_y &= -B \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i(\omega t - kz)}, \\ \mathfrak{H}_z &= 0. \end{aligned} \tag{271}$$

Die $\mathfrak{E}$-Komponenten erhält man aus der Gleichung $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathfrak{H}$. Die $\mathfrak{E}_z$-Komponente ist jetzt im Inneren des Wellenleiters nicht Null, wohl aber an den Wänden, wo sie als Tangentialkomponente auftritt

Die dritte Gleichung (269) gilt in beiden Fällen. Wir schreiben sie in der Form

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}.$$

Die Größe $c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \omega_k$ nennen wir die kritische Frequenz und erhalten

$$k^2 = \frac{1}{c^2}\,(\omega^2 - \omega_k^2). \tag{272}$$

Soll die Welle durch den Hohlleiter gehen, muß die rechte Seite positiv sein. Welches ist die kleinste Frequenz ω, für die das noch der Fall ist? Dazu muß der kleinste Wert von ω_k berechnet werden. Ist z. B. $b \geqq a$, so wird ω_k für $m = 0$, $n = 1$ am kleinsten. Diese Annahme ist für den H-Typ zulässig; denn in den Gleichungen (270) könnte man infolge des beliebigen Wertes von A an die Stelle der Amplitude von $\mathfrak{E}_x$ einfach C schreiben und für die von $\mathfrak{E}_y$: $-C\frac{b}{a}\frac{m}{n}$. Man erhält dann die reelle Welle

$$\mathfrak{E}_y = \mathfrak{E}_z = 0, \quad \mathfrak{E}_x = C\sin\frac{n\pi y}{b}\,e^{i(\omega t - kz)} \quad \text{(Grundwelle).}$$

Für den E-Typ dagegen würde die Annahme $m = 0$, $n = 1$ zum Nullwert der Feldgrößen führen. Der kleinste Wert von ω_k wird durch $m = 1$, $n = 1$ erreicht.

Aus Gleichung (272) folgt

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_k}{\omega}\right)^2},$$

und die Phasengeschwindigkeit $\frac{\omega}{k} = v$ wird

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_k}{\omega}\right)^2}}. \tag{273}$$

Sie ist stets größer als c. Dagegen bleibt die Strömungsgeschwindigkeit der Energie, d. h. das Verhältnis

$$\frac{\text{Poyntingvektor}}{\text{Energiedichte}},$$

dem Betrage nach unter c.

Die allgemeine Welle im Hohlleiter wird durch Superposition der möglichen H- und E-Wellen dargestellt.

§ 84. Retardierte Potentiale

Das elektromagnetische Feld wird durch die Ladungen und Ströme erregt. Sind diese daher durch die Raumzeitfunktionen

$$\varrho = \varrho(\xi, \eta, \zeta, t), \quad \mathfrak{j} = \mathfrak{j}(\xi, \eta, \zeta, t)$$

gegeben, so ist auch das erregte elektromagnetische Feld bestimmt (ganz beliebig können ϱ und $\mathfrak{j}$ nicht gegeben werden; denn die Kontinuitätsgleichung

$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{j} = 0$ muß erfüllt sein). Die Aufgabe ist lösbar und kann auf Quadraturen zurückgeführt werden. Wir beschränken uns auf das Vakuum und führen die bezüglichen MAXWELLschen Gleichungen an:

$$\text{I.} \quad \frac{4\pi}{c}\mathfrak{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathfrak{H}, \qquad \text{II.} \quad \operatorname{div}\mathfrak{E} = 4\pi\varrho,$$

$$\text{III.} \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\mathfrak{E}, \qquad \text{IV.} \quad \operatorname{div}\mathfrak{H} = 0. \tag{274}$$

Die Lösung von Gleichung IV ist

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}. \tag{275}$$

Sie wird in Gleichung III eingesetzt:

$$\operatorname{rot}\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

Die Gleichung ist erfüllt, wenn die Größe unter dem Rotationszeichen ein Gradientvektor ist:

$$\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\Phi,$$

woraus

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}. \tag{276}$$

Sind daher Φ und $\mathfrak{A}$ bekannt, so sind dadurch auch die Feldstärken bestimmt. Φ heißt das skalare, $\mathfrak{A}$ das Vektorpotential. Wie man sieht, erschöpft sich der ganze Inhalt der zweiten MAXWELLschen Gleichungsgruppe in der Aussage, daß die sechs Komponenten der Feldstärken sich durch vier Potentiale gemäß (275) und (276) ausdrücken lassen. Dieser reine Formalismus genügt, um die FARADAYsche Induktion und die Tatsache, daß es keinen wahren Magnetismus gibt, zu beschreiben.

Gleichung (275) läßt, wie schon im Abschnitt der stationären Ströme bemerkt wurde, die Größe $\operatorname{div}\mathfrak{A}$ vollkommen frei. Wir treffen die Wahl

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{oder} \quad \operatorname{div}\mathfrak{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \tag{277}$$

Letztere Gleichung wird LORENTZkonvention genannt.

Jetzt setzen wir den Ausdruck (276) für $\mathfrak{E}$ in Gleichung II ein und erhalten

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi + \frac{1}{c}\operatorname{div}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = -4\pi\varrho.$$

Das Hinzufügen des identisch verschwindenden Ausdruckes $-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$ zur linken Seite führt auf die Form

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\mathfrak{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = -4\pi\varrho.$$

Infolge der LORENTZkonvention folgt daraus die endgültige Gleichung

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4 \pi \varrho. \tag{278}$$

Endlich substituiert man noch $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ in Gleichung I:

$$-\frac{1}{c}\left(\operatorname{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2}\right) - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathfrak{j}.$$

Für rot rot $\mathfrak{A}$ schreibt man grad div $\mathfrak{A} - \Delta \mathfrak{A}$ und erhält

$$\Delta \mathfrak{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad}\left(\operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{c} \mathfrak{j}.$$

Die LORENTZkonvention vereinfacht die Gleichung weiter zu

$$\Delta \mathfrak{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathfrak{j}. \tag{279}$$

Gelingt es, die Gleichungen (278) und (279) zu integrieren, so liefern die Gleichungen (275), (276) das elektromagnetische Feld. Im Falle stationärer Verhältnisse entfallen die zeitlichen Ableitungen. Wir erhalten die wohlbekannten Gleichungen

$$\Delta \Phi = -4 \pi \varrho, \quad \Delta \mathfrak{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathfrak{j}$$

zurück. Die Lösungen lauten

$$\Phi(x, y, z) = \iiint \frac{\varrho(\xi, \eta, \zeta)}{r} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta, \quad \mathfrak{A}(x, y, z) = \frac{1}{c} \iiint \frac{\mathfrak{j}(\xi, \eta, \zeta)}{r} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta.$$

Wir werden beweisen, daß im jetzigen viel allgemeineren Falle die Lösungen folgende sehr ähnliche Gestalt haben:

$$\Phi(x, y, z, t) = \iiint \frac{\varrho\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c}\right)}{r} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta, \tag{280}$$

$$\mathfrak{A}(x, y, z, t) = \frac{1}{c} \iiint \frac{\mathfrak{j}\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c}\right)}{r} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta,$$

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}. \tag{281}$$

Die Gleichungen besagen, daß die Potentiale im Aufpunkt x, y, z zur Zeit t von solchen ϱ- und $\mathfrak{j}$-Werten herstammen, die in den einzelnen Volumelementen zur Zeit $t - \frac{r}{c}$ gültig waren, also um soviel früher, wie eine Wirkung Zeit braucht, um sich vom Quellpunkt bis zum Aufpunkt mit der Geschwindigkeit c fortzupflanzen. Φ und $\mathfrak{A}$ werden deshalb retardierte Potentiale genannt.

Zum Beweise, daß die Integrale die Differentialgleichungen (278) und (279) befriedigen, zerlegen wir das Integrationsgebiet in zwei Teile τ_1 und τ_2. τ_1 ent-

hält den Aufpunkt und seine unmittelbare Umgebung, τ_2 den übrigen Raum. Dementsprechend zerfällt auch Φ in zwei Teile:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \int\limits_{\tau_1} \frac{\varrho\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}\, d\tau + \int\limits_{\tau_2} \frac{\varrho\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}\, d\tau.$$

Im ersten Integral schreiben wir

$$\varrho\left(t - \frac{r}{c}\right) = \varrho(t) - \frac{\partial \varrho}{\partial t}\frac{r}{c} + \cdots.$$

Das unendlich kleine zweite Glied kann neben dem ersten vernachlässigt werden. Daher wird

$$\Phi_1 = \int\limits_{\tau_1} \frac{\varrho}{r}\, d\tau,$$

ganz so wie im statischen Falle. Deshalb gilt auch

$$\Delta\Phi_1 = -4\pi\varrho(x, y, z, t).$$

Nun bilden wir $\Delta\Phi_2$, selbstverständlich bezüglich der Koordinaten x, y, z. Da diese nur in r vorkommen, wird die Aufgabe vereinfacht. Für eine Funktion $f(r)$ erhält man bekanntlich

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{d r^2}(r f).$$

Nach diesem Muster wird

$$\Delta\Phi_2 = \int\limits_{\tau_2} \frac{1}{r}\frac{d^2}{d r^2}\varrho\left(t - \frac{r}{c}\right) d\tau.$$

Wir benutzen noch die Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\varrho\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varrho\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

und erhalten

$$\Delta\Phi_2 = \frac{1}{c^2}\int \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varrho\left(t - \frac{r}{c}\right) d\tau = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2};$$

denn $\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2}$ verschwindet, wenn τ_1 gegen Null konvergiert. Zusammengefaßt ergibt sich

$$\Delta\Phi \equiv \Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2 = -4\pi\varrho + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}.$$

Dies ist gerade die Gleichung (278), die somit durch den Integralausdruck (280) befriedigt wird. Für $\mathfrak{A}$ führen die gleichen Betrachtungen zum gleichen Ergebnis.

Es ist noch zu beweisen, daß durch die Integrale auch die LORENTZkonvention (277) befriedigt wird. Wir benutzen folgende Schreibweise: Das Über-

streichen einer Funktion soll bedeuten, daß anstatt t als Argument $t - \frac{r}{c}$ einzusetzen ist. Es bedeutet z. B. $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}$, daß in f zuerst t durch $t - \frac{r}{c}$ zu ersetzen und dann erst zu differenzieren ist, $\overline{\frac{\partial f}{\partial x}}$ hingegen, daß zuerst differenziert und dann t durch $t - \frac{r}{c}$ ersetzt wird. Bei der Ableitung nach t haben die zwei Schreibweisen die gleiche Bedeutung $\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial f}{\partial t}}$. Es folgt z. B.

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial f}{\partial x}} - \frac{1}{c}\overline{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial r}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \bar{f}}{\partial \xi} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \xi}} - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial \xi}.$$

Nach dieser Vorbereitung bilden wir $\operatorname{div}_P \mathfrak{A}$:

$$\operatorname{div}_P \mathfrak{A} = \frac{1}{c}\iiint \operatorname{div}_P \frac{\bar{\mathfrak{j}}}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

$$= \frac{1}{c}\iiint\left\{\left(\bar{\mathfrak{j}}, \operatorname{grad}_P \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{rc}\left(\overline{\frac{\partial \mathfrak{j}}{\partial t}}, \operatorname{grad}_P r\right)\right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Bekanntlich ist für r

$$\operatorname{grad}_P r = -\operatorname{grad}_Q r.$$

Man erhält somit

$$\operatorname{div}_P \mathfrak{A} = \frac{1}{c}\iiint\left\{\left(-\bar{\mathfrak{j}}, \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{rc}\left(\overline{\frac{\partial \mathfrak{j}}{\partial t}}, \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r}\right)\right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Am ersten Glied rechts wollen wir eine partielle Integration vollziehen und schreiben es deswegen in der Form

$$\left(-\bar{\mathfrak{j}}, \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r}\right) = -\operatorname{div}_Q \frac{\bar{\mathfrak{j}}}{r} + \frac{1}{r}\operatorname{div}_Q \bar{\mathfrak{j}} = -\operatorname{div}_Q \frac{\bar{\mathfrak{j}}}{r} + \frac{1}{r}\overline{\operatorname{div}_Q \mathfrak{j}} - \frac{1}{rc}\left(\overline{\frac{\partial \mathfrak{j}}{\partial t}}, \operatorname{grad}_Q r\right).$$

Dies eingesetzt, folgt

$$\operatorname{div}_P \mathfrak{A} = \frac{1}{c}\iiint\left\{-\operatorname{div}_Q \frac{\bar{\mathfrak{j}}}{r} + \frac{1}{r}\overline{\operatorname{div}_Q \mathfrak{j}}\right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Der erste Ausdruck der rechten Seite des Integrals wird nach Anwendung des Gaussschen Satzes und Erstreckung über die unendliche Kugelfläche gleich Null, da im Unendlichen keine Ströme vorhanden sein sollen. An die Stelle von $\frac{1}{r}\overline{\operatorname{div}_Q \mathfrak{j}}$ kann im Sinne der Kontinuitätsgleichung $-\frac{1}{r}\overline{\frac{\partial \varrho}{\partial t}}$ gesetzt werden:

$$\operatorname{div}_P \mathfrak{A} = -\frac{1}{c}\iiint \frac{\partial}{\partial t}\frac{\varrho\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Das ist gerade die Lorentzkonvention.

§ 85. Potentiale von Liénard und Wiechert

Die Elektronentheorie betrachtet die Ladungs- und Stromdichte nicht als stetig verteilte Größen, sondern arbeitet entsprechend der atomistischen Struktur der Elektrizität mit bewegten Punktladungen. Es erhebt sich die Frage, wie das Feld solcher Ladungen zu bestimmen sei.

Um die Aufgabe zu lösen, denken wir uns ein endliches Volumen V, in dem eine gleichmäßige Dichte ϱ zugegen ist. Durch zwei Kugelflächen, deren Zentrum im Aufpunkt $P(x, y, z)$ liegt, begrenzen wir in V eine Schicht mit der sehr kleinen Höhe h (Abb. 29). Hat die Schicht die Grundfläche f, so sind ihr Rauminhalt fh und die in ihr enthaltene Elektrizitätsmenge $de = fh\varrho$. Es soll das Integral (280) für diese Schicht berechnet werden. Da ϱ unabhängig von der Zeit an jeder Stelle denselben Wert besitzt, erhält man

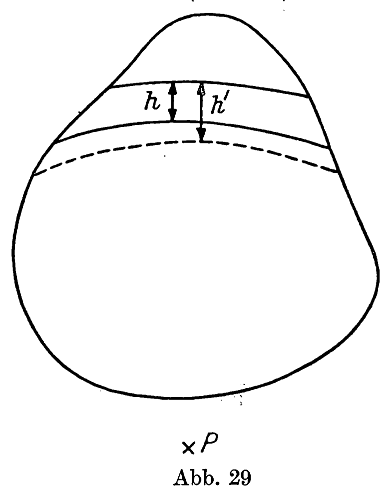


Abb. 29

$$d\Phi = \int \frac{\varrho\, d\tau}{r} = \frac{de}{r}.$$

Die Integration bezieht sich auf das Volumen fh. Das ist der gewöhnliche elektrostatische Fall, der nichts Neues bietet.

Jetzt wollen wir annehmen, daß die elektrischen Dichten an jedem Ort der Schicht eine radiale Geschwindigkeit vom gleichen Betrage v_r zum Aufpunkt hin besitzen. Die Integration beginnen wir an der oberen Kugelfläche zur Zeit $t - \frac{r}{c}$, wo r den Radius dieser Fläche bedeutet. Da ϱ auch jetzt konstant ist, haben wir dasselbe Integral

$$d\Phi = \int \frac{\varrho\, d\tau}{r}$$

zu bilden, aber das Integrationsgebiet ist ein anderes. Denn infolge der Radialbewegung hat sich die untere Kugelfläche an den Aufpunkt herangeschoben; es ist also Ladung auch unterhalb der urpsrünglichen Schicht vorhanden und das Integral ist auch auf diese auszudehnen. Befindet sich die untere Fläche zur Zeit t' in der Entfernung r' vom Aufpunkt, so kann sie in P zur Zeit t nur dann einen Beitrag liefern, wenn

$$r' = c(t - t') \tag{282}$$

ist. Der durchlaufene Weg der Fläche beträgt $r - h - r'$, die Zeitdauer ihrer Bewegung, da diese im Zeitpunkt $t - \frac{r}{c}$ begann, ist $t' - \left(t - \frac{r}{c}\right)$. Es gilt daher

$$r - h - r' = v_r\left(t' - t + \frac{r}{c}\right). \tag{283}$$

Wird $t' - t$ der Gleichung (282) entnommen und eingesetzt, so folgt

$$r - r' = \frac{h}{1 - \frac{v_r}{c}} = h'.$$

Die Höhe der wirksamen Schicht ist mithin h' und ihr Volumen $fh' = \frac{fh}{1 - \frac{v_r}{c}}$.
Nimmt man die Schicht unendlich dünn an, so hat man

$$d\Phi = \frac{fh\varrho}{r\left(1 - \frac{v_r}{c}\right)} = \frac{de}{r\left(1 - \frac{v_r}{c}\right)}.$$

Es ist noch das Integral über die einzelnen Schichten zu berechnen. Zu diesem Zwecke nehmen wir aber jetzt an, daß die Lineardimensionen des Volumens V unendlich klein seien. Wir haben es dann mit einer bewegten Punktladung zu tun. r bedeutet dann nicht mehr den Abstand einer Schicht vom Aufpunkt, sondern den des Teilchens selbst und ebenso v_r die Radialgeschwindigkeit des Teilchens. Es kommt dann der Nenner von $d\Phi$ vor das Integral. Man erhält

$$\Phi = \frac{1}{r\left(1 - \frac{v_r}{c}\right)} \int de = \frac{e}{r\left(1 - \frac{v_r}{c}\right)}. \tag{284}$$

Auf ganz dieselbe Weise berechnet man das Integral (281) für Punktladungen. Da für den Konvektionsstrom $\mathfrak{i} = \varrho \mathfrak{v}$ gilt, folgt

$$\mathfrak{A} = \frac{e \mathfrak{v}}{r(c - v_r)}. \tag{285}$$

In konkreten Fällen erfolgt die Berechnung der LIÉNARD-WIECHERTschen Potentiale auf folgende Weise. Die vorgeschriebene Bewegung der Punktladung wird durch die entsprechenden Zeitfunktionen ihrer Koordinaten angegeben, z. B. durch die auf den Aufpunkt P bezogenen Polarkoordinaten

$$r = r(t), \quad \vartheta = \vartheta(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

Will man den Wert der Potentiale in P zur Zeit t kennen, so muß in den Gleichungen (284) und (285) r, v_r und $\mathfrak{v}$ zu einer zurückliegenden aktiven Zeit genommen werden, für die gilt

$$r(t') = c(t - t'). \tag{286}$$

Die Rechnung wird durch den Umstand erschwert, daß schon bei verhältnismäßig einfachen Bewegungen die Bestimmung von t' aus Gleichung (286) nur durch Näherungsmethoden möglich ist.

Es darf nicht vergessen werden, daß die vorgeschriebene Bewegung der Punktladung wegen der Rückwirkung des Feldes nur durch Anwendung äußerer mechanischer Kräfte aufrecht zu erhalten ist. Die einzige Ausnahme ist die geradlinig gleichförmige Bewegung.

§ 86. Feld eines schwingenden Dipols

Sind die Quellen des Feldes die von einer elektrischen Dipolverteilung herstammenden Ladungen und Ströme, so wird nach Gleichungen (64) und (163)

$$\varrho = -\operatorname{div} \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{i} = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}. \tag{287}$$

Die Bestimmungsgleichungen der Potentiale Φ und $\mathfrak{A}$ werden demgemäß

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 4\pi \operatorname{div} \mathfrak{P}, \tag{288}$$

$$\Delta \mathfrak{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}, \tag{289}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \tag{290}$$

Es ist in diesem Falle möglich, die vier unbekannten Potentiale auf drei Größen, die man Komponenten des HERTZschen Vektors $\mathfrak{Z}$ nennt, zurückzuführen. Setzt man

$$\Phi = -\operatorname{div} \mathfrak{Z}, \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} \tag{291}$$

und fordert für $\mathfrak{Z}$ die Befriedigung der Differentialgleichung

$$\Delta \mathfrak{Z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} = -4\pi \mathfrak{P}, \tag{292}$$

so überzeugt man sich leicht, daß durch die Ausdrücke (291) die Gleichungen (288) und (289) erfüllt werden, die LORENTZkonvention (290) aber zur Identität wird. Die Lösung der Gleichung (292) ergibt sich in der Form des retardierten Integrals

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{r}, t) = \int \frac{\mathfrak{P}\left(\mathfrak{r}', t - \frac{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|}{c}\right)}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} \, d\tau'. \tag{293}$$

Als Beispiel betrachten wir den aus historischen und praktischen Gesichtspunkten gleichwichtigen Fall, wo $\mathfrak{P}$ zu einer im Anfangspunkt singulären Funktion wird: $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}(t)\,\delta(\mathfrak{r})$ (δ DIRACsche Funktion). Der physikalische Sinn dieses Ansatzes ist, daß das Feld durch einen im Anfangspunkt befindlichen HERTZschen Dipol, durch eine kurze Antenne oder durch ein im Atomverband schwingendes Elektron erzeugt wird. Aus Gleichung (293) folgt jetzt

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{r}, t) = \frac{\mathfrak{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}. \tag{294}$$

Wir schreiben noch die expliziten Ausdrücke der Feldstärken, wie sie sich aus Gleichung (291) ergeben, nieder:

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c^2}\ddot{\mathfrak{Z}} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{Z},$$

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\operatorname{rot}\dot{\mathfrak{Z}}.$$

In unserem Falle wird

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{\mathfrak{p}}}{r} + \operatorname{grad}\left\{-\frac{(\mathfrak{p},\mathfrak{r}^\circ)}{r^2} - \frac{(\dot{\mathfrak{p}},\mathfrak{r}^\circ)}{c\,r}\right\}$$

$$= \left(3\frac{(\mathfrak{p},\mathfrak{r}^\circ)\,\mathfrak{r}^\circ}{r^3} - \frac{\mathfrak{p}}{r^3}\right) + \left(\frac{3\,(\dot{\mathfrak{p}},\mathfrak{r}^\circ)\,\mathfrak{r}^\circ}{c\,r^2} - \frac{\dot{\mathfrak{p}}}{c\,r^2}\right) - \frac{[\mathfrak{r}^\circ,[\ddot{\mathfrak{p}},\mathfrak{r}^\circ]]}{c^2\,r}, \tag{295}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\dot{\mathfrak{p}}}{r} = \frac{[\dot{\mathfrak{p}},\mathfrak{r}^\circ]}{c\,r^2} + \frac{[\ddot{\mathfrak{p}},\mathfrak{r}^\circ]}{c^2\,r}. \tag{296}$$

$\mathfrak{r}^\circ$ bedeutet hier den Einheitsvektor, der vom Anfangspunkt zum Aufpunkt hinweist. Die Argumente von $\mathfrak{p}$, $\dot{\mathfrak{p}}$, $\ddot{\mathfrak{p}}$ sind durchweg $t - \frac{r}{c}$. Die drei Klammerausdrücke auf der rechten Seite der Gleichung (295) bedeuten drei verschiedene Zonen des elektrischen Feldes. Die erste, die mit dem Abstand r am stärksten abfällt, heißt statische Dipolzone, die zweite ist die Übergangszone, die dritte, die in großer Entfernung allein eine Rolle spielt, die Wellenzone. Der statischen Zone entspricht natürlich kein magnetisches Feld, so daß das erste Glied rechts in Gleichung (296) sofort die Biot-Savartsche Zone und das zweite die Wellenzone darstellt. Läßt man auf der rechten Seite nur die letzten Glieder stehen, so ersieht man aus den entsprechenden Vektorprodukten, daß im Wellengebiet sowohl $\mathfrak{E}$ als auch $\mathfrak{H}$ transversal sind und außerdem $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{H}$ senkrecht steht.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen wollen wir uns mit dem periodisch schwingenden Hertzschen Dipol noch etwas ausführlicher beschäftigen. Nennt man die Amplitude seines Dipolmomentes p, so ist zu schreiben

$$y(t) = \mathfrak{e}\,p\,e^{i\omega t},$$

wobei der Einheitsvektor $\mathfrak{e}$ die Schwingungsrichtung anzeigt. Liegt diese in der Z-Achse, so folgt

$$\mathfrak{p}_x = 0, \quad \mathfrak{p}_y = 0, \quad \mathfrak{p}_z = p\,e^{i\omega t},$$

$$\mathfrak{p}_z\left(t - \frac{r}{c}\right) = p\,e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}, \quad \dot{\mathfrak{p}}_z\left(t - \frac{r}{c}\right) = i\,\omega\,p\,e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)},$$

$$\ddot{\mathfrak{p}}_z\left(t - \frac{r}{c}\right) = -\,\omega^2 p\,e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}. \tag{297}$$

Jetzt sind wir imstande, die Größenordnungen von $\mathfrak{E}$ in den drei Gebieten nebeneinander zu stellen:

$$\left|\frac{\mathfrak{p}}{r^3}\right|, \quad \left|\frac{\dot{\mathfrak{p}}}{c\,r^2}\right|, \quad \left|\frac{\ddot{\mathfrak{p}}}{c^2\,r}\right| = \frac{p}{r^3}, \quad \frac{\omega\,p}{c\,r^2}, \quad \frac{\omega^2\,p}{c^2\,r} = \frac{p}{r^3}, \quad \frac{p}{\lambda r^2}, \quad \frac{p}{\lambda^2 r}.$$

Jedes Glied ist um den Faktor $\frac{r}{\lambda}$ größer als das vorhergehende. Beobachtet man daher das Feld in einem Abstand r vom Sender, der groß ist gegen die Wellenlänge λ der ausgesandten Strahlung, so sind nur die letzten Glieder von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ beizubehalten. Strahlt z. B. ein Sender Wellen mit der Länge $\lambda = 500$ m aus, so ist man in 50 km Entfernung schon vollkommen in der Wellenzone, da $\frac{r}{\lambda} = 100 \gg 1$. Wir interessieren uns nur für letztere Zone und schreiben daher

$$\mathfrak{H} = \frac{[\ddot{\mathfrak{p}}, \mathfrak{r}^\circ]}{c^2 r}, \quad \mathfrak{E} = -\frac{[\mathfrak{r}^\circ [\ddot{\mathfrak{p}}, \mathfrak{r}^\circ]]}{c^2 r} = [\mathfrak{H}, \mathfrak{r}^\circ]. \tag{298}$$

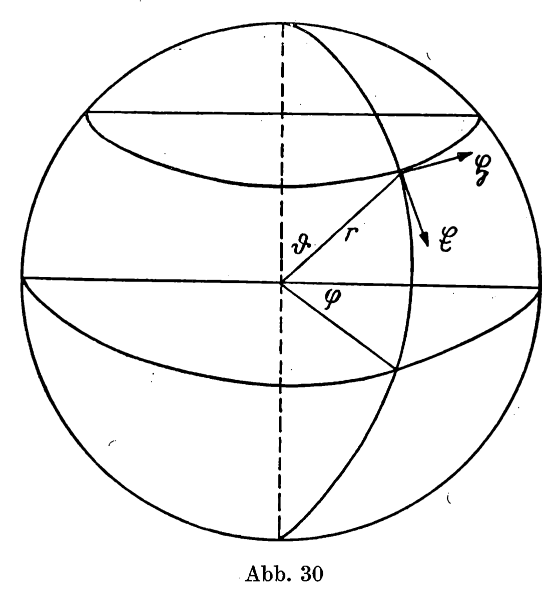


Abb. 30

Um die Komponenten des Einheitsvektors $\mathfrak{r}^\circ$ bequem angeben zu können, führen wir den von der Z-Achse gerechneten Polabstand ϑ und das von der X-Achse gezählte Azimut φ ein (Abb. 30). Dann gilt

$$\mathfrak{r}_x^\circ = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad \mathfrak{r}_y^\circ = \sin\vartheta\sin\varphi, \quad \mathfrak{r}_z^\circ = \cos\vartheta$$

und für die Komponenten der Feldstärken folgt

$$\mathfrak{H}_x = \frac{p}{r}\frac{\omega^2}{c^2}\sin\vartheta\sin\varphi e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}, \quad \mathfrak{H}_y = -\frac{p}{r}\frac{\omega^2}{c^2}\sin\vartheta\cos\varphi e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}, \quad \mathfrak{H}_z = 0, \tag{299}$$

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{p}{r}\frac{\omega^2}{c^2}\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}, \quad \mathfrak{E}_y = -\frac{p}{r}\frac{\omega^2}{c^2}\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)},$$
$$\mathfrak{E}_z = \frac{p}{r}\frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\vartheta e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}. \tag{300}$$

Unter der Exponentialfunktion ist ihr Realteil $\cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$ zu verstehen. Das Resultat wird anschaulicher, wenn man von den rechtwinkligen zu den Polarkoordinaten übergeht. Um dies durchzuführen, schreiben wir zu den obigen Komponenten des Einheitsvektors $\mathfrak{r}^\circ$ noch diejenigen der Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_\vartheta$ bzw. $\mathfrak{e}_\varphi$, die in die Richtung von $d\vartheta$ bzw. $d\varphi$ fallen:

$$\mathfrak{e}_\vartheta: \quad \cos\vartheta\cos\varphi, \quad \cos\vartheta\sin\varphi, \quad -\sin\vartheta,$$

$$\mathfrak{e}_\varphi: \quad -\sin\varphi, \quad \cos\varphi, \quad 0.$$

Jetzt folgt sofort

$$\mathfrak{H}_r = 0, \quad \mathfrak{H}_\vartheta = 0, \quad \mathfrak{H}_\varphi = -\frac{p}{r}\frac{\omega^2}{c^2}\sin\vartheta e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)},$$

$$\mathfrak{E}_r = 0, \quad \mathfrak{E}_\vartheta = -\frac{p}{r}\frac{\omega^2}{c^2}\sin\vartheta e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}, \quad \mathfrak{E}_\varphi = 0. \tag{301}$$

Aus diesen Gleichungen läßt sich folgendes herauslesen: Die Welle ist transversal, und $\mathfrak{E}$ steht senkrecht auf $\mathfrak{H}$. Die Amplitude beider Feldstärken ist $\frac{p}{r}\frac{\omega^2}{c^2}\sin\vartheta$. In der Schwingungsrichtung verschwinden daher die Feldstärken; ihren größten Wert nehmen sie in der Äquatorebene $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ an. $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ bilden ein Rechtssystem. Die elektrische Feldstärke schwingt im Meridian, die magnetische im Breitenkreis. Es handelt sich daher um eine linear polarisierte Welle. Der schwingende Dipol ist das einfachste Modell einer punktförmigen ruhenden Lichtquelle, die linear polarisiertes Licht aussendet.

(Die Quantentheorie beruft sich darauf, daß die Amplitude von $\mathfrak{E}$ proportional $p\sin\vartheta$, d.h. proportional der senkrechten Projektion von p auf $\mathfrak{E}$ ist, und leitet daraus gewisse Auswahlregeln ab.)

Schließlich wollen wir noch die sekundliche Ausstrahlung des Dipols bestimmen. Darunter verstehen wir diejenige Energie, die in einer Sekunde durch die Fläche einer Kugel in der Wellenzone mit dem Radius r hindurchtritt. Maßgebend dafür ist der Poyntingsche Vektor

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}].$$

Der Vektor fällt in die Fortpflanzungsrichtung $\mathfrak{r}$. Sein Betrag ist

$$|\mathfrak{S}| = \frac{c}{4\pi}|\mathfrak{E}|\cdot|\mathfrak{H}| = \frac{c}{4\pi}\frac{p^2}{r^2}\frac{\omega^4}{c^4}\sin^2\vartheta\cos^2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Wir berechnen zuerst die während der Schwingungsdauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$ durch 1 cm² hindurchgehende Energie:

$$\int_0^T |\mathfrak{S}|\,dt = \frac{c}{4\pi}\frac{p^2}{r^2}\frac{\omega^4}{c^4}\sin^2\vartheta\,\frac{1}{2}\int_0^T\left\{1 + \cos 2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right\}dt.$$

Das Integral der Kosinusfunktion verschwindet, und es bleibt

$$\int_0^T |\mathfrak{S}|\, dt = \frac{1}{8\pi}\frac{p^2}{r^2}\frac{\omega^4}{c^3}\sin^2\vartheta\, T.$$

Um über die Kugel zu integrieren, wählen wir als Flächenelement den Inhalt $2\pi r^2 \sin\vartheta d\vartheta = -2\pi r^2 d(\cos\vartheta)$ der Kugelzone, die zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ liegt, und erhalten

$$U_T = -\frac{1}{4}p^2\frac{\omega^4}{c^3}T\int_0^\pi \sin^2\vartheta d(\cos\vartheta) = \frac{p^2\omega^4}{3c^3}T.$$

Die während einer Sekunde hindurchtretende Energie ist dann

$$U_{\text{sec}} = \frac{p^2\omega^4}{3c^3} = \frac{p^2(2\pi\nu)^4}{3c^3}. \tag{302}$$

Die Ausstrahlung ist der vierten Potenz der Frequenz ν proportional.

Wir wenden unser Resultat auf ein strahlendes Atom an, bei dem der Energieverlust eine Dämpfung der Schwingung hervorruft. Die gedämpfte und daher nicht mehr rein harmonische Schwingung setzt sich aus FOURIERkomponenten zusammen, die einem größeren Frequenzgebiet angehören. Der mit der Strahlung verbundene Energieverlust trägt daher zur Verbreiterung der Spektrallinien bei.

Auch die Ausstrahlung einer Sendeantenne wird durch Gleichung (302) dargestellt. Für eine Antenne ist jedoch nicht das elektrische Moment p, sondern ihre effektive Stromstärke charakteristisch. Der Zusammenhang beider ist leicht anzugeben. Denkt man sich an den beiden Enden der Antenne, deren Länge l sei, die Ladungen

$$\pm e = \pm e_0 e^{i\omega t} \tag{303}$$

lokalisiert, so beträgt das Moment der Antenne

$$le = le_0 e^{i\omega t},$$

le_0 entspricht mithin der Amplitude p, woraus $e_0 = \frac{p}{l}$ folgt. Durch Differentiation der Gleichung (303) erhalten wir

$$I = \frac{de}{dt} = e_0 i\omega e^{i\omega t} = \frac{p}{l}\omega e^{i\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Die Amplitude I_0 der schwingenden Stromstärke ist daher

$$I_0 = \frac{p\omega}{le}.$$

Für das Quadrat der effektiven Stromstärke gilt

$$I_{\text{eff}}^2 - \frac{1}{2}I_0^2 = \frac{1}{2}\frac{p^2\omega^2}{l^2e^2}$$

und hieraus folgt

$$p^2 = 2 \frac{l^2}{\omega^2} I_{\text{eff}}^2 .$$

Dies in Gleichung (302) eingesetzt, ergibt

$$U_{\text{sec}} = \frac{8\pi^2}{3c} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I_{\text{eff}}^2 . \tag{304}$$

λ ist die Wellenlänge der ausgesandten Strahlung. Wir fragen: Welcher OHMsche Widerstand würde durch erzeugte Wärme denselben Verlust an Stromenergie verursachen? Nach dem Satz von JOULE ist die Wärme $Q = R I_{\text{eff}}^2$. Der Vergleich mit Gleichung (304) zeigt, daß

$$R = \frac{8\pi^2}{3c} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \quad \text{el.-stat. Einheiten}$$

oder $80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \Omega$. Beträgt die Länge der Antenne nur den zehnten Teil der Wellenlänge, so wird R schon $8\ \Omega$. Man nennt diesen Widerstand den Strahlungswiderstand der Antenne.

§ 87. Erdwellen

Die besprochene HERTZsche Lösung, die ein einheitliches Medium voraussetzt, darf nicht ohne weiteres auf Senderwellen angewandt werden. Diese pflanzen sich nicht nur in der Luft, sondern zugleich in der Erde fort. Als drittes, vom elektrischen Standpunkt ebenfalls verschiedenes Medium käme auch noch die HEAVISIDE-Schicht in Betracht. Es soll jedoch der Einfachheit halber nur die Grenzfläche Erde–Luft berücksichtigt werden, die als Ebene vorausgesetzt wird. In diese legen wir die X- und Y-Achse unseres Koordinatensystems, die Z-Achse soll vertikal aufwärts gerichtet sein. Wir wollen die Wellen in solcher Entfernung vom Sender betrachten, daß sie in guter Näherung als eben gelten können. Erfolgt die Ausbreitung in der positiven X-Richtung, so ist jede Komponente der Feldstärken mit dem Phasenfaktor $e^{i\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)}$ zu versehen, wobei v die Ausbreitungsgeschwindigkeit in der Luft bzw. Erde bedeutet. Was die Polarisation der Wellen anbelangt, soll die magnetische Feldstärke mit der Y-Achse gleichgerichtet sein, d. h., die magnetischen Kraftlinien sollen zur Y-Achse parallele Gerade sein. In transversalen ebenen Wellen müßte dann die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ in die Z-Richtung fallen. Mit solchen Wellen wären aber die Grenzbedingungen nicht zu erfüllen. Daß solche auftreten müssen, folgt aus der Verschiedenheit der Konstanten $\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1$ von den Werten $\varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2$, wobei die ersteren sich auf Luft, die zweiten sich auf die Erde beziehen. Wir müssen deshalb in beiden Medien außer der Transversalkomponente $\mathfrak{E}_z$ auch eine longitudinale $\mathfrak{E}_x$ zulassen. Unser Ansatz lautet daher

$$\mathfrak{H}_y = f(z)\, e^{i\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)}, \quad \mathfrak{E}_x = g(z)\, e^{i\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)}, \quad \mathfrak{E}_z = h(z)\, e^{i\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)}; \tag{305}$$

Die übrigen Komponenten sind Null. Eine Abhängigkeit von y verbietet sich aus Symmetriegründen. In den Grundgleichungen ersetzen wir die Stromdichte $\mathfrak{j}$ sofort durch $\sigma\mathfrak{E}$ und schreiben das System (170) in Komponentengleichungen nieder:

$$\begin{aligned}
&\text{I.} && \frac{4\pi}{c}\sigma\mathfrak{E}_x + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial t} = -\frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial z}, \quad \frac{4\pi}{c}\sigma\mathfrak{E}_z + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial t} = \frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial x}, \\
&\text{II.} && \frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial x} = 0, \\
&\text{III.} && \frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial t} = \frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial z}, \\
&\text{IV.} && \frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial y} = 0, \text{ identisch erfüllt.}
\end{aligned} \tag{306}$$

Durch Einsetzen von Gleichung (305) erhalten wir folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\text{I.} && \left(\frac{4\pi}{c}\sigma + \frac{\varepsilon}{c}i\omega\right)g = -f', \quad \left(\frac{4\pi}{c}\sigma + \frac{\varepsilon}{c}i\omega\right)h = -\frac{i\omega}{v}f, \\
&\text{II.} && -\frac{i\omega}{v}g + h' = 0, \\
&\text{III.} && \frac{\mu}{c}i\omega f = -\frac{i\omega}{v}h - g'.
\end{aligned} \tag{307}$$

Gleichung (307) II ist eine Folge der zwei Gleichungen (307) I, so daß die Zahl der Gleichungen übereinstimmt mit der Zahl der unbekannten Funktionen f, g, h. Zwecks Separierung drücken wir g und h mittels Gleichung (307) I aus:

$$g = -\frac{cf'}{4\pi\sigma + i\varepsilon\omega}, \quad h = -\frac{\frac{i\omega c}{v}f}{4\pi\sigma + i\varepsilon\omega} \tag{308}$$

und setzen sie in Gleichung (307) III ein. Es entsteht dann die Gleichung zweiter Ordnung

$$f'' = \left\{\omega^2\left(\frac{1}{v^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\right) + i\,\frac{4\pi\mu\sigma\omega}{c^2}\right\}f = 0.$$

Die Lösung dieser homogenen Gleichung hat die Form

$$f_z = Ae^{\gamma z}$$

mit

$$\gamma = \pm\sqrt{\omega^2\left(\frac{1}{v^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\right) + i\,\frac{4\pi\mu\sigma\omega}{c^2}}.$$

Da eine mit z exponentiell ansteigende Lösung physikalisch sinnlos wäre, nehmen wir für positive z (Luft) die Wurzel (besser gesagt: ihren reellen Teil,

der die Dämpfungskonstante darstellt) mit negativem Vorzeichen, für negative z (Erde) mit positivem. Wir haben dann

$$\mathfrak{H}_{y_1} = A_1 e^{-\gamma_1 z} e^{i\omega\left(t - \frac{x}{v_1}\right)}, \qquad \mathfrak{H}_{y_2} = A_2 e^{\gamma_2 z} e^{i\omega\left(t - \frac{x}{v_2}\right)}, \tag{309}$$

$$\gamma_1^2 = \omega^2\left(\frac{1}{v_1^2} - \frac{\varepsilon_1\mu_1}{c^2}\right) + i\,\frac{4\pi\mu_1\sigma_1\omega}{c^2}, \quad \gamma_2^2 = \omega^2\left(\frac{1}{v_2^2} - \frac{\varepsilon_2\mu_2}{c^2}\right) + i\,\frac{4\pi\sigma_2\mu_2\omega}{c^2}. \tag{310}$$

Die zwei tangentialen Komponenten $\mathfrak{H}_{y_1}$ und $\mathfrak{H}_{y_2}$ müssen für $z = 0$ einander gleich werden. Das ist nur möglich für

$$A_1 = A_2 = A, \quad v_1 = v_2 = v.$$

Die Phasengeschwindigkeit muß daher in beiden Medien die gleiche sein. Wir wollen dies in Gleichung (310) in der obigen Bezeichnung durchgeführt denken. Jetzt kann nach Gleichung (308) auch g und damit $\mathfrak{E}_x$ aufgeschrieben werden:

$$\mathfrak{E}_{x_1} = \frac{c\gamma_1 A e^{-\gamma_1 z}}{4\pi\sigma_1 + i\varepsilon_1\omega} e^{i\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)}, \quad \mathfrak{E}_{x_2} = -\frac{c\gamma_2 A e^{\gamma_2 z}}{4\pi\sigma_2 + i\varepsilon_2\omega} e^{i\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)}.$$

Die Gleichheit dieser zwei tangentialen Komponenten in der Ebene $z = 0$ erfordert

$$\frac{\gamma_1}{4\pi\sigma_1 + i\varepsilon_1\omega} = -\frac{\gamma_2}{4\pi\sigma_2 + i\varepsilon_2\omega}.$$

Daraus ergibt sich das Verhältnis γ_2/γ_1 als bekannte Größe:

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = -\frac{4\pi\sigma_2 + i\varepsilon_2\omega}{4\pi\sigma_1 + i\varepsilon_1\omega} \equiv q.$$

Zur Berechnung von γ_1, γ_2 und v nehmen wir die Gleichungen (310) in Anspruch, die wir jetzt in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{v^2} - \gamma_1^2 &= \frac{\varepsilon_1\mu_1\omega^2}{c^2} - i\,\frac{4\pi\mu_1\sigma_1\omega}{c^2} \equiv a_1, \\ \frac{\omega^2}{v^2} - \gamma_1^2 q_1^2 &= \frac{\varepsilon_2\mu_2\omega^2}{c^2} - i\,\frac{4\pi\mu_2\sigma_2\omega}{c^2} \equiv a_2. \end{aligned} \tag{311}$$

Aus ihrer Differenz folgt

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{a_2 - a_1}{1 - q^2}}, \tag{312}$$

mithin

$$\gamma_2 = q\sqrt{\frac{a_2 - a_1}{1 - q^2}}. \tag{313}$$

Jetzt folgt aus Gleichung (311) auch

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{\omega}\sqrt{\gamma_1^2 + a_1} = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{a_2 - a_1 q^2}{1 - q^2}}. \tag{314}$$

Die Wurzeln in den Gleichungen (312), (313) und (314) sind mit solchem Vorzeichen zu nehmen, daß ihr Realteil positiv wird. Zur physikalischen Interpretation der erhaltenen Resultate wäre es erforderlich, die reellen und imaginären Anteile zu trennen. Es soll das nur kurz angedeutet werden. Es ist z. B. die Phase von $\mathfrak{H}_{y_1}$ nach Gleichung (309)

$$i\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) - \gamma_1 z.$$

Mit

$$\gamma_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{u} - i\omega$$

wird sie

$$i\omega\left(t - \frac{x}{u} - \frac{\beta_1}{\omega}z\right) - wx - \alpha_1 z.$$

Das bedeutet eine sowohl in der X- als auch in der Z-Richtung gedämpfte Welle. Dasselbe gilt für $\mathfrak{H}_{y2}$. Die Phasenflächen sind die Halbebenen

$$\frac{x}{u} + \frac{\beta_1}{\omega}z = \text{const}, \quad \frac{x}{u} + \frac{\beta_2}{\omega}z = \text{const},$$

die sich an der Erdoberfläche im stumpfen Winkel schneiden.

Eigentümlich gestaltet sich die Änderung des elektrischen Feldvektors. Setzt man nämlich die erhaltenen Lösungen in die Ausdrücke (305) für $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{E}_z$ ein, so nimmt man eine Phasendifferenz zwischen beiden wahr. Wie aus der Zusammensetzung senkrechter Schwingungen gleicher Frequenz bekannt ist, beschreibt der Endpunkt des Vektors in diesem Falle eine Ellipse. Ihre Ebene steht aber nicht senkrecht zur Ausbreitungsrichtung wie beim elliptisch polarisierten Licht, sondern enthält diese Richtung.

Die Wirkung der durch die Sonnenstrahlung stark ionisierten Heaviside-sche Luftschicht äußert sich in dem Umstand, daß sie als guter Leiter einen großen Reflexionskoeffizienten besitzt. Die von ihr reflektierten Wellen interferieren mit den direkt fortgepflanzten und geben zu den bekannten Fadingerscheinungen Veranlassung. Daß unsere Betrachtungen auf keine von der Erdoberfläche reflektierten Wellen führten, hat seinen einfachen Grund darin, daß wir uns von Anfang an auf streifenden Einfall beschränkten. Die ganz allgemeine Lösung, die, über ebene Wellen hinausgehend, auch den Sender und das Feld seiner Nachbarschaft beschreibt, hat Sommerfeld gegeben. Die hier besprochene Lösung bezieht sich auf die Wellenzone.

ELEKTRODYNAMIK BEWEGTER KÖRPER

§ 88. Grundgleichungen

Die Materialgesetze $\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$ und das Ohmsche Gesetz $\mathfrak{j} = \sigma\mathfrak{E}$, die zu den Hauptgleichungen (170) hinzutreten, beziehen sich ausschließlich auf ruhende Körper, d. h. auf ruhende Isolatoren und ruhende Leiter. Wichtige

praktische und wissenschaftliche Gesichtspunkte erfordern jedoch die Verallgemeinerung dieser Gesetze auf bewegte Körper. So stellen z. B. die Armaturen der Generatoren bewegte Leitersysteme dar. Es gibt eine große Anzahl von Experimenten, die nur durch modifizierte Gleichungen interpretiert werden können.

Die Elektrodynamik bewegter Körper kann auf zweierlei Art begründet werden: entweder durch die LORENTZsche Elektronentheorie oder durch die phänomenologische Methode MINKOWSKIs. Diese gründet sich auf die spezielle Relativitätstheorie und ist prinzipiell die denkbar einfachste. Alle Größen werden auf ein mitbewegtes Koordinatensystem bezogen, in dem der Körper ruht. Es gelten daher in diesem System alle bisher angewandten Gleichungen. Nun werden diese mittels LORENTZtransformation auf ein anderes Koordinatensystem übertragen, das dem ersteren gegenüber in relativer Bewegung begriffen ist, und damit ist die Aufgabe gelöst. Es ist jedoch hervorzuheben, daß die Übertragung nur dann gelingt, wenn der Transformationscharakter der einzelnen Größen bekannt ist. MINKOWSKIs großes Verdienst besteht eben in der intuitiven Erkenntnis des Charakters von Ladung, Strom und Feldstärke.

Da die Relativitätstheorie aus dem Rahmen dieses Buches fällt, müssen wir uns hier mit der einfachen Mitteilung der hauptsächlichsten Resultate begnügen.

Die allgemeine Elektrodynamik arbeitet mit denselben Größen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ wie die bisherige Theorie. Auch ihre Definition ist genau dieselbe in demjenigen Koordinatensystem, auf welches sie sich beziehen. Das Hauptergebnis der umfassenden Theorie besteht darin, daß die Hauptgleichungen (170) vollkommen unverändert bleiben. Es ist ganz gleichgültig, ob das Dielektrikum oder das leitende Medium im zugrunde gelegten Bezugssystem ruhen oder bewegt sind. Die differentielle Kopplung der Feldgrößen durch die Hauptgleichungen bleibt dieselbe. Wohl aber erleiden die Materialgesetze eine Abänderung. Bewegt sich z. B. das fragliche Medium bezüglich des Koordinatensystems mit einer Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ vom Betrage v, so werden die neuen Zusammenhänge

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{1 - \varepsilon\mu\frac{v^2}{c^2}}\left[\varepsilon\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\mathfrak{E} + (\varepsilon\mu - 1)\left\{\left[\frac{\mathfrak{v}}{c}, \mathfrak{H}\right] - \varepsilon\frac{\mathfrak{v}}{c}\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}, \mathfrak{E}\right)\right\}\right]$$

$$\sim \varepsilon\mathfrak{E} + (\varepsilon\mu - 1)\left[\frac{\mathfrak{v}}{c}, \mathfrak{H}\right], \tag{315}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{1 - \varepsilon\mu\frac{v^2}{c^2}}\left[\mu\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\mathfrak{H} - (\varepsilon\mu - 1)\left\{\left[\frac{\mathfrak{v}}{c}, \mathfrak{E}\right] + \mu\frac{\mathfrak{v}}{c}\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}, \mathfrak{H}\right)\right\}\right]$$

$$\sim \mu\mathfrak{H} - (\varepsilon\mu - 1)\left[\frac{\mathfrak{v}}{c}, \mathfrak{E}\right]. \tag{316}$$

Die Näherungsformeln finden ihre Berechtigung darin, daß die experimentellen Verhältnisse die Vernachlässigung von $\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}$ neben $\frac{\mathfrak{v}}{c}$ oder 1 meist weitgehend gestatten. Ruht das Medium ($\mathfrak{v} = 0$), so gehen die Gleichungen (315) und (316) in

die bekannten Relationen $\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$ über. Auch das OHMsche Gesetz nimmt eine andere Form an. Wir führen die Bezeichnung

$$\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}, \mathfrak{B}]$$

ein. Dann wird die Dichte des konvektiven Stromes

$$\mathfrak{j} = \frac{\sigma}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{\mathfrak{E}^* - \mathfrak{v}\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}, \mathfrak{E}\right)\right\} \tag{317}$$

und die Ladungsdichte

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{\varrho' + \frac{\sigma}{c^2}(\mathfrak{v}, \mathfrak{E}^*)\right\}. \tag{318}$$

ϱ' bedeutet jene Ladungsdichte, die der mit der Ladung mitbewegte Beobachter mißt. Die Formel enthält die überraschende Behauptung, daß der ruhende Beobachter auch dann eine Ladungsdichte ϱ konstatiert, wenn für den mitbewegten keine solche vorhanden ist ($\varrho' = 0$).

Wie man aus dem Ausdruck (174) der LORENTZkraft entnimmt, ist die Hilfsgröße $\mathfrak{E}^*$ nichts anderes als die auf den bewegten Einheitspol wirkende Kraft. Wird daher ein Leiter im magnetischen Feld bewegt, so wirkt auf seine freien Elektronen auch dann eine bewegende Kraft

$$\mathfrak{E}^* = \frac{1}{c}[\mathfrak{v}, \mathfrak{B}], \tag{319}$$

wenn die elektrische Feldstärke verschwindet. Die im geschlossenen Leiter induzierte elektromotorische Kraft wird in diesem Falle

$$E = \int(\mathfrak{E}^*, d\mathfrak{s}) = \frac{1}{c}\int([\mathfrak{v}, \mathfrak{B}], d\mathfrak{s}). \tag{320}$$

Wir wollen nachweisen, daß das rechtsseitige Integral jene Änderung des vom Leiter eingeschlossenen Induktionsflusses bedeutet, die durch die Bewegung des Leiters entsteht. Zu diesem Zwecke legen wir durch den Leiter eine Fläche f, die an seiner Bewegung teilnimmt und während der Zeitspanne dt in die Fläche f' übergeht. Die entsprechenden Leiterelemente werden durch den Vektor $\mathfrak{v}\,dt$ miteinander verbunden. Die Flächen f, f' und die elementare Mantelfläche, die durch den bewegten Leiter erzeugt wird, schließen den Raum τ ein. Dem Leiter schreiben wir den Umlaufsinn zu, der, in der $\mathfrak{v}$-Richtung gesehen, mit der Uhrzeigerdrehung übereinstimmt. Dann gibt $-[\mathfrak{v}, d\mathfrak{s}]\,dt$ das Produkt eines Elementes der Mantelfläche mit dem nach außen gerichteten normalen Einheitsvektor. Demnach bedeutet $-(\mathfrak{B}, [\mathfrak{v}, d\mathfrak{s}])\,dt$ den durch das Element nach außen strömenden Fluß.

Für den Raum τ (wie für jeden andern) gilt

$$\int \operatorname{div} \mathfrak{B}\, d\tau = 0$$

oder nach dem GAUSSschen Satz

$$-\int_f \mathfrak{B}_n df + \int_{f'} \mathfrak{B}_n df' - dt \int (\mathfrak{B}, [\mathfrak{v}, d\mathfrak{s}]) = 0.$$

Das negative Vorzeichen des ersten Gliedes stammt daher, daß wir die Normalen von f und f' in derselben Richtung, und zwar in derjenigen der äußeren Normalen von f', positiv zählen wollen. Die Änderung des Induktionsflusses infolge der Verschiebung des Leiters ist jetzt

$$dF \equiv \int_{f'} \mathfrak{B}_n df' - \int_f \mathfrak{B}_n df = dt \int (\mathfrak{B}, [\mathfrak{v}, d\mathfrak{s}]) = -dt \int ([\mathfrak{v}, \mathfrak{B}], d\mathfrak{s}).$$

Es folgt

$$\int ([\mathfrak{v}, \mathfrak{B}], d\mathfrak{s}) = -\frac{dF}{dt}.$$

Gleichung (320) geht über in

$$E = -\frac{1}{c}\frac{dF}{dt}. \tag{321}$$

Der gebräuchlichen Ausdrucksweise gemäß kommt die elektromotorische Kraft dadurch zustande, daß der Leiter Induktionslinien schneidet.

§ 89. Experiment von WILSON

Wir schematisieren das Experiment, das für bewegte Dielektrika charakteristisch ist, in folgender Weise. Eine dielektrische Platte bewege sich in der Ebene einer ihrer Seiten mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$. Zugegen ist ein magnetisches Feld $\mathfrak{H}$, das zu der Seitenfläche parallel gerichtet ist, auf der Geschwindigkeit aber senkrecht steht. Nach Gleichung (319) tritt die elektrische Kraftdichte $\mathfrak{E}^*$ auf, die durch Verschiebung der quasielastisch gebundenen Molekülladungen in der Platte eine Polarisation hervorruft. Nimmt man μ gleich 1, so wird gemäß Gleichung (315) der Vektor $\mathfrak{D}$

$$\mathfrak{D} = \frac{(\varepsilon - 1)[\mathfrak{v}, \mathfrak{H}]}{c}, \quad |\mathfrak{D}| = \frac{(\varepsilon - 1) v |\mathfrak{H}|}{c}.$$

$\mathfrak{D}$ steht senkrecht auf $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{H}$, daher auch auf der Seitenfläche der Platte. Dieselbe Richtung hat dann auch die Polarisation. Infolge des allgemeinen Zusammenhanges $\mathfrak{P} = \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{D} - \mathfrak{E})$ wird in unserem Falle ($\mathfrak{E} = 0$)

$$|\mathfrak{P}| = \mathfrak{P}_n = \frac{1}{4\pi}|\mathfrak{D}| = \frac{(\varepsilon - 1) v |\mathfrak{H}|}{4\pi c}. \tag{322}$$

Dies ist der Wert der an den Seiten auftretenden freien Flächendichten. Die Anwesenheit dieser freien Ladungen ist leicht nachzuweisen. An das Dielektrikum werden gleich anfangs zwei Kondensatorplatten gelegt, in denen die freien Ladungen Influenzelektrizitäten erzeugen. Kurzschluß der beiden Leiterplatten beseitigt die abgestoßenen Influenzladungen. Nach Aufhebung der Verbindung

und Einstellen der Bewegung bleiben auf den Belegungen die Influenzelektrizitäten zurück. Ihre Dichten stimmen nach den Messungen mit Gleichung (322) überein. In Wirklichkeit bestand die Anordnung WILSONs aus einem dielektrischen Hohlzylinder, innen und außen mit leitenden Zylinderbelegungen umgeben. Das Magnetfeld hatte die Richtung der Achse, die dazu senkrechte Bewegung erfolgte durch Rotation.

Bei einem späteren Versuch steigerte WILSON die Permeabilität μ durch Einschmelzen von Eisenkügelchen in den Hohlzylinder. Die Messung ergab, daß in diesem Fall ε durch $\varepsilon\mu$ zu ersetzen sei, wie es die Formel (315) verlangt.

§ 90. Maßeinheiten

In der Elektrodynamik herrscht eine Mannigfaltigkeit der Maßeinheiten, wie man sie in anderen Abschnitten der Physik nicht vorfindet. Es hat dies seinen Grund darin, daß die Elektrodynamik Größen der Elektrizitätslehre, des Magnetismus und der Mechanik in sich vereinigt. Dadurch entsteht eine gewisse Willkür in der Wahl des Ausgangspunktes und in der Art, wie diese Größen aneinandergepaßt werden sollen. An erster Stelle soll hier der Nachweis geführt werden, daß die vorgetragene Theorie, so wie sie in den entsprechenden Gleichungen zum Ausdruck gelangt, ein ganz bestimmtes Maßsystem erfordert.

Wir beginnen unsere Betrachtungen mit der Dielektrizitätskonstante ε und der Permeabilität μ. Im Sinne der Elektronentheorie erblicken wir ihre allgemeinste Definition in den Gleichungen (61) und (110):

$$\mathfrak{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\,\mathfrak{E}, \quad \mathfrak{M} = \frac{\mu - 1}{4\pi}\,\mathfrak{H}.$$

Da sie neben dem Wert 1 stehen, folgt, daß beide dimensionslos sind und im Vakuum, wo $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ verschwinden, den Wert 1 annehmen. Übrigens war ε schon von Anfang an als reine Verhältniszahl eingeführt.

Das zweite Grundgesetz der Elektrostatik $\Delta\Phi = -4\pi\varrho$ führte auf das Potential $\Phi = \frac{e}{r}$ der Punktladung und weiter auf den Ausdruck der Kraft

$$|\mathfrak{K}| = \frac{e_1 \cdot e_2}{r^2}$$

zwischen zwei Punktladungen. Dies entspricht dem COULOMBschen Gesetz mit der Proportionalitätskonstante $f = 1$. Es ergibt sich daraus die Ladungseinheit als jene Elektrizitätsmenge, die im Vakuum auf eine gleiche die Kraft 1 ausübt. Wir erheben jetzt die grundsätzliche Forderung: Überall, wo mechanische Größen auftreten, soll deren absolute CGS-Einheit benutzt werden, also hier dyn und cm. Aus $e^2 = r^2|\mathfrak{K}|$ folgt dann als Einheit $[e] = \mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{s}^{-1}$. Ganz dasselbe gilt für die magnetische Polstärke m.

Die Feldstärke $\mathfrak{E}$ war definiert durch die Gleichung $\mathfrak{K} = e\mathfrak{E}$. Als Einheit ist jene zu betrachten, die auf die Einheit der Ladung die Kraft 1 dyn ausübt. Man erhält dann aus der Gleichung $[\mathfrak{E}] = \mathrm{cm}^{-1/2}\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{s}^{-1}$. Dieselbe Einheit besitzt

die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ und infolge der Beziehungen $\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$ auch $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ sowie $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$.

Von den festgelegten Einheiten $[e]$, $[\mathfrak{E}]$ geht man jetzt mühelos zu den Einheiten der übrigen elektrischen Größen über, indem man Gleichungen benutzt, die Beziehungen zwischen der bekannten und der zu bestimmenden Einheit darstellen. Etwa die Gleichungen in der angegebenen Reihenfolge:

$$-\operatorname{grad}\Phi = \mathfrak{E}, \quad E = \int(\mathfrak{E}, d\mathfrak{s}), \quad C = \frac{e}{\Phi}, \quad I = \frac{de}{dt}, \quad |\mathfrak{j}| = \frac{I}{q},$$

$$R = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{I}, \qquad \sigma = \frac{|\mathfrak{j}|}{|\mathfrak{E}|}.$$

Ebenso errechnet man von $[\mu]$, $[\mathfrak{H}]$ ausgehend die Einheiten der noch ausstehenden magnetischen Größen, z. B. die des Induktionskoeffizienten L. (Nebenbei sei bemerkt, daß die absolute Einheit von $\mathfrak{H}$ Oersted, die von $\mathfrak{B}$ Gauß heißt.)

Auf diese Weise werden durch unsere Gleichungen die Einheiten aller elektromagnetischen Größen festgelegt. Die MAXWELLschen Hauptgleichungen (170) I und III, die elektrische und magnetische Größen verknüpfen, wurden dabei gar nicht in Anspruch genommen. Es zeigt sich aber nachträglich, daß sie infolge des Auftretens der Geschwindigkeit $c \doteq 3 \cdot 10^{10}\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$ dimensionell befriedigt sind. Die Gesamtheit dieser Einheiten wird das GAUSSsche Maßsystem genannt. Es ist durch den Dualismus gekennzeichnet, die elektrischen und die magnetischen Einheiten ohne Verknüpfungsgleichungen gesondert zu bestimmen.

Neben dem GAUSSschen Maßsystem sind noch zwei andere absolute Maßsysteme bekannt: das elektrostatische und das elektromagnetische. Das erstere entsteht durch genau dieselben Betrachtungen bezüglich der elektrischen Größen wie das GAUSSsche, erhält aber die Einheiten der magnetischen Größen aus den MAXWELLschen Gleichungen, in denen $c = 1$ gesetzt wird. Die Maßeinheiten der elektrischen Größen stimmen daher mit den GAUSSschen überein, die der magnetischen aber nicht. Unterscheidet man die beiden Systeme durch die Indizes g bzw. e, so gilt z. B. für stationäre Ströme einerseits $4\pi\mathfrak{j}_g = c\operatorname{rot}\mathfrak{H}_g$, andererseits $4\pi\mathfrak{j}_e = \operatorname{rot}\mathfrak{H}_e$. Da nun $\mathfrak{j}_e = \mathfrak{j}_g$ ist, folgt $\mathfrak{H}_e = c\mathfrak{H}_g$. Die Maßzahl von $\mathfrak{H}_e$ ist also $3 \cdot 10^{10}$mal größer als die von $\mathfrak{H}_g$, die elektrostatische Maßeinheit der magnetischen Feldstärke demnach $3 \cdot 10^{10}$mal kleiner als die GAUSSsche. Aus der letzten Gleichung, die doch auch in den Dimensionen stimmen muß, folgt noch, daß die Dimension von $\mathfrak{H}_e$ das $\mathrm{cm\,s^{-1}}$-fache derjenigen von $\mathfrak{H}_g$ ist.

Das elektromagnetische Maßsystem entsteht auf ähnliche Weise. Den Ausgangspunkt bilden hier die magnetischen Größen, deren Einheiten, vom COULOMBschen Gesetz

$$|\mathfrak{K}| = \frac{|m_1 \cdot m_2|}{r^2}$$

ausgehend, unter der Annahme $[\mu] = 1$ bestimmt werden können. Es herrscht natürlich Übereinstimmung mit den entsprechenden Einheiten des GAUSS-

schen Systems. Keine Übereinstimmung liegt bei den elektrischen Einheiten vor, denn diese werden jetzt wieder aus den MAXWELLschen Gleichungen mit $c = 1$ berechnet.

In der folgenden Tabelle sind die Einheiten der elektromagnetischen Größen im GAUSSschen System angegeben. In der zweiten Spalte stehen jene technischen Einheiten, die im Laboratoriumsgebrauch unentbehrlich sind.

Tabelle der Maßeinheiten

Größen	GAUSSsche Einheiten	Technische Einheiten
Dielektrizitätskonstante [ε]	1	
Elektrizitätsmenge .... [e]	$\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{s}^{-1}$	1 Coulomb $= 3\cdot 10^9\,[e]$
Elektrische Feldstärke . [$\mathfrak{E}$]	$\mathrm{cm}^{-1/2}\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{s}^{-1}$	1 Volt cm^{-1} $= \frac{1}{300}\,[\mathfrak{E}]$
Elektrische Induktion . [$\mathfrak{D}$]	$\mathrm{cm}^{-1/2}\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{s}^{-1}$	
Elektrische Polarisation [$\mathfrak{P}$]	$\mathrm{cm}^{-1/2}\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{s}^{-1}$	
Elektrisches Potential . [Φ]	$\mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{s}^{-1}$	1 Volt $= \frac{1}{300}\,[\Phi]$
Elektromotorische Kraft [E]	$\mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{s}^{-1}$	
Kapazität .... [C]	cm	1 Farad $= 9\cdot 10^{11}\,[C]$
Stromstärke .... [I]	$\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{s}^{-2}$	1 Ampere $= 3\cdot 10^9\,[I]$
Stromdichte .... [j]	$\mathrm{cm}^{-1/2}\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{s}^{-2}$	
Widerstand........... [R]	$\mathrm{cm}^{-1}\,\mathrm{s}$	1 Ohm $= \frac{1}{9\cdot 10^{11}}\,[R]$
Leitfähigkeit .... [σ]	s^{-1}	
Permeabilität......... [μ]	1	
Polstärke .... [m]	$\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{s}^{-1}$	
Magnetische Feldstärke [$\mathfrak{H}$]	$\mathrm{cm}^{-1/2}\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{s}^{-1}$ Oersted	$= \frac{4\pi}{10}$ Oersted
Magnetische Induktion. [$\mathfrak{B}$]	$\mathrm{cm}^{-1/2}\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{s}^{-1}$ Gauß	$= 10^8$ Gauß
Magnetische Polarisation [$\mathfrak{M}$]	$\mathrm{cm}^{-1/2}\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{s}^{-1}$	
Induktionskoeffizient .. [L]	$\mathrm{cm}^{-1}\,\mathrm{s}^2$	1 Henry $= \frac{1}{9\cdot 10^{11}}\,[L]$

Neben dem GAUSSschen System gewinnt neuerdings das GIORGIsche System immer mehr an Boden, besonders in der Technik. Seine Grundeinheiten sind m, kg, s, A. Der Theoretiker hegt diesem System gegenüber, ohne seine Vorzüge zu übersehen, zwei Bedenken. Die Theorie hat die Aufgabe, die physikalischen Gesetze mathematisch so zu durchdringen, daß ihre Aussagen sehr klar zutage treten: Das geschieht in der Elektrodynamik durch die relativistische Fassung der MAXWELLschen Gleichungen. Es zeigt sich dabei, daß $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B}$ sowie $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ zu je einem antisymmetrischen Tensor vereinigt werden können, natürlich

nur dann, wenn die Dimensionen dieser Größen paarweise gleich sind, wie dies im GAUSSschen System der Fall ist. Von den GIORGIschen Größen ausgehend, müßte man erst künstlich zu gleichdimensionierten Größen übergehen, um sie relativistisch nutzbar zu machen. Die Theorie würde nicht zaudern, diesen neuen Größen primäre Bedeutung zuzusprechen.

Zweitens beziehen sich die Zahlenangaben der Atom- und Kernphysik durchweg auf das CGS-System. Diese Werte haben sich in das Allgemeinbewußtsein so tief eingewurzelt, daß das Aufgeben dieses Systems nicht zeitgemäß wäre.

TEIL II

DIE GRUNDLAGEN DER ELEKTRONENTHEORIE

DIE KLASSISCHE THEORIE DES ELEKTRONS

§ 1. Die Schwierigkeiten der MAXWELLschen Theorie im Innern der Materie und die experimentellen Beweise der Existenz des Elektrons

Die MAXWELLschen Differentialgleichungen beschreiben die im Vakuum sich abspielenden Erscheinungen so klar und einfach, daß noch einfachere mathematische Gesetzmäßigkeiten kaum denkbar wären. Wir können deshalb die sich auf das Vakuum beziehenden MAXWELLschen Gleichungen direkt als Schulbeispiel für eine ideal einfache und klare Formulierung von physikalischen Gesetzmäßigkeiten betrachten.

Ganz anders liegen dagegen die Verhältnisse im Innern der Materie. In diesem Falle sind wir gezwungen, jeden Stoff mit gewissen Konstanten, wie der Dielektrizitätskonstante, der magnetischen Permeabilität, der Leitfähigkeit usw. zu charakterisieren. Dazu kommt noch die weitere Komplikation, daß diese „Konstanten“ Funktionen der Frequenz sein können.

Die weitere Entwicklung der Theorie ermöglichte in erster Linie die sich auf die „Strömung der Elektrizität“ beziehenden Untersuchungen, und zwar nicht die Erforschung der metallischen Leitung, die man eigentlich nur mit Hilfe der Quantenmechanik erklären konnte, sondern die Beobachtung des Elektrizitätsdurchganges durch Elektrolytlösungen und durch Gase, insbesondere unter stark vermindertem Druck.

FARADAY hatte beobachtet, daß in einem mit Gas gefüllten Entladungsrohr, in dem wir bei einem Druck von einigen mm die bekannten Lichterscheinungen beobachten, bei weiterer Verringerung des Druckes diese Lichterscheinungen sich gegen die Anode hin zurückziehen und daß sich auf diese Weise der sogenannte FARADAYsche Dunkelraum vor der Kathode bildet. Gleichzeitig damit fängt das Glas gegenüber der Kathode zu fluoreszieren an. 1869 konnte dann HITTORF zeigen, daß diese Fluoreszenz von irgendeiner „Substanz“ verursacht wird, die, wo immer auch die Kathode sein soll, aus deren Oberfläche senkrecht heraustritt, sich geradlinig ausbreitet und daß ein sich im Wege befindender fester Körper diese Substanz absorbiert, so daß an der fluoreszierenden Glasfläche der geometrische Schatten von diesem Körper erscheint. Diese Strahlen nannte GOLDSTEIN 1876 Kathodenstrahlen. CROOKES ist es 1879 gelungen, diese Strahlen mit Hilfe eines magnetischen Feldes abzulenken, wobei er die Erfahrung gemacht hat, daß sich diese ganz so verhalten, als wenn sie aus sich

bewegenden negativ geladenen Teilchen bestehen würden. Damit war also die Frage entschieden, daß diese Strahlen nicht von irgendeiner Wellenbewegung herrühren, sondern von einer Bewegung elektrisch geladener Teilchen. Zur selben Zeit entwickelte sich auch die Theorie des Elektrizitätsdurchganges durch Elektrolytlösungen, und der Gedanke lag deshalb nahe, die erwähnten, negative elektrische Ladung besitzenden Teilchen mit den bei der elektrolytischen Leitung auftretenden Ionen zu vergleichen. 1890 ist es SCHUSTER auf Grund dieses Gedankenganges tatsächlich als erstem gelungen, das Verhältnis der Ladung zur Masse dieser problematischen Teilchen (also die Größe e/m) mit Hilfe der erwähnten magnetischen Ablenkung angenähert zu messen, wobei er das überraschende Ergebnis erhielt, daß dieses Verhältnis einige hundertmal größer sein muß als das bei den Elektrolytlösungen beobachtete.

Spätere Beobachter erhielten für dieses Verhältnis, wie wir wissen, wesentlich größere Werte. 1886 entdeckte GOLDSTEIN die Kanalstrahlen, die er hinter einer sich gegenüber der Anode befindenden Kathode beobachtete, wenn die letztere durchbohrt war, und konnte ebenfalls mit Hilfe von magnetischer Ablenkung feststellen, daß sich in diesen Strahlen positiv geladene Teilchen bewegen. 1897 ist es endlich J. J. THOMSON in Cambridge unter Anwendung eines sehr hohen Vakuums gelungen, die Ablenkung der Kathodenstrahlen im elektrischen und magnetischen Felde mit sehr großer Genauigkeit zu messen und auf diesem Wege, da es sich um zwei voneinander unabhängige Messungen handelte, sowohl die Geschwindigkeit als auch das Verhältnis von Ladung und Masse der sich in den Kathodenstrahlen bewegenden Teilchen zu messen. Mit seiner Methode, deren Grundgedanken wir schon aus der Experimentalphysik kennen, erhielt er das außerordentlich wichtige Ergebnis, daß das Verhältnis von Ladung und Masse der fraglichen Teilchen im Falle von Kathodenstrahlen immer dasselbe ist, d. h., es ist ganz unabhängig vom Gasdruck, von der materiellen Beschaffenheit des Gases usw.; es ist also eine Naturkonstante. THOMSON hat noch aus seinen Beobachtungen gefolgert, daß die Ladung dieser Teilchen von derselben Größe ist wie die der in Elektrolytlösungen auftretenden Ionen; die Masse der ersteren muß also ungefähr um den Faktor 1000 kleiner sein. Zur Rechtfertigung dieser Vermutung war es selbstverständlich notwendig, eine Methode zu finden, welche voneinander unabhängige Messungen der Ladung e und der Masse m dieser Teilchen ermöglicht.

Nachdem RÖNTGEN die nach ihm benannten Strahlen entdeckte, hat man beobachtet, daß diese Strahlen Gase, durch die sie durchdringen, leitend machen. Da diese Leitfähigkeit durch Filtrieren aufgehoben werden konnte, lag der Gedanke nahe, daß unter der Wirkung der Röntgenstrahlen im gegebenen Gase Ionen entstehen, die den in Elektrolytlösungen auftretenden Ionen wenigstens ähnlich sind. C. T. R. WILSON hat dann 1897 beobachtet, daß übersättigter Wasserdampf an diesen Ionen ebenso kondensiert wie an den in der Luft sich befindenden Verunreinigungen, d. h., daß in übersättigtem Wasserdampf an einem jeden solchen Ion sich ein kleiner Wassertropfen bildet. Da weiter aus der Formel von STOKES berechenbar ist, welche Geschwindigkeit ein solcher Tropfen von einem bestimmten Halbmesser unter der Wirkung der Schwerkraft erhält, kann man aus der gemessenen Fallgeschwindigkeit diesen Halb-

messer und daraus das Gewicht eines solchen Tropfens berechnen. Man erhält also aus dem Gewicht der ganzen kondensierten Wassermenge die Zahl der Teilchen; andererseits kann man selbstverständlich auch die Ladung dieses kondensierten Wassers messen; und so erhält man durch eine einfache Division die Ladung der Teilchen (jetzt schon unabhängig von deren Masse). THOMSON ist es auf diesem Wege (1898 - 1899) gelungen, die Ladung der jetzt schon Elektronen genannten Teilchen und daraus selbstverständlich auch deren Masse zu berechnen. Deshalb halten wir eben J. J. THOMSON für den eigentlichen Entdecker des Elektrons. Inzwischen hat auch TOWNSEND aus seinen sich auf die Diffusion von Gasionen beziehenden Untersuchungen einen Wert für die Elektronenladung hergeleitet, der innerhalb der Meßfehler mit dem von THOMSON recht gut übereinstimmte. 1898 konnte WIEN mit einer zu den bei den Kathodenstrahlen benutzten analogen Methode, also ebenfalls mit Hilfe von elektrischer und magnetischer Ablenkung, die Geschwindigkeit und die spezifische Ladung von Kanalstrahlen messen und erhielt als Ergebnis, daß letztere Größe um drei Größenordnungen kleiner ist als die der Elektronen. WIEN hat daraus den Schluß gezogen, daß die sich in den Kanalstrahlen bewegenden Teilchen Ionen des im Entladungsrohr gebliebenen Gases sind. Es ist ihm gelungen zu zeigen, daß die Masse dieser Teilchen tatsächlich mit der Masse der Gasatome übereinstimmt, d. h., daß man bei Benutzung eines anderen Gases für die spezifische Ladung dieser Teilchen ebenfalls andere Werte erhält, im Gegensatz zu den bei den Kathodenstrahlen beobachteten Verhältnissen.

1896 hat BECQUEREL entdeckt, daß einige Stoffe in ihrem natürlichen Zustande ganz ähnliche Strahlen aussenden wie die, welche wir in Entladungsröhren beobachteten. Zuerst konnte er an Uran, dann an Thorium enthaltenden Materialien (Mineralen) diese sogenannte Radioaktivität beobachten. 1899 zeigte dann RUTHERFORD, daß diese Strahlung (abgesehen von einer röntgenstrahlartigen Komponente, der γ-Strahlung, die also eine elektromagnetische Strahlung ist und die bald darauf von VILLARD entdeckt wurde), aus zwei Teilen besteht, von denen die eine ein schwächeres, die andere ein stärkeres Durchdringungsvermögen besitzt; wir nennen diese α- und β-Strahlen. Von der β-Strahlung hat sich dann wieder unter Anwendung elektrischer und magnetischer Ablenkung herausgestellt, daß sie von derselben Natur wie die Kathodenstrahlen ist, also ebenfalls von der Bewegung von Elektronen herrührt, deren Geschwindigkeit jedoch viel größer ist als die der (in den damaligen Zeiten hergestellten) Kathodenstrahlen und sogar nahezu die Lichtgeschwindigkeit erreichen kann. Analog konnte man zeigen, daß die α-Teilchen Heliumkerne sind. In neuester Zeit hat man noch viele, nur eine sehr kurze Zeit existenzfähige Teilchen, deren Masse zwischen der des Elektrons und Protons liegt (Mesonen), und solche, deren Masse die des Protons übertrifft (Hyperonen), beobachtet; die Besprechung derselben liegt jedoch nicht im Rahmen dieses Werkes.

Nach diesem historischen Rückblick wollen wir jetzt sehen, welche Methoden uns zur Bestimmung der Ladung des Elektrons zur Verfügung stehen, von denen wir in Anbetracht der heute hochentwickelten Experimentierkunst recht genaue Ergebnisse erwarten.

Eine Methode zur Bestimmung der Ladung des Elektrons liefert das von FARADAY entdeckte Gesetz der Elektrolyse. Leiten wir einen Strom der Stärke I während einer Zeitdauer t durch eine wäßrige Lösung eines Elektrolyten hindurch, so scheidet sich an der Kathode die Stoffmenge

$$G = \frac{A I t}{96500 \cdot n} \tag{1}$$

ab. A bedeutet hier das Atomgewicht des Kations und n seine Wertigkeit. Wenn wir z.B. eine Silbernitratlösung benutzen, so ist $A = 107{,}88$ und $n = 1$, weil Silber ein einwertiges Metall ist. In diesem Falle haben wir also

$$It = \frac{G}{A}\, 96500 \text{ Coulomb}. \tag{2}$$

Bei der Elektrolyse trägt jedes Grammatom eines einwertigen Metalles – bei mehrwertigen Metallen jedes Grammäquivalent – die Elektrizitätsmenge 96500 Coulomb durch den Elektrolyten von der Anode zur Kathode. (Die Stromrichtung haben wir in diesem Falle nach der in der Elektrotechnik üblichen Definition angegeben.) Da wir weiter wissen, wie viele Atome in einem Grammatom eines Stoffes enthalten sind – letztere Zahl nennen wir die LOSCHMIDTsche Zahl L –, können wir die Ladung eines Ions von einwertigen Elektrolyten berechnen zu

$$e = \frac{96500}{L} \text{ Coulomb}. \tag{3}$$

Nach den neuesten Messungen ist die LOSCHMIDTsche Zahl gleich $6{,}0248 \cdot 10^{23}$. Setzen wir diesen Wert in Gleichung (3) ein, so folgt

$$e = (4{,}80286 \pm 0{,}00009) \cdot 10^{-10} \text{ el.-stat. CGS-Einheiten}. \tag{4}$$

Das ist augenblicklich (1956) der wahrscheinlichste Wert der Elektronenladung. (Der hier angegebene Zahlenwert für die Elektronenladung ist eigentlich der wahrscheinlichste Mittelwert dieser Größe, den man aus den Resultaten von mehreren verschiedenen Meßmethoden berechnet hat.)

Ein weiteres Problem ist die Bestimmung der LOSCHMIDTschen Zahl L.

Die anschaulichste, jedoch keineswegs die genaueste Methode zur Bestimmung der LOSCHMIDTschen Zahl ist die Zählung der sogenannten Szintillationen bei radioaktiven Erscheinungen. Jedes Einfallen eines α-Teilchens verursacht an einem z.B. mit Zinksulfid überzogenen Schirm ein kleines Aufleuchten, d.h. eine Szintillation. Unter einer Lupe können wir die einzelnen Szintillationen beobachten, also während eines gegebenen Zeitraumes auch zählen. Aus den geometrischen Verhältnissen unserer experimentellen Anordnung und der erhaltenen Zahl können wir berechnen, wie viele α-Teilchen unser radioaktives Präparat während eines bestimmten Zeitraumes emittiert, d.h., wie viele Atome zerfallen sind. Aus der Kenntnis des Gesetzes des radioaktiven Zerfalls der gegebenen Substanz, z.B. aus ihrer durchschnittlichen Lebensdauer, können wir die Anzahl der Atome der untersuchten radioaktiven Sub-

stanz bestimmen. Beziehen wir diese Zahl auf ein Grammatom, so erhalten wir die LOSCHMIDTsche Zahl.

Eine andere, ebenfalls sehr anschauliche Methode ist folgende: Aus röntgenographischen Messungen können wir die Entfernungen der Atome bzw. Ionen in einer festen Substanz berechnen. So kann man z. B. die kürzeste Entfernung der Natrium- und Chlor-Ionen in einem Steinsalzkristall messen. Aus dem spezifischen Gewicht und dem Molekulargewicht des Steinsalzes läßt sich dessen Molvolumen berechnen und daraus weiter unter Benutzung der erwähnten röntgenographischen Messung die LOSCHMIDTsche Zahl. Der schwierigste Punkt dieser Methode ist die Bestimmung des spezifischen Gewichtes, weil Hohlräume ein kleineres spezifisches Gewicht vortäuschen können.

Weniger anschauliche, jedoch wesentlich genauere Methoden gehen von der Bestimmung der BOLTZMANNschen Konstante k aus. Es besteht die Beziehung

$$k = \frac{R}{L}, \tag{5}$$

wobei R die absolute Gaskonstante bedeutet. Aus (5) können wir also, wenn k bekannt ist, L berechnen. Die BOLTZMANNkonstante wird aus der barometrischen Höhenformel

$$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} \tag{6}$$

bestimmt, wobei n_0 die Zahl der Moleküle pro cm³ am Erdboden, n die Zahl der Moleküle pro cm³ in der Höhe h, m die Masse der Moleküle, g die Schwerebeschleunigung und T die absolute Temperatur bedeuten. Gleichung (6) kann man unter Anwendung der klassischen BOLTZMANN-Statistik herleiten. Es sei hierbei bemerkt, daß sich diese Formel auf eine isotherme Atmosphäre bezieht. Messen wir die Zahl der Teilchen als Funktion der Höhe, so können wir aus Gleichung (6) k berechnen. Aus Gleichung (5) erhalten wir dann die LOSCHMIDTsche Zahl. Bei Gasen wäre diese Messung nicht durchführbar, weil sich die Dichte mit der Höhe viel zu langsam ändert. Deshalb hat PERRIN die Verteilung von Mastixteilchen, die sich in einer Flüssigkeit befinden, in verschiedener Höhe von der Basis des Behälters untersucht und auf diesem Wege die LOSCHMIDTsche Zahl berechnet. Analog kann man auch aus der Beobachtung der BROWNschen Bewegung eine Methode zur Messung von k, d. h. also zur Berechnung von L, ausarbeiten.

Eine ganz andere Methode zur Bestimmung der Elektronenladung ist die von MILLIKAN, die einerseits unabhängig von der LOSCHMIDTschen Zahl ist und andererseits die tatsächliche Bestimmung der Ladung eines einzigen Elektrons ermöglicht, also die Möglichkeit ausschließt, daß die nach den vorigen Methoden gemessenen Elektronenladungen nur einen statistischen Mittelwert einer veränderlichen Größe liefern.

Der Grundgedanke der Methode von MILLIKAN ist folgender: Zwischen den Platten eines waagerecht orientierten und vorläufig ungeladenen Kondensators beobachten wir unter Anwendung einer entsprechenden Vergrößerung das Beugungsscheibchen eines kleinen schwebenden Flüssigkeitstropfens (z. B. Quecksilber- oder Öltropfen). Bezeichnen wir den Halbmesser dieses Tröpf-

chens mit r, seine Dichte mit ϱ und die Dichte der Luft mit ϱ_0, so übt die Gravitation auf diesen Tropfen die Kraft

$$M \cdot g = \frac{4\pi}{3} r^3 (\varrho - \varrho_0) \tag{7}$$

aus. Diese Kraft können wir nicht unmittelbar berechnen, weil wir dazu r kennen müßten. Diese Größe ist bei einem so kleinen Tropfen nicht unmittelbar meßbar. Es kommt uns jedoch hier die Formel von STOKES zur Hilfe, nach der eine Kugel vom Halbmesser r, auf die eine Kraft $|\mathfrak{K}|$ einwirkt, in einer Flüssigkeit oder einem Gas von der Viskosität η sich mit der konstanten Geschwindigkeit

$$v = \frac{1}{6\pi\eta r} |\mathfrak{K}| \tag{8}$$

in der Richtung der Kraft $|\mathfrak{K}|$ bewegt. In unserem Falle ist $|\mathfrak{K}| = Mg$. Da wir die Bewegung der Flüssigkeitströpfchen unter der Wirkung der Schwerkraft unmittelbar beobachten können, so können wir v messen. Wir erhalten aus Gleichung (8) den Halbmesser r, woraus wir Mg berechnen können. Erhält jetzt unser Flüssigkeitströpfchen die Ladung e und erteilen wir dem Kondensator eine Ladung, so können wir durch entsprechende Wahl der zwischen den Kondensatorplatten auftretenden Potentialdifferenz erreichen, daß die Gravitationskraft auf unser Teilchen durch die elektrische Kraft gerade kompensiert wird. Dann gilt

$$Mg = e\,\frac{U}{d}, \tag{9}$$

wobei U die zwischen den Kondensatorplatten vorhandene Potentialdifferenz und d die Entfernung dieser Platten voneinander bedeuten. Da U meßbar ist, können wir e aus Gleichung (8) berechnen.

Wir bemerken noch, daß die Formel von STOKES nur solange streng gilt, bis der Halbmesser der Tröpfchen groß im Vergleich zur freien Weglänge der Gasmoleküle ist. Wenn das nicht mehr der Fall ist, muß die von CUNNINGHAM stammende Korrektur der STOKESschen Formel benutzt werden.

Als weitere Fehlerquelle bei dieser Methode tritt die Dichte des sehr kleinen Teilchens auf, die nicht mehr dieselbe ist wie die sogenannte „makroskopische" Dichte. Außerdem kann das Tröpfchen an seiner Oberfläche Gase absorbieren und damit seinen Durchmesser vergrößern.

MILLIKAN ist es gelungen, alle diese Fehlerquellen zu vermeiden. Durch Umladung der Flüssigkeitströpfchen mittels Röntgenstrahlen konnte er zeigen, daß die Ladung des Tröpfchens nur ein ganzzahliges Vielfaches der Elektronenladung sein kann.

Zuletzt wollen wir noch eine interessante Erscheinung erwähnen, die ebenfalls für die tatsächliche Existenz des Elektrons bzw. für den korpuskularen Aufbau der Elektrizität spricht. Die Erscheinung ist der sogenannte Schroteffekt, dessen Theorie SCHOTTKY ausgearbeitet hat. Wenn man einen sich in einem evakuierten Rohr befindenden Glühfaden als Kathode und eine der Kathode gegenüberliegende Elektrode als Anode benutzt, so fließt bei Anwendung

einer entsprechenden Potentialdifferenz ein negativer Strom von der Glühkathode zur Anode (Edisoneffekt). Ist die Stromstärke genügend groß, so werden wir nichts Auffallendes beobachten. Ist sie jedoch sehr klein, was wir dadurch erreichen, daß wir die Kathode nur wenig erhitzen, so wird sich zeigen, daß die Stromstärke nicht konstant ist, sondern statistische Schwankungen aufweist, die von der korpuskularen Beschaffenheit der „Elektrizität" herrühren. Selbstverständlich bemerken wir bei Berücksichtigung der in Gleichung (4) angegebenen Größe der Elektronenladung, daß die Schwankungen nur bei außerordentlich kleiner Stromstärke beobachtet werden können; da man jedoch mit Hilfe von Röhrenverstärkern kleine Ströme nach Belieben verstärken kann, läßt sich diese Erscheinung sehr genau beobachten. Aus dem Mittelwert der Schwankungsquadrate erhalten wir dann eine Formel zur Berechnung der Elektronenladung.

§ 2. Die theoretischen Schwierigkeiten des Begriffes des Elektrons

Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen, daß das Elektron experimentell nachgewiesen werden kann. Wenn wir den Begriff des Elektrons mit den besprochenen und von der Erfahrung bestätigten Gesetzen der Elektrodynamik in Einklang bringen wollen, so entstehen interessante Schwierigkeiten. Untersuchen wir das Feld des Elektrons in einer nicht zu kleinen Entfernung von ihm, so tritt keine Schwierigkeit auf, da wir das Potential einer punktförmigen Ladung sehr gut kennen. Ferner können wir die Einwirkung eines elektrischen oder magnetischen Feldes auf das Elektron berechnen. Ganz unerklärlich ist es dagegen nach dem bisher Besprochenen, weshalb die Ladung eines Elektrons unter der Wirkung der elektrostatischen Abstoßung nicht „auseinanderfließt". Jedenfalls müssen wir annehmen, daß die Ladung des Elektrons durch eine uns unbekannte Ursache zusammengehalten wird. Wenn wir das Elektron als punktförmig betrachten, dann ist eine endliche Elektrizitätsmenge in einem Punkt lokalisiert. Demzufolge wird das Potential dieser Ladung notwendigerweise unendlich groß. Nach der Relativitätstheorie gehört aber zu einer unendlich großen Energie auch eine unendlich große Masse. Diese Schwierigkeit könnte man vermeiden, wenn man annehmen würde, daß das Elektron eine endliche Ausdehnung besitzt. Anfangs glaubten die Physiker, daß dies der richtige Standpunkt wäre. Nach unserem heutigen Wissen müssen wir jedoch zu dieser Frage folgendes bemerken: Erstens ist uns keine physikalische Erscheinung bekannt, die dafür sprechen würde, daß das Elektron einen endlichen Durchmesser besitzt. Eine solche Erfahrung wäre z. B., daß das Elektron infolge der Drehung um seine Achse ein mechanisches und magnetisches Moment besitzt (Spin). Nach der klassischen Theorie wären selbstverständlich diese Erfahrungen nur dann denkbar, wenn das Elektron einen endlichen Halbmesser besäße. Bezüglich der Deutung dieses Elektronenspins sind jedoch schon im Anfang theoretische Schwierigkeiten aufgetreten. Es müßte sich dann z. B. die Oberfläche des Elektrons mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen. Endlich wurde dann nach der strengen Fassung der Quantenmechanik, d. h. nach der

DIRACschen Theorie, das Auftreten dieses Spins die Ausdeutung einer Differentialgleichung. Von der alten mechanistischen Vorstellung ist also nichts übriggeblieben. Nach unseren heutigen Kenntnissen beschreibt die DIRACsche Theorie tatsächlich das Verhalten des Elektrons. In der DIRACschen Theorie kommt ein „Halbmesser des Elektrons" überhaupt nicht vor. Zweitens – und das ist vielleicht ein noch ernsterer Einwand – ist die Ladung relativistisch eine invariante Größe, eine lineare Ausdehnung dagegen nicht. Vollständigkeitshalber sei nur noch erwähnt, daß es noch andere Probleme gibt, bei denen eine Größe theoretisch unendlich werden müßte, was jedoch physikalisch sinnlos ist. In neuester Zeit versuchten der amerikanische Physiker SCHWINGER und der japanische Physiker TOMONAGA die Lösung all dieser Fragen durch eine Methode, die sie „Renormalisation" nennen. Der Grundgedanke dieser Methode ist, daß man diese unendlichen Größen einfach dadurch vermeidet, daß man – z. B. in unserem Falle – die Größe der Masse neu normiert. Ob dieser interessante Gedanke jedoch das Problem endgültig löst, wird erst die Zukunft zeigen.

Ohne Rücksicht darauf, ob die Annahme eines endlichen Elektronenradius schon ein überwundener Standpunkt ist, müssen wir uns doch mit der Frage beschäftigen, wie die klassische Physik einen Elektronenradius zu definieren versuchte, weil man diesen „klassischen Elektronenradius" auch noch heutzutage als Maßeinheit in der Atomphysik benutzt. Nehmen wir zuerst als Gedankenexperiment an, daß das Elektron eine Kugel von homogener elektrischer Dichte und vom Halbmesser R sei. Die Ladungsdichte in dieser Kugel ist dann

$$\varrho = \frac{3e}{4R^3\pi}. \tag{10}$$

Die potentielle Energie dieser Kugel beträgt

$$W = \frac{16}{15}\pi^2\varrho^2 R^5. \tag{11}$$

Setzen wir Gleichung (10) in Gleichung (11) ein, so folgt

$$W = \frac{3}{5}\frac{e^2}{R}. \tag{12}$$

Nach der Relativitätstheorie gehört zu jeder Energie der Größe W eine Masse W/c^2. Setzen wir die Elektronenmasse der relativistisch definierten Masse gleich, so folgt

$$m = \frac{W}{c^2} = \frac{3}{5}\frac{e^2}{Rc^2}. \tag{13}$$

Der Elektronenradius ergibt sich damit zu

$$R = \frac{3}{5}\frac{e^2}{mc^2}. \tag{14}$$

Wenn wir analog annehmen, daß das Elektron nicht eine Kugel von homogener Dichte, sondern eine Kugelschale von gleichmäßiger Oberflächendichte ist – (ABRAHAMsches Elektronenmodell) –, so ist das Potential in dessen Inneren

$$V = \frac{e}{R} \tag{15}$$

und demzufolge die potentielle Energie einfach

$$W = \frac{1}{2} \frac{e^2}{R} . \tag{16}$$

Nach dem vorigen Gedankengang folgt daraus

$$R = \frac{1}{2} \frac{e^2}{m c^2} . \tag{17}$$

Die Größe $r_e = \frac{e^2}{m c^2}$ nennen wir den klassischen Elektronenradius. Für das Proton würde sich nach einem analogen Gedankengange ein viel kleinerer Radius ergeben, weil seine Masse viel größer ist. Übrigens werden wir in § 5 sehen, daß wir unter strenger Anwendung der Theorie in der Formel für R einen anderen numerischen Faktor erhalten. Wir erwähnen noch, daß man unter der Annahme eines punktförmigen Elektrons aus Gleichung (12) und (16) eine unendlich große Energie erhalten würde. Daran würde sich auch dann nichts ändern, wenn wir – statt $R = 0$ in diese Formeln einzusetzen – die im umgebenden Raume auftretende Energie, d. h. die Energie des elektrischen Feldes, berechneten. Da die Energie des elektrischen Feldes in der Volumeneinheit $\frac{1}{8\pi} \mathfrak{E}^2$ beträgt und wir hier für $|\mathfrak{E}|$ den Wert e/r^2 einsetzen und dann die erhaltene Formel mit $4\pi r^2 dr$ multiplizieren müssen, so erhalten wir wieder einen unendlichen Wert, wenn wir nach Integration über r $r = 0$ einsetzen. Selbstverständlich könnten wir alle diese Schwierigkeiten vermeiden, wenn wir annehmen würden, daß in einer sehr kleinen Entfernung vom Elektron das COULOMBsche Gesetz nicht mehr gültig ist. Man könnte viele solche mathematischen Ausdrücke ausfindig machen, aber bis jetzt spricht gar keine Erfahrung für die Wahl dieser oder jener Lösung. Außerdem würden hier, da man irgendeine endliche Länge einführen müßte, die mit der Relativitätstheorie zusammenhängenden Schwierigkeiten auftreten.

§ 3. Das LORENTZsche Kraftgesetz

Wenn ein Elektron sich in einem elektrischen und einem magnetischen Feld der Intensitäten $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegt, so entsteht die Frage, welche ponderomotorische Kraft auf dieses Elektron einwirkt. Den diese Frage beantwortenden LORENTZschen Kraftansatz haben wir schon im ersten Teil dieses Buches hergeleitet. Hier wollen wir dasselbe Resultat nochmals mit Hilfe einer anschaulichen Methode ableiten. Der vom elektrischen Felde herrührende Anteil folgt einfach aus dem COULOMBschen Gesetz:

$$\mathfrak{K}_1 = e \cdot \mathfrak{E} . \tag{18}$$

Die Geschwindigkeit des Elektrons spielt noch keine Rolle. Ganz anders sind die Verhältnisse beim magnetischen Feld, das auf ein ruhendes Elektron keine Kraft ausübt. Bewegt sich das Elektron mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, und bildet

die Richtung der Elektronengeschwindigkeit mit der Richtung der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$ den Winkel φ, so gilt

$$\mathfrak{K}_2 = \frac{e}{c}[\mathfrak{v}, \mathfrak{H}]. \tag{19}$$

Aus den Gleichungen (18) und (19) erhalten wir für die auf ein Elektron einwirkende Kraft

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 = e\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}, \mathfrak{H}]\right). \tag{20}$$

Das ist der in der Elektronentheorie so berühmt gewordene LORENTZsche Kraftansatz.

Um die Ausführungen zu vervollständigen, muß erwähnt werden, daß bei nicht konstanter Elektronengeschwindigkeit zu Gleichung (20) noch ein Zusatzterm hinzutritt, da das beschleunigte Elektron eine elektromagnetische Strahlung aussendet, die seine eigene kinetische Energie verringert. Mit dieser Tatsache, die nur bei großen Beschleunigungen von Bedeutung ist, werden wir uns noch bei der Besprechung der Schwingung des quasielastisch gebundenen Elektrons beschäftigen.

§ 4. Die Grundgleichungen der Elektronentheorie

Nach unseren heutigen Kenntnissen ist die Materie aus Elektronen, Protonen und Neutronen aufgebaut. Abgesehen von den die Atomkerne zusammenhaltenden Kräften, die nur eine sehr kleine Reichweite besitzen und deren physikalische Natur uns bis jetzt noch im wesentlichen unbekannt ist, besteht der Satz, daß die Materie letzten Endes aus aufeinander einwirkenden positiv und negativ geladenen Teilchen besteht. Demzufolge existiert eigentlich nur eine Art von Feldvektoren, und zwar die, welche sich auf das Vakuum beziehen. Außerdem gibt es nicht eine konduktive und eine konvektive Strömung, die wesensverschieden voneinander sind, weil ja jeder Strom aus der Bewegung von geladenen Teilchen besteht. Die Masse der Ladungsträger kann sehr verschieden sein. So transportieren die Elektronen die Elektrizität in Metallen. In Elektrolytlösungen sind es die Ionen, die eine Masse von atomarer Größenordnung besitzen.

Bezeichnen wir die sich auf das Vakuum beziehenden elektrischen und magnetischen Feldstärken mit $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{h}$, die Ladungsdichte mit ϱ und die Geschwindigkeit der Ladungen mit $\mathfrak{v}$, so erhalten die MAXWELLschen Differentialgleichungen die einfache Form

$$\left.\begin{array}{ll} 1.\ \operatorname{rot}\mathfrak{h} = \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{e}} + \frac{4\pi}{c}\varrho\mathfrak{v}, & 2.\ \operatorname{div}\mathfrak{e} = 4\pi\varrho, \\ 3.\ \operatorname{rot}\mathfrak{e} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{h}} \quad \text{und} & 4.\ \operatorname{div}\mathfrak{h} = 0. \end{array}\right\} \tag{22}$$

Außerhalb der Materie gehen selbstverständlich die von uns ursprünglich hergeleiteten MAXWELLschen Gleichungen in diese über. Innerhalb der Materie ist

aber unser Differentialgleichungssystem ebenfalls streng richtig, und zwar ganz unabhängig davon, um welche Materie es sich handelt, da deren Konstanten in Gleichung (22) nicht eingehen. Demgegenüber treten in den ursprünglichen MAXWELLschen Gleichungen die Dielektrizitätskonstante, die magnetische Permeabilität und die Leitfähigkeit als für jede Materie verschiedene Konstanten auf, die außerdem auch noch Funktionen der Frequenz und der Feldstärke sein können. Selbstverständlich sind bei Anwendung der ursprünglichen MAXWELLschen Gleichungen z. B. die elektrische Polarisation $\mathfrak{P}$ und die magnetische Induktion $\mathfrak{B}$ innerhalb der Materie nur langsam sich ändernde oder konstante Größen. Dagegen ändern sich die in Gleichung (22) definierten Vektoren auch innerhalb eines Atoms sehr schnell. Nach der Elektronentheorie haben jedoch nur die in Gleichung (22) stehenden Vektoren eine strenge Bedeutung, dagegen kann man z. B. die Vektoren $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{B}$ nur als gewisse Mittelwerte definieren. Auf diese Frage kommen wir übrigens noch im § 43 des dritten Teiles dieses Buches zurück.

Analog zu Gleichung (22) erhalten wir aus der Elektronentheorie die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes und den POYNTINGschen Vektor

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{e}^2 + \mathfrak{h}^2), \tag{23}$$

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{e}, \mathfrak{h}]. \tag{24}$$

Für den elektromagnetischen Spannungsvektor erhalten wir

$$T = \begin{Bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\begin{Bmatrix} e_x^2 + h_x^2 - \frac{1}{2}(\mathfrak{e}^2 + \mathfrak{h}^2) & e_x e_y + h_x h_y & e_x e_z + h_x h_z \\ e_x e_y + h_x h_y & e_y^2 + h_y^2 - \frac{1}{2}(\mathfrak{e}^2 + \mathfrak{h}^2) & e_y e_z + h_y h_z \\ e_x e_z + h_x h_z & e_y e_z + h_y h_z & e_z^2 + h_z^2 - \frac{1}{2}(\mathfrak{e}^2 + \mathfrak{h}^2) \end{Bmatrix} \tag{25}$$

Weiter folgt für die Impulsdichte des Feldes

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{str}} = \frac{\mathfrak{S}}{c^2} = \frac{1}{4\pi c}[\mathfrak{e}, \mathfrak{h}]. \tag{26}$$

§ 5. Das Feld eines gleichförmig und langsam bewegten Elektrons

Wenn sich ein Elektron ohne Beschleunigung und außerdem mit einer Geschwindigkeit bewegt, die klein im Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit ist, so wird das von ihm verursachte elektrische Feld näherungsweise durch das COULOMBsche Potential gegeben:

$$\varphi = e/r \quad \text{und} \quad e_x = \frac{e x}{r^3}, \quad e_y = \frac{e y}{r^3} \quad \text{und} \quad e_z = \frac{e z}{r^3}. \tag{27}$$

Das von seiner Bewegung verursachte magnetische Feld erhalten wir aus dem BIOT-SAVARTschen Gesetz, wobei jetzt dem Stromelement $\mathfrak{i}$ der Ausdruck $e \cdot \mathfrak{v}$ entspricht. Wenn wir mit h_φ die magnetische Feldstärke senkrecht zu $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{e}$ bezeichnen, dann folgt

$$h_\varphi = \frac{e\,v}{c\,r^2} \sin\vartheta, \tag{28}$$

wobei ϑ der Winkel zwischen der Geschwindigkeitsrichtung des Elektrons und der Geraden ist, die Beobachtungspunkt und Ort des Elektrons verbindet. Das BIOT-SAVARTsche Gesetz liefert für die magnetische Feldstärke eines Stromelementes der Länge Δl am Orte des Elektrons

$$h_\varphi = \frac{i\,\Delta l \cdot \sin\vartheta}{c\,r^2}. \tag{29}$$

Das Elektron bewege sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ in Richtung der X-Achse; dann folgt aus den Gleichungen (28) und (27):

$$\begin{aligned} h_x &= 0, \\ h_y &= -\frac{v}{c}\, e_z \\ \text{und} \quad h_z &= \frac{v}{c}\, e_y. \end{aligned} \tag{30}$$

Wir können diese Gleichungen durch folgende Vektorgleichung zusammenfassen:

$$\mathfrak{h} = \frac{1}{c}\,[\mathfrak{v}, \mathfrak{e}]. \tag{31}$$

Mit Hilfe der erhaltenen Zusammenhänge können wir die Bewegungsgröße des sich bewegenden Elektrons berechnen. Gleichung (26) liefert für die Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{4\pi c}\,[\mathfrak{e}, \mathfrak{h}]. \tag{32}$$

Da sich unser Elektron in Richtung der X-Achse bewegt, so müssen wir die x-Komponente des Vektors $\mathfrak{g}$ berechnen, für den wir aus den Gleichungen (27) und (30) das Resultat

$$g_x = \frac{v}{4\pi c^2}\,(e_y^2 + e_z^2) \tag{33}$$

erhalten. Daraus folgt für die ganze Bewegungsgröße unserer Ladungskugel

$$G_x = \frac{v}{4\pi c^2} \iiint (e_y^2 + e_z^2)\, dx\,dy\,dz. \tag{34}$$

Bei kugelsymmetrischer Ladungsverteilung muß für den Mittelwert von $e^y + e_z^2$ die Gleichung

$$\overline{e_y^2 + e_z^2} = \frac{2}{3}\, e^2 \tag{35}$$

bestehen. Also folgt

$$G_x = \frac{v}{4\pi c^2} \frac{2}{3} \iiint \mathfrak{e}^2 \, dx dy dz \tag{36}$$

oder

$$G_x = \frac{4}{3} \frac{U_0}{c^2} v \tag{37}$$

mit

$$U_0 = \frac{1}{8\pi} \iiint \mathfrak{e}^2 \, dx dy dz \tag{38}$$

als gesamter Feldenergie der ruhenden Ladung. Wenn wir uns die Ladung unseres Elektrons auf der Oberfläche einer Kugel vom Halbmesser R verteilt denken, dann ist

$$U_0 = \frac{1}{8\pi} \int_R^\infty \frac{e^2}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{R}. \tag{39}$$

Dies stimmt mit dem in unserer Formel (16) angegebenen Resultat überein. Endlich folgt aus den Gleichungen (37) und (39):

$$G_x = \frac{2}{3} \frac{e^2}{R c^2} v. \tag{40}$$

Wenn wir also annehmen, daß unsere Ladungskugel überhaupt keine träge Masse besitzt, dann verhält sie sich infolge ihres elektromagnetischen Feldes dennoch so, als besäße sie eine träge Masse von der Größe

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{R c^2}. \tag{41}$$

Diese elektromagnetische Masse ist – wie wir sehen – um so größer, je kleiner der Halbmesser der Kugel ist; durch entsprechende Wahl des letzteren könnten wir also die gemessene Masse des Elektrons als seine elektromagnetische Masse deuten. Wenn wir das Resultat der Gleichung (41) gleich der Elektronenmasse setzen und die bekannten numerischen Werte einsetzen, so folgt

$$R = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m c^2} = 1{,}9 \cdot 10^{-13} \,\text{cm}, \tag{42}$$

also eine so kleine Länge, daß deren Messung ganz unmöglich wäre. Wie wir übrigens in § 2 schon erwähnten, ist die Annahme eines endlichen Elektronenradius sowieso schon ein überwundener Standpunkt.

Es sei bemerkt, daß der aus Gleichung (42) berechnete Wert von R nicht mit dem aus Gleichung (17) erhaltenen übereinstimmt. Dieser scheinbare Widerspruch rührt davon her, daß wir bei der Herleitung von Gleichung (17) nur die elektrische Energie berücksichtigten, was jedoch nicht ausreichend ist, weil unter bloßer Wirkung von elektrischen Kräften eine geladene Kugelschale nicht stabil sein kann, sondern auseinanderfließen müßte. Zur Verhinderung dieses Vorganges müßten wir noch Kräfte anderer Art annehmen.

§ 6. Das Feld eines sich gleichförmig mit großer Geschwindigkeit bewegenden Elektrons

Bei der Berechnung des Feldes eines sich mit einer beliebigen Geschwindigkeit bewegenden Elektrons können wir nicht mehr die im vorigen Paragraphen angewandte und eigentlich von den Gleichungen der Elektrotechnik ausgehende Näherungsmethode benutzen, sondern müssen eine strenge Lösung unseres Differentialgleichungssystems (22) suchen. Wir bemerken, daß wir die Lösung im Falle einer gleichförmigen Bewegung berechnen wollen. Bei einer beschleunigten Bewegung müßten wir noch berücksichtigen, daß das Elektron bei der Änderung seiner Geschwindigkeit ein elektromagnetisches Feld aussendet. Zur Integration unseres Gleichungssystems führen wir erstens mit Hilfe des bekannten Zusammenhanges

$$\mathfrak{h} = \operatorname{rot} \mathfrak{A} \tag{43}$$

das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ ein. Setzen wir Gleichung (43) in die dritte Gleichung von (22) ein, so folgt aus $\operatorname{rot} \mathfrak{e} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{h}}$:

$$\operatorname{rot}\left(\mathfrak{e} + \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{A}}\right) = 0. \tag{44}$$

Daraus wird ersichtlich, daß man den Ausdruck $\mathfrak{e} + \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{A}}$ als Gradienten einer skalaren Größe φ auffassen kann. Es folgt

$$\mathfrak{e} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{A}} - \operatorname{grad}\varphi. \tag{45}$$

Über die Quellen von $\mathfrak{A}$ können wir noch frei verfügen, weil wir bis jetzt nur $\operatorname{rot}\mathfrak{A}$ angegeben haben und ein Vektorfeld nur unter gleichzeitiger Angabe seiner Quellen und Wirbel eindeutig bestimmt ist. Wir führen daher noch folgende Bedingung ein:

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{1}{c}\dot{\varphi} = 0. \tag{46}$$

Wenn wir jetzt die Gleichungen (43) und (46) in die erste und zweite Gleichung von (22) einsetzen, dann folgt unter Berücksichtigung von (45):

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\varrho\mathfrak{v} \tag{47}$$

und

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\varrho.$$

Wenn wir außerdem beachten, daß bei einem geradlinig und gleichförmig sich bewegenden Elektron die Feldstärke in einem gegebenen Punkt zur Zeit t die gleiche ist, wie sie zur Zeit $t - dt$ an einem um die Strecke $v\,dt$ zurückliegenden Punkte war, so können wir für jede Feldkomponente die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -v\frac{\partial f}{\partial x} \tag{48}$$

aufschreiben, selbstverständlich wieder unter der Annahme, daß sich das Elektron parallel zur X-Achse bewegt. Mit Hilfe von Gleichung (48) können wir aus den zwei Gleichungen (47) die Differentialquotienten nach der Zeit entfernen:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial z^2} = -\frac{4\pi}{c}\varrho \mathfrak{v},$$

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi\varrho. \tag{49}$$

Aus diesem Gleichungssystem ist ersichtlich, daß sich die Komponenten des Vektorpotentials nur im Faktor $\mathfrak{v}/c$ von denen des skalaren Potentials unterscheiden. Also ist

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{v}}{c}\varphi. \tag{50}$$

Aus Gleichung (50) erhalten wir, wenn wir rot $\mathfrak{A}$ bilden oder $\mathfrak{A}$ nach der Zeit differenzieren, folgende Beziehungen:

$$\operatorname{rot}\mathfrak{A} = \frac{1}{c}\operatorname{rot}(\mathfrak{v}, \varphi) = -\frac{1}{c}[\mathfrak{v}, \operatorname{grad}\varphi] \tag{51}$$

und

$$\dot{\mathfrak{A}} = \frac{1}{c}\mathfrak{v}\dot{\varphi} = -\frac{1}{c}\mathfrak{v}(\mathfrak{v}, \operatorname{grad}\varphi). \tag{52}$$

Setzen wir dies in die Gleichungen (43) und (45) ein, so erhalten wir

$$\mathfrak{e} = -\operatorname{grad}\varphi + \frac{1}{c^2}\mathfrak{v}(\mathfrak{v}, \operatorname{grad}\varphi) \tag{53}$$

und

$$\mathfrak{h} = \frac{1}{c}[\mathfrak{v}, \mathfrak{e}]. \tag{54}$$

Zur Lösung unseres Differentialgleichungssystems (49) genügt es vollständig, eine Gleichung der obigen Art zu lösen. Wir bemerken, daß die zweite Gleichung nur in dem vor $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ stehenden Faktor $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$ von der Differentialgleichung des gewöhnlichen elektrostatischen Potentials verschieden ist. Wenn wir folgende neue Veränderliche x', y', z', t' mit Hilfe der Beziehungen

$$x = x'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad y = y', \quad z = z' \quad \text{und} \quad t = t' \tag{55}$$

einführen und zur Vereinfachung der Schreibweise noch die Bezeichnung $v/c = \beta$ benutzen, so gehen die Funktionen $\varrho(x, y, z, t)$ und $\varphi(x, y, z, t)$ in die folgenden Identitäten über:

$$\left.\begin{aligned} &\varrho'(x', y', z', t') \equiv \varrho\left(x'\sqrt{1-\beta^2}, y', z', t'\right) \\ \text{und} \quad &\varphi'(x', y', z', t') \equiv \varphi\left(x'\sqrt{1-\beta^2}, y', z', t'\right). \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

In diesen Koordinaten lautet die zweite Gleichung von (49):

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z'^2} = -4\pi\varrho'. \tag{57}$$

Diese Differentialgleichung stimmt vollständig mit der des elektrostatischen Potentials einer ruhenden Ladung überein, die wir bekanntlich unmittelbar mit dem Ausdruck

$$\varphi'(x', y', z', t') = \iiint \frac{\varrho'(\xi', \eta', \zeta', t')\, d\xi'\, d\eta'\, d\zeta'}{\sqrt{(x'-\xi')^2 + (y'-\eta')^2 + (z'-\zeta')^2}} \tag{58}$$

integrieren können.

Wenn wir mit Hilfe der Beziehungen (55) die ungestrichenen Veränderlichen einführen, so geht Gleichung (58) in

$$\varphi(x, y, z, t) = \iiint \frac{\varrho(\xi, \eta, \zeta, t)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (1-\beta^2)\{(y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2\}}} \tag{58a}$$

über. Zur Vereinfachung der Schreibweise nehmen wir an, daß wir die Lösung für den Zeitpunkt t_0 suchen, in dem das Elektron sich im Nullpunkt unseres Koordinatensystems befindet. Außerdem betrachten wir das Elektron als punktförmig. Demzufolge können wir statt des in Gleichung (58) stehenden Integrals einfach die Elektronenladung im Zähler einsetzen. Als Lösung erhalten wir

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{e}{\sqrt{x^2 + (1-\beta^2)\{y^2 + z^2\}}}. \tag{59}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir noch die Abkürzung

$$s = \sqrt{x^2 + (1-\beta^2)\{y^2 + z^2\}} \tag{60}$$

ein. Aus den Gleichungen (59) und (60) folgt unter Berücksichtigung von Gleichung (50):

$$\varphi = \frac{e}{s}, \quad A_x = \frac{e v}{s c} \quad \text{und} \quad A_y = A_z = 0, \tag{61}$$

weil die Geschwindigkeit nur entlang der X-Achse eine Komponente besitzt. Aus diesen Potentialen können wir die Feldstärken mit Hilfe der Gleichungen (45) und (43) berechnen:

$$\left.\begin{aligned} e_x &= -(1-\beta^2)\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (1-\beta^2)\frac{e}{s^3}\,x, \\ e_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad\quad\;\, = (1-\beta^2)\frac{e}{s^3}\,y \\ \text{und} \quad e_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \qquad\quad\;\, = (1-\beta^2)\frac{e}{s^3}\,z. \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

Weiter erhalten wir, da nach Gleichung (54) $\mathfrak{h} = \frac{1}{e} [\mathfrak{v}, \mathfrak{e}]$ ist,

$$\left.\begin{aligned} h_x &= 0\,, \\ h_y &= -\frac{e\,v}{c}\,\frac{1-\beta^2}{s^3}\,z \\ \text{und} \qquad h_z &= +\frac{e\,v}{c}\,\frac{1-\beta^2}{s^3}\,y\,. \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Gleichung (62) ergibt unter Berücksichtigung der für s in Gleichung (60) angegebenen Definition folgendes Resultat: Entlang der X-Achse ist die elektrische Feldstärke gegenüber dem statischen Fall um den Faktor $1 - \beta^2$ kleiner geworden, dagegen hat diese Größe in der durch die Y- und Z-Achse gelegten Ebene um $1/\sqrt{1-\beta^2}$ zugenommen. Je mehr sich also die Geschwindigkeit des Elektrons der Lichtgeschwindigkeit nähert, desto mehr werden sich die ursprünglich kugelsymmetrisch verteilten Kraftlinien in der YZ-Ebene, also senkrecht zur Bewegungsrichtung des Elektrons, zusammendrängen. Im Falle, daß $v = c$ ist, wird die Feldstärke in dieser Ebene unendlich groß.

Die in diesem Abschnitt hergeleiteten Resultate kann man viel einfacher und anschaulicher aus der Relativitätstheorie erhalten. Man könnte noch fragen, was denn eigentlich geschehen würde, wenn die Geschwindigkeit des Elektrons (v) die Lichtgeschwindigkeit (c) übertrifft. Diese Frage ist jedoch sinnlos, weil es nach der Relativitätstheorie keine Geschwindigkeit geben kann, die größer als die Lichtgeschwindigkeit ist. Diese Betrachtungen beziehen sich jedoch nur auf das Vakuum. In einem Medium mit dem Brechungsindex n treten wesentlich andere Verhältnisse auf. Die Phasengeschwindigkeit (V) der elektromagnetischen Wellen ist in diesem Medium $c/n = V$, und da $n > 1$ ist, kann hier die Geschwindigkeit des Elektrons v tatsächlich größer als V werden. Mathematisch kann man diesen Fall analog zu dem eben besprochenen behandeln. Man erhält z. B. statt der zweiten Gleichung (47) unter Berücksichtigung von $\frac{c}{V} = n = \sqrt{\varepsilon}$ (ε = Dielektrizitätskonstante):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{n^2}{c^2}\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\varrho}{n^2}\,. \tag{47a}$$

Diese Gleichung läßt sich analog der Gleichung (47) herleiten. Die weitere mathematische Behandlung dieses Problems ist ziemlich verwickelt und geht über den Rahmen dieses Werkes hinaus. Wir beschränken uns deshalb auf einige qualitative Bemerkungen. Dabei erwähnen wir, daß $n = \sqrt{\varepsilon}$ nicht konstant ist, sondern von der Frequenz abhängt. Anderseits ist ja die ganze Kontinuumstheorie – und nur hier haben n bzw. ε einen Sinn – wegen des atomaren Aufbaus der Materie eine Annäherung, die besonders bei kleinen Wellenlängen versagt.

Unter der Voraussetzung $v > V$ müßte das Elektron seinem Felde unter Aussendung von Strahlung vorauseilen. Diese Art von Strahlung wurde auf experimentellem Wege 1934 von Čerenkov entdeckt. Die Čerenkovstrah-

lung ist das elektromagnetische Analogon der Kopfwelle eines sich mit Überschallgeschwindigkeit bewegenden Geschosses oder der Bugwelle eines Schiffes (das sich mit größerer Geschwindigkeit als die Wasserwellen bewegt). Eigentlich besteht dieser ČERENKOveffekt darin, daß ein Elektron, das sich im fraglichen Medium mit größerer Geschwindigkeit als die Phasengeschwindigkeit der elektromagnetischen Strahlung bewegt, Licht emittiert. Die Strahlrichtungen dieses Lichtes bilden die Mantelfläche eines Kegels um die Bewegungsrichtung des Elektrons als Symmetrieachse, was man in Analogie zu den Bugwellen leicht erklären kann. Der ČERENKOveffekt, der für unser Auge als ein schwaches „bläuliches Leuchten" erscheint, ist nicht mit der Bremsstrahlung zu verwechseln, weil letztere von der (negativen) Beschleunigung des Elektrons verursacht wird.

TEIL III

DIE ANWENDUNGEN DER THEORIE

DAS QUASIELASTISCH GEBUNDENE ELEKTRON

§ 1. Die Schwingung des quasielastisch gebundenen Elektrons

Aus der Experimentalphysik ist uns bekannt, daß die Materie aus elektrisch geladenen Teilchen aufgebaut ist. Die Atomkerne bestehen aus positiv geladenen Protonen und elektrisch neutralen Neutronen; die positiven Ladungen des Atomkerns „neutralisieren" die den Kern umkreisenden Elektronen. Das ist seinem Wesen nach das RUTHERFORD-BOHRsche Atommodell, das dann durch die DE BROGLIE-SCHRÖDINGERsche Wellenmechanik weiter verfeinert wurde. Von J. J. THOMSON stammt das erste Atommodell, nach dem im Atom quasielastisch gebundene Elektronen vorhanden sind. Selbstverständlich ist dieses primitive Modell nach dem heutigen Stande der Physik schon längst überwunden. Ungeachtet dessen müssen wir uns doch mit der Theorie des quasielastisch gebundenen Elektrons beschäftigen, einerseits deshalb, weil sich die modernen Theorien oft auf der Grundlage der anschaulichen THOMSONschen Theorie entwickelt haben und andererseits deshalb – und das ist noch viel wichtiger – weil die auf der Grundlage dieses Modells hergeleiteten Formeln für den Brechungsquotienten, für die molekulare Lichtstreuung, für den KERReffekt, für den FARADAYeffekt usw. auch nach der Quantenmechanik richtig sind. Die aus diesen Erscheinungen nach der klassischen Theorie berechneten Molekülstrukturen sind also auch nach der Quantenmechanik richtig. Eigentlich war dies die erste Methode der Physik zur Erforschung der Molekülstruktur. Es ist interessant zu erwähnen, daß der scheinbar glänzende Erfolg der klassischen Theorie in diesem Falle vollkommen irreführend war. Wenn sich auch die klassische Theorie bei der erwähnten Gruppe der makroskopischen Erscheinungen vollständig bewährt, so ist es doch sehr unwahrscheinlich, daß sie in der Welt der Atome und Moleküle ebenso richtig ist.

Nehmen wir an, daß das Elektron mit einer quasielastischen Kraft an seine Gleichgewichtslage gebunden ist. Seine Bewegung beschreibt dann die aus der Mechanik sehr gut bekannte Differentialgleichung

$$m\ddot{x} = -k^2 x, \tag{1}$$

welche das allgemeine Integral

$$x = A\cos\sqrt{\frac{k^2}{m}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{k^2}{m}}\,t \tag{2}$$

besitzt. Aus Gleichung (2) erhalten wir die Frequenz der Schwingung, wenn wir berücksichtigen, daß der zeitliche Ablauf der Schwingungsbewegung durch eine Funktion vom Typ $\sin 2\pi\nu t$ beschrieben wird, in der ν die Frequenz der Schwingung ist. Es gilt demnach

$$\sqrt{\frac{k^2}{m}} = 2\pi\nu \tag{3}$$

oder

$$\frac{1}{T} = \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k^2}{m}}, \tag{4}$$

wo jetzt ν durch die Masse m des Elektrons und die vorläufig noch unbekannte Konstante der quasielastischen Kraft k^2 ausgedrückt ist. Selbstverständlich kann man auf diesem Wege rein formal die Emission jeder Spektrallinie erklären, weil man ja zu einem gemessenen ν aus Gleichung (4) immer einen dazugehörenden Wert von k^2 berechnen kann.

Unsere bisherigen Berechnungen weichen von dem bei der Behandlung der ungedämpften Schwingungen in der Mechanik benutzten Verfahren nicht ab. Bei der Bewegung des Elektrons müssen wir aber noch folgendes berücksichtigen: Die Bewegung einer Ladung können wir wie einen Strom auffassen. Dieser verursacht ein magnetisches Feld. Außerdem ändert sich auch das elektrische Feld in der Umgebung des sich bewegenden Elektrons. Das schwingende Elektron verursacht in seiner Umgebung ein sich änderndes elektrisches und magnetisches Feld. Es strahlt also dauernd Energie aus, zumal der Poyntingsche Vektor nicht verschwindet.

Wie wir wissen [vgl. Teil IV, § 31, Formeln (385) und (386)], verursacht ein Dipol, dessen Dipolmoment eine Funktion der Zeit ist, in seiner Wellenzone die elektrische und magnetische Feldstärke

$$|E| = |H| = \frac{1}{c^2}\left|\frac{\ddot{p}\cdot\sin\vartheta}{r}\right|. \tag{5}$$

Hierbei bedeuten c die Lichtgeschwindigkeit, r die Entfernung vom Dipol und ϑ den mit der Dipolachse eingeschlossenen Winkel. Das Dipolmoment ist ein Vektor und beträgt $\mathfrak{p} = e\mathfrak{r}$, die x-Komponente lautet:

$$p_x = ex. \tag{6}$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (5) und (6) in die Relation für den Poyntingschen Vektor erhalten wir

$$S = |\mathfrak{S}| = \frac{c}{4\pi}\,|[\mathfrak{E},\mathfrak{H}]| = \frac{1}{4\pi c^3}\left(\frac{e\ddot{x}}{r}\sin\vartheta\right)^2. \tag{7}$$

In der Schwingungsrichtung des Dipols wird überhaupt keine Energie ausgestrahlt ($\vartheta = 0$). Senkrecht zu dieser Richtung ist die Ausstrahlung maximal. Um die ganze ausgestrahlte Energie zu erhalten, müssen wir Gleichung (7) über eine Kugelfläche vom Halbmesser r integrieren. Führen wir räumliche Polar-

koordinaten ein, so erhalten wir für den Energieverlust $d\varepsilon$ während des Zeitelementes dt:

$$d\varepsilon = \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} S r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi \cdot dt = \int\limits_{0}^{\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1}{4\pi c^3} e^2 \ddot{x}^2 \sin^3\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \cdot dt$$

$$= \frac{c^2 \ddot{x}^2}{c^3} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\vartheta d\vartheta \cdot dt = \frac{2 e^2 \ddot{x}^2}{3 c^3} \cdot dt. \tag{8}$$

Nebenbei sei bemerkt, daß nach Gleichung (8) ein gleichmäßig beschleunigtes Elektron während einer Sekunde die Energie

$$\varepsilon_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2 \ddot{x}^2}{c^3} \tag{8a}$$

ausstrahlt. Außerdem folgt aus Gleichung (8) für die Bremsstrahlung eine einfache Formel, wenn wir annehmen, daß während der Abbremsung des Elektrons die negative Beschleunigung $\ddot{x}$ konstant ist. In diesem Falle ist das über die ganze Zeitdauer der Abbremsung erstreckte Integral $|\ddot{x}| \int dt = v$, wobei v die Anfangsgeschwindigkeit des Elektrons ist. Für die gesamte Energie E, die vom Elektron während der Zeit ausgestrahlt wird, bis seine Geschwindigkeit vom Anfangswert v auf Null abnimmt, folgt aus Gleichung (8):

$$E = \int d\varepsilon = \frac{2}{3} \frac{e^2 |\ddot{x}| \cdot |\ddot{x}| \int dt}{c^3} = \frac{2}{3} \frac{e^2 |\ddot{x}| v}{c^3}. \tag{8b}$$

Dies ist eine für die Röntgentechnik wichtige Formel.

Wenn wir jetzt nach dieser kleinen Abweichung von unserem Problem annehmen, daß unser Oszillator während der Zeiteinheit sehr viele Oszillationen vollführt, so erhalten wir für die in der Zeiteinheit ausgestrahlte Energie

$$\varepsilon = \frac{2 e^2 \overline{\ddot{x}^2}}{3 c^3}, \tag{9}$$

wobei $\overline{\ddot{x}^2}$ den zeitlichen Mittelwert des Quadrates der Beschleunigung bedeutet. Um diesen Betrag nimmt also die Energie unseres Oszillators in der Zeiteinheit ab. Aus den Gleichungen (2) und (4) folgt für $\overline{\ddot{x}^2}$:

$$\overline{\ddot{x}^2} = \frac{1}{T} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 \int\limits_{0}^{T} \left(A \cos 2\pi \frac{t}{T} + B \sin 2\pi \frac{t}{T}\right)^2 dt$$

$$= \frac{(2\pi)^4}{T^5} (A^2 + B^2) \pi \frac{T}{2\pi} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 \frac{A^2 + B^2}{2}. \tag{10}$$

wobei $T = 1/\nu$ die Zeitdauer einer vollen Schwingung bedeutet. Setzen wir Gleichung (10) in Gleichung (9) ein und schreiben ν statt $1/T$, so folgt

$$\varepsilon = \frac{e^2 (2\pi\nu)^4}{3c^3} (A^2 + B^2). \tag{11}$$

Andererseits erhalten wir aus Gleichung (1) die Gesamtenergie des Oszillators, wenn wir die Gleichung mit $\dot{x}$ multiplizieren und dann integrieren:

$$W = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} k^2 x^2. \tag{12}$$

Setzen wir hier Gleichung (2) ein, so folgt

$$W = \frac{1}{2} k^2 (A^2 + B^2). \tag{13}$$

Aus den Gleichungen (11) und (13) erhalten wir also

$$\varepsilon = \frac{e^2 (2\pi\nu)^4}{3c^3} \cdot \frac{2W}{k^2} \tag{14}$$

oder, wenn wir k aus Gleichung (3) einsetzen:

$$\varepsilon = \frac{2e^2 (2\pi\nu)^2}{3c^3 m} W. \tag{15}$$

Da jedoch ε die Abnahme der Energie des Oszillators in der Zeiteinheit bedeutet, so können wir Gleichung (15) folgendermaßen schreiben:

$$dW = \frac{2e^2 (2\pi\nu)^2}{3c^3 m} W dt \tag{16}$$

oder integriert

$$W = W_0 e^{-\gamma t}, \tag{17}$$

wobei

$$\gamma = \frac{2e^2 (2\pi\nu)^2}{3c^3 m} \tag{18}$$

ist. Der reziproke Wert von γ ist gerade die Zeit, in der die Energie des Oszillators auf den e-ten Teil gesunken ist. Wenn wir den infolge der Ausstrahlung auftretenden Energieverlust berücksichtigen und bedenken, daß die Gesamtenergie des Oszillators dem Quadrat der Schwingungsamplitude proportional ist, erhalten wir für x statt (2) bzw. (3) folgenden Ausdruck:

$$x = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (A \cos 2\pi\nu t + B \sin 2\pi\nu t). \tag{19}$$

Dieser Ausdruck entspricht der Lösung der Differentialgleichung einer gedämpften Schwingung. Den exponentiellen Faktor $e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ nennt man Dämpfungsfaktor. Das logarithmische Dekrement beträgt

$$\delta = \frac{\gamma}{2} T = \frac{\gamma}{2} \frac{1}{\nu} = \frac{4\pi^2 \nu e^2}{3c^3 m}. \tag{20}$$

In der Mechanik ist Gleichung (19) die strenge Lösung der Differentialgleichung der gedämpften Schwingungen. Die in unserem Fall nachträglich angebrachte Korrektur hinsichtlich der Strahlungsverluste hat nur dann einen Sinn, wenn der Energieverlust während einer Schwingung im Verhältnis zur Gesamtenergie außerordentlich gering ist. Die bisher erfolgten Ausführungen stellen nur ein rohes Modell dar. Die eigentliche Lösung des behandelten Problems erfolgt durch die Quantenmechanik. Das wichtigste Anwendungsgebiet der Gleichung (9) ist die Hochfrequenztechnik.

§ 2. Die erzwungene Schwingung des quasielastisch gebundenen Elektrons

Nach den Ausführungen im vorigen Paragraphen können wir den infolge der Ausstrahlung auftretenden Energieverlust des Elektrons durch Einführung einer Reibungskraft approximieren. Dann ist unsere mit Hilfe der besprochenen Näherungen hergeleitete Gleichung (19) eine Lösung der Differentialgleichung der gedämpften Schwingung. Indem wir Gleichung (1) durch einen „Reibungsterm" ergänzen, der den von der Ausstrahlung herrührenden Energieverlust beschreibt, erhalten wir

$$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + k^2 x = 0. \tag{21}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung entspricht der Gleichung (19). Zu einer wichtigen Anwendung der Gleichung (21) kommen wir, wenn wir die Differentialgleichung mit einem eine äußere Kraft beschreibenden Gliede ergänzen. Bei der Besprechung des optischen Verhaltens der Materie erhebt sich die Frage, wie der elektrische Vektor einer einfallenden Lichtwelle auf die darin enthaltenen Elektronen einwirkt. Bezeichnen wir also diesen elektrischen Vektor mit $\mathfrak{E}_0 \cos 2\pi\nu\, t$, wobei $\mathfrak{E}_0$ die Amplitude des Lichtvektors und ν seine Frequenz bedeuten. Zur Erleichterung der mathematischen Behandlung schreiben wir $\mathfrak{E}_0 e^{i2\pi\nu t}$. Offensichtlich erhalten wir aus Gleichung (21) die inhomogene Differentialgleichung

$$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + k^2 x = e\mathfrak{E}_0 e^{i2\pi\nu t}, \tag{22}$$

welche wieder dieselbe Form wie die aus der Mechanik bekannte Differentialgleichung der erzwungenen Schwingungen besitzt. Als Lösungsansatz benutzen wir

$$x = x_0 e^{i2\pi\nu t}. \tag{23}$$

Wenn wir berücksichtigen, daß wir für k^2 aus Gleichung (3)

$$k^2 = (2\pi\nu_0)^2\, m \tag{24}$$

erhalten, so folgt

$$x_0 = \frac{\frac{e}{m}\mathfrak{E}_0}{4\pi^2(\nu_0^2 - \nu^2) + i2\pi\nu\gamma}. \tag{25}$$

Da x_0 komplex ist, so ist es zweckmäßig, noch folgende Bezeichnung einzuführen:

$$x_0 = \mathfrak{x}_0 e^{-i\varphi}, \tag{26}$$

wobei $\mathfrak{z}_0$ und φ reelle Größen sind. Durch Gleichsetzen der reellen und imaginären Teile der Gleichungen (25) und (26) folgt

$$\mathfrak{z}_0 = \frac{e}{m} \frac{\mathfrak{E}_0}{\sqrt{[4\pi^2(\nu_0^2 - \nu^2)]^2 + 4\pi^2 \nu_0^2 \gamma^2}} \tag{27}$$

und

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\nu\gamma}{2\pi(\nu_0^2 - \nu^2)}. \tag{28}$$

Aus den Gleichungen (25), (26), (27) und (28) erhalten wir eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung (22):

$$x = \frac{\frac{e}{m}\mathfrak{E}_0}{\sqrt{[4\pi^2(\nu_0^2 - \nu^2)]^2 + 4\pi^2\nu^2\gamma^2}} e^{i(2\pi\nu t - \varphi)}. \tag{29}$$

Hieraus ersehen wir, daß die Amplitude in der Nähe der Eigenfrequenz des Elektrons sehr groß wird und die Phasenverschiebung im Falle der vollständigen Übereinstimmung der äußeren Frequenz und der Eigenfrequenz des Elektrons gerade $\pi/2$ ist. Um eine vollständige Lösung der Differentialgleichung (22) zu erhalten, müßte zu Gleichung (29) eigentlich noch die Lösung der Differentialgleichung der gedämpften Schwingungen, d.h. die Gleichung (19), hinzugefügt werden. Da jedoch infolge des Dämpfungsgliedes Gleichung (19) schnell abnimmt, bleibt im stationären Fall nur die durch Gleichung (29) beschriebene Bewegung übrig. Außerdem ist Gleichung (19) nur dann eine Lösung von Gleichung (21), wenn die Dämpfung sehr klein ist.

Physikalisch ist der in den Formeln (25) oder (27) auftretende „Resonanznenner" von besonderer Bedeutung. Wenn γ klein ist und außerdem die erwähnten Frequenzen nicht zusammenfallen, so bleibt in den Nennern eigentlich nur die Differenz übrig. Die Erfahrung beweist, daß in der Nähe einer Spektrallinie die Materie sich optisch tatsächlich so verhält, wie es der Resonanznenner verlangt. Dieser Tatbestand täuschte einen glänzenden Erfolg der klassischen Theorie vor. Das Entstehen der Emissionslinien des Wasserstoffs konnte dann die BOHRsche Quantentheorie mit Hilfe eines einzigen den Kern umkreisenden Elektrons erklären; es war dagegen nicht möglich, das Auftreten der obenerwähnten Resonanznenner mit Hilfe dieser Theorie zu deuten. Die Physiker der damaligen Zeit haben zur Klärung dieses Paradoxons, daß sich die Materie bezüglich der Emission der Spektrallinien entsprechend der BOHRschen Theorie verhält und daß die Dispersionserscheinungen nach der klassischen Elektronentheorie gedeutet werden können, angenommen, daß zu jeder Spektrallinie ein sogenannter „virtueller Oszillator" gehört. Diese fast hoffnungslos aussehenden Widersprüche der Theorie hat dann die DE BROGLIE-SCHRÖDINGERsche Theorie vollständig aufgeklärt. Gegen unsere Gleichung (22) könnte man einwenden, daß nur der elektrische Anteil berücksichtigt worden ist. Man kann aber leicht zeigen, daß der magnetische Vektor des Lichtes nur in solchen Fällen eine Rolle spielt, in denen man auch schon die aus der Relativitätstheorie herrührenden Korrekturen berücksichtigen muß.

§ 3. Die erzwungene Schwingung des Elektrons ohne Berücksichtigung der Dämpfung

Nehmen wir an, daß in Gleichung (22) das „Reibungsglied“ vernachlässigbar klein ist, dann haben wir

$$m\ddot{x} + k^2 x = e\mathfrak{E}_0 \cos 2\pi\nu t. \tag{30}$$

(Einfachheitshalber haben wir hier nur den Realteil berücksichtigt). Die Lösung dieser Differentialgleichung erhalten wir aus Gleichung (29), wenn wir dort $\gamma = 0$ setzen:

$$x = \frac{\frac{e}{m}\mathfrak{E}_0}{4\pi^2(\nu_0^2 - \nu^2)} \cos 2\pi\nu t. \tag{31}$$

Unsere Gleichung hat selbstverständlich nur dann einen Sinn, wenn $\nu_0 \neq \nu$ ist. Im entgegengesetzten Fall würde die aus der Mechanik bekannte „Resonanzkatastrophe“ eintreten. Für den Fall, daß k Null wird, erhalten wir für das nunmehr „freie“ Elektron folgende Gleichung:

$$x = -\frac{\frac{e}{m}\mathfrak{E}_0}{4\pi^2\nu^2} \cos 2\pi\nu t. \tag{32}$$

Diese Formel hat eine grundlegende Bedeutung in der Theorie der Streuung der Röntgenstrahlen und im ganzen Problemkreis der Röntgenstrukturuntersuchungen. Gegenüber den sehr hohen Röntgenfrequenzen verhalten sich nämlich die gebundenen Elektronen der Materie in erster Näherung so, als ob sie frei wären. Deshalb können wir in diesem speziellen Fall Gleichung (32) anwenden.

§ 4. Die natürliche Breite der Spektrallinien

Aus unseren bisherigen Besprechungen folgt, daß jede Spektrallinie nur eine genau festgelegte Frequenz besitzt. Wir wissen aus experimentellen Erfahrungen, daß das nicht so ist. Bei entsprechenden Anregungsbedingungen sind zwar die Spektrallinien ziemlich scharf. Sie enthalten jedoch immer ein kleines Frequenzgebiet und nicht nur eine einzige Frequenz.

Anschaulich können wir die Ursache dieser Erscheinung auf folgendem Wege einsehen: Jedes Elektron wird nur während einer endlichen Zeitdauer Licht ausstrahlen, so lange nämlich, bis seine Energie aufgebraucht ist. Es wird also einen Wellenzug endlicher Länge aussenden. Ein solches Wellenpaket können wir aus Wellenzügen unendlicher Länge aufbauen, deren Frequenzen wenig differieren und zwischen denen wir die Phasenunterschiede so wählen, daß die Wellenzüge am Orte unseres ursprünglichen Wellenpakets sich gegenseitig verstärken, außerhalb dagegen vernichten. Die Phasendifferenzen sollen dort schon den Wert einer halben Wellenlänge erreichen. Mathematisch ausgedrückt müssen wir unser endliches Wellenpaket in eine Fouriersche Reihe zerlegen.

Wir wollen jetzt sehen, in welchem Maße sich die Frequenz infolge der endlichen Länge des Wellenpaketes ändert. Aus Gleichung (17) erhielten wir das Resultat, daß die Energie eines Oszillators während der Zeitdauer $\tau = 1/\gamma$ auf den e-ten Teil abnimmt. Die Amplitude wird – nach einem analogen Gedankengange nach Gleichung (19) – während der Zeit $t = 2/\gamma$ auf den e-ten Teil abnehmen. Aus Gleichung (20) folgt

$$\frac{1}{t} = \frac{\gamma}{2} = \frac{4\pi^2 \nu^2 e^2}{3 c^3 m}. \tag{33}$$

Wir nehmen an, daß in dem erwähnten endlichen Wellenzuge n Wellen enthalten sind. Die Länge des Wellenzuges sei $L = n\lambda$. Damit außerhalb des Wellenpaketes die unendlich ausgedehnten Wellenzüge sich durch Interferenz vernichten können, ist es notwendig, daß auch noch solche Frequenzen auftreten, die innerhalb der Länge L auch noch $n - 1$ oder $n + 1$ Wellen enthalten. Deren Wellenlängen mögen

$$\lambda_1 = \frac{L}{n-1} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{L}{n+1} \tag{34}$$

sein und ihre Frequenz, wenn wir mit c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnen,

$$\nu_1 = \frac{c(n-1)}{L} \quad \text{und} \quad \nu_2 = \frac{c(n+1)}{L}. \tag{35}$$

Wir erhalten also für die endliche Breite der Spektrallinien die Formel

$$\nu_2 - \nu = \nu - \nu_1 = \frac{\delta\nu}{2} = \frac{c}{L}. \tag{36}$$

$\frac{L}{c}$ ist die Zeit, in welcher unser Wellenpaket von dem schwingenden Elektron emittiert wird. Diese Zeitdauer können wir mit der früher berechneten Zeitdauer näherungsweise gleichsetzen, bei der die Amplitude der Schwingung auf den e-ten Teil abgenommen hat. Aus den Gleichungen (36) und (33) folgt

$$\delta\nu = 2\,\frac{c}{L} = \gamma \tag{37}$$

oder, wenn wir hier γ aus Gleichung (33) einsetzen,

$$\delta\nu \approx \frac{8\pi^2 \nu^2 e^2}{3 c^3 m}. \tag{38}$$

In diesem Maße verändert die Strahlungsdämpfung die Frequenz der Spektrallinien.

Eine ähnliche Wirkung kommt zustande, wenn die Gasatome miteinander zusammenstoßen und demzufolge die Lichtemission nur zwischen zwei Zusammenstößen ungestört ist. Es können auch die aufeinanderfolgenden Zusammenstöße den emittierten Wellenzug in einzelne Teile zerlegen. Mit Hilfe eines ganz analogen Gedankenganges können wir dafür die Verschmierung der

Spektrallinien berechnen. Es sei der Mittelwert der Zeitdauer zwischen zwei Zusammenstößen τ. Dann folgt für die Stoßverbreiterung:

$$\delta \nu' \approx \frac{1}{\tau}. \tag{39}$$

Diese zweite Ursache bedingt ebenso, daß die Spektrallinien nicht streng monochromatisch sind.

Bis jetzt haben wir ausschließlich von der Emission der Spektrallinien gesprochen; da jedoch die Absorption die Umkehrung dieser Erscheinung ist, so tritt aus denselben Ursachen eine endliche Breite auch bei den Absorptionslinien auf.

Viele andere Ursachen verursachen ebenfalls eine endliche Frequenzbreite der Spektrallinien. Abgesehen davon, daß viele Spektrallinien eine sogenannte Hyperfeinstruktur besitzen, die sich darin äußert, daß diese – mit Hilfe eines Spektroskops sehr großen Auflösungsvermögens untersucht – noch in mehrere eng benachbarte Linien aufspalten, können wir noch folgende Ursachen erwähnen: Die Gasatome bewegen sich nach der kinetischen Gastheorie sehr schnell hin und her, und diese Bewegung verursacht den sogenannten DOPPLER-effekt. Außerdem wirkt das elektrische Feld der einander nahe kommenden Atome oder Moleküle aufeinander, was einen kleinen STARKeffekt hervorruft. Dies zeigt sich dann ebenfalls in einer Verbreiterung der Spektrallinien. Diese Erscheinungen ermöglichen es in gewissen Fällen, daß wir aus ihnen auf den physikalischen Zustand des emittierenden oder absorbierenden Gases Schlüsse ziehen können. Durch die extreme Verbreiterung der Spektrallinien emittieren z.B. die Quecksilberhochdrucklampen schon ein ganz kontinuierliches Spektrum, was ihre praktische Anwendbarkeit wesentlich erhöht.

§ 5. Die Einwirkung eines konstanten magnetischen Feldes auf das schwingende Elektron

Betrachten wir zuerst folgenden speziellen Fall: Das Elektron soll infolge der Wirkung der quasielastischen Kraft eine Kreisbahn beschreiben, deren Ebene auf der Richtung des magnetischen Feldes senkrecht steht (Abb. 1). Die Entstehung der Kreisbahn können wir uns so vorstellen, daß wir zwei aufeinander senkrechte Schwingungen von gleicher Amplitude zusammensetzen, zwischen denen eine Phasendifferenz $\pi/2$ vorhanden ist. Die Konstante der quasielastischen Kraft bezeichnen wir wieder mit k^2. ν_0 sei die Frequenz der Schwingung (bzw. der Kreisbewegung). Aus der Gleichheit der Zentrifugal- und der Zentripetalkraft folgt

$$-k^2 \mathfrak{r} = m \omega_0^2 \mathfrak{r},$$

wobei $\omega_0 = 2\pi \nu_0$ die Winkelgeschwindigkeit bedeutet. Dann erhalten wir

$$-k^2 \mathfrak{r} = m 4\pi^2 \nu_0^2 \mathfrak{r} \tag{40}$$

(m = Elektronenmasse und $\mathfrak{r}$ = Radiusvektor). Wenn ein Magnetfeld der Stärke H einwirkt, so übt dies auf das sich bewegende Elektron die Kraft

$$\mathfrak{K} = \frac{e}{c}\,[\mathfrak{v}, \mathfrak{H}] \tag{41}$$

aus, wobei wir für die Geschwindigkeit des Elektrons einfach $2\pi\mathfrak{r}\,\nu$ setzen. Ergänzen wir Gleichung (40) durch Gleichung (41), so folgt

$$-k^2 = 4\pi^2\nu^2 m + \frac{e}{c}\,2\pi\,\nu H. \tag{42}$$

Wenn wir weiter die Bezeichnung

$$\omega_L = -\frac{e H}{2 m c} \tag{43}$$

einführen und außerdem berücksichtigen, daß aus Gleichung (40)

$$-k^2 = 4\pi^2\nu_0^2\,m \tag{44}$$

folgt, erhalten wir zur Berechnung von ν die Gleichung

$$4\pi^2(\nu^2 - \nu_0^2) - 4\pi\nu\,\omega_L = 0. \tag{45}$$

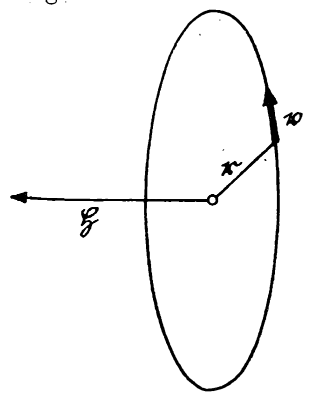


Abb. 1. Umlaufendes Elektron im Magnetfeld

Nehmen wir dazu an, daß das magnetische Feld so schwach ist, daß wir ω_L^2 neben ν_0^2 vernachlässigen können. Diese Vereinfachung ist – wie wir das bei der Besprechung der Atomtheorie sehen werden – immer möglich. Die Lösungen der Gleichung zweiten Grades (45) sind bei dieser vereinfachenden Annahme

$$\left.\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{\omega_L}{2\pi} + \nu_0 \\ &\text{und} \\ \nu_2 &= \frac{\omega_L}{2\pi} - \nu_0. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Die Frequenz des nach rechts umlaufenden Elektrons nimmt unter der Wirkung des Magnetfeldes um $\omega_L/2\pi$ zu, die des nach links umlaufenden dagegen um dieselbe Größe ab.

Wir müssen hier noch ein interessantes Paradoxon erwähnen. Wie wir wissen, lenkt ein magnetisches Feld eine sich bewegende Ladung immer senkrecht zu ihrer Bewegungsrichtung ab und kann demzufolge keine Arbeit leisten, d. h., die Energie der sich bewegenden Ladung ändert sich nicht. Demgegenüber ändert sich nach der obigen Rechnung die Umlaufsfrequenz des Elektrons, und dem entspricht eine Änderung der Energie. Die Ursache dieses scheinbaren Widerspruches ist folgende: Entweder müssen wir ein magnetisches Feld in der Nähe unseres umkreisenden Elektrons erzeugen oder – was physikalisch dasselbe ist – wir müssen das Elektron in ein magnetisches Feld bringen; in beiden Fällen wird das magnetische Feld im Gebiete des kreisenden Elektrons vom Werte

Null bis H zunehmen. Nach dem Induktionsgesetz muß infolge des Zusammenhanges

$$\operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{H}} \tag{47}$$

ein elektrisches Feld auftreten. Dieses wirkt beschleunigend auf das Elektron. Der Zuwachs an Energie rührt also von dieser Erscheinung her.

Nach dieser kleinen Abweichung wollen wir jetzt sehen, wie eine Spektrallinie in einem magnetischen Felde aufgespalten wird. Unsere bisherigen Berechnungen beziehen sich auf einen ganz speziellen Fall. Wir können jedoch daraus auch die Resultate für den allgemeinsten Fall erhalten. Betrachten wir zuerst eine Schwingung von einer beliebigen Richtung. Wir zerlegen diese zuerst in zwei Komponenten. Eine Komponente nehmen wir parallel zur Richtung des magnetischen Feldes an, die zweite stehe senkrecht dazu. Auf die Komponente entlang der Feldrichtung kann das magnetische Feld, da die Bewegung parallel zu den Kraftlinien erfolgt, überhaupt nicht einwirken. Die andere Komponente können wir in zwei Kreisbewegungen entgegengesetzten Richtungssinnes zerlegen. Auf beide wird das magnetische Feld auf die in diesem Paragraphen besprochene Weise einwirken. Die Aufspaltung der Spektrallinien in einem magnetischen Felde wurde zuerst von P. ZEEMAN beobachtet und von H. A. LORENTZ im wesentlichen nach dem hier besprochenen Gedankengange gedeutet. Beobachten wir parallel zu den magnetischen Kraftlinien, so werden wir das emittierte Licht, das von der zu den Kraftlinien parallel schwingenden Komponente stammt, überhaupt nicht bemerken. Dagegen werden wir das emittierte Licht der zwei Kreisbewegungen, in die wir die zur Feldrichtung senkrechte Komponente zerlegten, tatsächlich beobachten, und zwar als zwei entgegengesetzt zirkular polarisierte Komponenten, die von dem ursprünglichen Orte der Spektrallinie um die Beträge $\pm\frac{eH}{4\pi mc}$ verschoben sind. Das ist der sogenannte longitudinale ZEEMANeffekt (normales ZEEMANdublett). Ist dagegen das magnetische Feld senkrecht zur Beobachtungsrichtung, so sehen wir drei Komponenten. Die mittlere ist am Orte der ursprünglichen Linie und rührt von der Schwingungskomponente entlang der Kraftlinien her. Der elektrische Vektor der mittleren Komponente schwingt parallel zu den magnetischen Kraftlinien, die anderen zwei sind um $\pm\frac{eH}{4\pi mc}$ nach rechts und nach links verschoben. Da wir jedoch jetzt die Ausstrahlung in der Ebene der Kreisbewegung beobachten, so sehen wir zwei linear polarisierte Komponenten, deren elektrischer Vektor senkrecht zur Richtung des magnetischen Feldes schwingt. Das ist der sogenannte transversale ZEEMAN-effekt (normales ZEEMAN-Triplett). Aus der magnetischen Aufspaltung der Spektrallinien kann man die Größe $\frac{eH}{2mc}$ bestimmen. Bei bekannter Feldstärke H ist dann die spezifische Ladung des Elektrons e/m berechenbar, für die man innerhalb der experimentellen Fehler denselben Wert erhält wie aus der Ablenkung der Kathodenstrahlen.

Wir müssen jedoch bemerken, daß der hier besprochene sogenannte normale ZEEMANeffekt nur bei einem kleinen Teil der Spektrallinien, den Singulettlinien auftritt. Bei Multiplettlinien tritt eine viel verwickeltere Aufspaltung, der sogenannte anomale ZEEMANeffekt, auf. Die theoretische Deutung ist nur der Quantentheorie gelungen, wozu man den Begriff des sogenannten Elektronenspins (anschaulich: des sich um seine Achse drehenden Elektrons) einführen mußte. In einem sehr starken Magnetfeld geht der anomale ZEEMANeffekt in den normalen über. Diese Erscheinung nennt man nach ihrem Entdecker den PASCHEN-BACK-Effekt. Dieser Übergang ist nicht so zu verstehen, daß jede einzelne Linie des Multipletts mit zunehmender magnetischer Feldstärke statt der anomalen immer mehr die normale Aufspaltung aufweist, sondern so, daß die anomalen Komponenten des ganzen Multipletts sich mit zunehmender Feldstärke immer mehr so umordnen, daß das ganze Multiplett als solches die normale Aufspaltung zeigt. Im Falle des longitudinalen Effekts beobachten wir z. B. das Multiplett nicht an seinem ursprünglichen Ort, sondern alle Linien des Multipletts um den Betrag $\pm \frac{eH}{4\pi mc}$ nach rechts und nach links verschoben. Anders ausgedrückt ist im Gebiete des anomalen ZEEMANeffektes die magnetische Aufspaltung die feinere und die Multiplettaufspaltung die gröbere Struktur, im Gebiete des PASCHEN-BACK-Effektes ist dagegen umgekehrt der ZEEMANeffekt die gröbere und die Multiplettaufspaltung die feinere Struktur. Im letzteren Falle zeigt also das ganze Multiplett als solches den normalen ZEEMANeffekt.

Die mit Hilfe unserer Formel (43) definierte LAMORpräzession wurde von großer Bedeutung in den atomphysikalischen Forschungen der Gegenwart. Wie aus Formel (43) ersichtlich, kommt darin die Umlaufsgeschwindigkeit des Elektrons nicht vor; ein homogenes magnetisches Feld zwingt einem auf der Feldrichtung senkrechten Elektronenstrahl eine Kreisbahn auf. Die Umlaufsfrequenz

$$\frac{eH}{4\pi mc} \tag{48}$$

ist unabhängig von der Geschwindigkeit der Elektronen, insofern man keine relativistischen Effekte berücksichtigen muß, weil dann die im Nenner stehende Masse nicht mehr konstant ist. Auf diesem Prinzip beruht das Zyklotron von E. A. LAWRENCE, in dem ein magnetisches Feld elektrisch geladene Teilchen zwingt, sich auf einer Kreisbahn zu bewegen. Diese werden dann durch ein hochfrequentes Feld bei jedem Umlauf zweimal beschleunigt. Mit dieser Methode kann man geladene Teilchen, z. B. Protonen, Deuteronen, Heliumkerne, bis zu solchen Geschwindigkeiten beschleunigen, bei denen schon relativistische Effekte auftreten. In neuester Zeit ist es auch gelungen, die Beschleunigung noch weiter zu treiben.

§ 6. Das induzierte magnetische Moment

Nach dem im vorigen Paragraphen Besprochenen ist es evident, daß ein konstantes Magnetfeld die Frequenz eines umlaufenden Elektrons je nach dem Vorzeichen der Umlaufsrichtung um den Betrag

$$\pm \frac{eH}{4\pi mc} \tag{49}$$

ändert. Da wir ein umlaufendes Elektron immer als einen kleinen Ringstrom betrachten können, so gehört zu der geänderten Umlaufsfrequenz auch eine Änderung des magnetischen Momentes. Das äußere magnetische Feld induziert ein zusätzliches magnetisches Moment. Unser Ziel ist, dieses zu berechnen. Das magnetische Moment eines kleinen Ringstromes erhält man bekanntlich aus folgender Formel:

$$\mu' = \frac{if}{c}, \tag{50}$$

wobei i die Stromstärke, f die vom Strom umflossene Fläche und c die Lichtgeschwindigkeit bedeuten. i ist in dem vorliegenden Fall gleich dem Produkt der Elektronenladung und des in Gleichung (49) angegebenen Zuwachses der Frequenz. Setzen wir diese Werte in Gleichung (50) ein, so folgt

$$|\mu'| = \frac{e^2 H}{4\pi mc} \cdot \frac{r^2 \pi}{c} = \frac{e^2 H}{4mc^2} r^2. \tag{51}$$

Wir müssen noch das Vorzeichen von μ' festlegen, d. h. das Verhältnis der Vorzeichen der magnetischen Feldstärke H und von μ, weil alle übrigen in Gleichung (51) stehenden Größen positiv sind. Nehmen wir zuerst an, daß H und das vom ungestört umlaufenden Elektron verursachte magnetische Moment zueinander parallel sind. Dann läuft das Elektron – von der Richtung von H aus betrachtet – in der Richtung des Uhrzeigers herum. Die LARMORpräzession erfolgt in der entgegengesetzten Richtung, so daß μ' und H entgegengesetzte Vorzeichen besitzen. Wenn andererseits H und das vom umlaufenden Elektron verursachte Moment einander entgegengesetzt gerichtet sind, dann läuft das Elektron – in Richtung von H betrachtet – entgegengesetzt der Bewegung des Uhrzeigers. Die LARMORpräzession erhöht also die Umlaufsfrequenz. Im Endresultat sind die Vorzeichen von H und μ' einander entgegengesetzt. Ganz allgemein können wir also folgende Gleichung hinschreiben:

$$\mu' = -\frac{e^2 H}{4mc^2} r^2. \tag{52}$$

Das negative Vorzeichen in Gleichung (52) folgt übrigens auch aus einer Regel der Elektrotechnik, nach der das vom induzierten Strom verursachte Magnetfeld das induzierte Feld abzuschwächen trachtet.

Wenn der Atomkern nicht von einem, sondern von einer willkürlichen Zahl von Elektronen umkreist wird, so können wir unser Resultat auf diesen Fall unmittelbar verallgemeinern, weil im Verhältnis zum äußeren Feld die Felder

der induzierten Momente so außerordentlich klein sind, daß sie sich gegenseitig kaum beeinflussen. Durch Summation über alle r_i folgt

$$\mu = -\frac{e^2 H}{4 m c^2} \sum_i r_i^2. \tag{53}$$

Bis jetzt haben wir immer angenommen, daß die Ebenen der Elektronenbahnen auf der Feldrichtung senkrecht stehen. Diese einschränkende Annahme müssen wir noch beseitigen. Nehmen wir nun an, daß die Elektronenbahnen willkürliche Form und Orientierung im Verhältnis zur Feldrichtung haben. Aus der Formel

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \tag{54}$$

folgt für die Mittelwerte

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = \frac{1}{3} \overline{R^2}. \tag{55}$$

Nehmen wir an, daß das äußere magnetische Feld parallel zur Z-Achse orientiert ist, dann müssen wir in Gleichung (53) statt r_i^2 die Summe $x_i^2 + y_i^2$ einsetzen. Wenn wir außerdem noch annehmen, daß in 1 cm³ der Materie N Atome vorhanden sind, so folgt für das induzierte Moment

$$-\frac{e^2 H N}{4 m c^2} \sum_i \left(\overline{x_i^2 + y_i^2}\right)$$

oder mit Hilfe von Gleichung (55)

$$-\frac{e^2 H N}{6 m c^2} \sum_i R_i^2. \tag{56}$$

Die diamagnetische Suszeptibilität pro cm³ beträgt dann

$$\chi_N = -\frac{e^2 N}{6 m c^2} \sum_i \overline{R_i^2}. \tag{57}$$

Wir weisen darauf hin, daß in der Literatur sehr oft nicht die Suszeptibilität eines cm³, sondern die Suszeptibilität pro Grammatom angegeben wird. In diesem Falle muß man in Gleichung (57) statt N die Loschmidtsche Zahl einsetzen.

Bei der Besprechung des magnetischen Verhaltens der Materie werden wir uns noch ausführlich mit dem diamagnetischen Effekt beschäftigen. Da jedes Atom oder Molekül Elektronen enthält, ist notwendigerweise jede Stoffart diamagnetisch. Bei paramagnetischen Materialien verdeckt allein der viel größere Effekt entgegengesetzten Vorzeichens den Diamagnetismus.

§ 7. Der Einstein-de Haas- und der Barnett-Effekt

Nach dem ursprünglichen Gedankengange von Ampère werden die magnetischen Erscheinungen der Materie durch kleine „molekulare Kreisströme“ verursacht. Ampère hat über die physikalische Natur dieser molekularen Kreisströme keine weitere Hypothese eingeführt. Wir wissen auf Grund der

BOHRschen Theorie, daß solche kleinen Ringströme in der Form von umlaufenden Elektronen in der Materie tatsächlich vorhanden sind. Andererseits besitzen die Elektronen auch eine endliche Masse. Zu dem von ihnen verursachten magnetischen Moment gehört also auch ein (mechanisches) Impulsmoment. Unser Ziel ist, das Verhältnis dieser Momente zu berechnen.

Es bezeichne wieder e die Ladung des Elektrons und ν die Umlaufsfrequenz. Dann ist die Stärke des vom umlaufenden Elektron verursachten „Ringstromes" $i = e\nu$. Das magnetische Moment eines Ringstromes beträgt

$$M = \frac{i f}{c}. \tag{58}$$

Setzen wir in Gleichung (58) den oben gefundenen Wert von i ein, so haben wir

$$M = \frac{e}{c}\,\nu f. \tag{59}$$

Das Impulsmoment erhält man aus der Formel $J = m r^2 \dot{\varphi}$, wobei m die Masse des Elektrons, r den Radiusvektor und $\dot{\varphi}$ die Winkelgeschwindigkeit bedeuten. Andererseits ist $r^2 \dot{\varphi}$ die doppelte Flächengeschwindigkeit, die, wie wir wissen, bei Vorliegen einer Zentralbewegung konstant ist. Wenn wir mit τ die Zeitdauer eines ganzen Umlaufes bezeichnen, dann ist $\frac{d f}{d t} = \frac{f}{\tau} = f \nu$, wobei f den durch den Radiusvektor beschriebenen ganzen Flächeninhalt bezeichnet und $r^2 \dot{\varphi} = 2 \frac{d f}{d t} = 2 f \nu$ ist. Setzen wir diesen Wert in die Formel für J ein, so erhalten wir für das mechanische Moment folgenden Zusammenhang:

$$J = 2 m \nu f. \tag{60}$$

Aus den Gleichungen (60) und (59) folgt

$$\frac{J}{M} = \frac{2 m c}{e}. \tag{61}$$

Wir sehen, daß dieses Verhältnis nur von der Masse, der Ladung des Elektrons und von der Lichtgeschwindigkeit abhängt, dagegen von der Umlaufsfrequenz und der Größe des Flächeninhaltes der Elektronenbahn unabhängig ist. Eben deshalb ist die experimentelle Prüfung dieser Formel ein sehr interessantes Problem, das zuerst EINSTEIN und DE HAAS glückte. Gleichung (61) ist auch im Falle von einem aus mehreren Elektronen bestehenden System gültig. In diesem Falle muß man nur unter M und J die vektorielle Summe der von den einzelnen Elektronen herrührenden Vektoren verstehen. Die Richtungen von M und J sind selbstverständlich einander entgegengesetzt, weil die Elektronenladung e negativ ist.

Zur experimentellen Verifizierung von Gleichung (61) müssen wir folgende Umstände bedenken: Wenn wir die Magnetisierung eines Stück Eisens um ΔM ändern, so muß sich auch das mechanische Moment der umkreisenden Elektronen nach Gleichung (61) ändern, und zwar um den Betrag

$$\Delta J = \frac{2 m c}{e}\,\Delta M. \tag{62}$$

Da aber das Impulsmoment unseres ganzen Eisenstückes konstant sein muß, so müßte dieses als Rückstoß ein Impulsmoment der Größe ΔJ erhalten. Wenn wir die Magnetisierung des Eisenstückes ändern, so tritt infolge des Zusammenhanges $\frac{dJ}{dt} = \vartheta$ ein mechanisches Moment auf.

Experimentell verfährt man meist so, daß man ein dünnes Stäbchen aus Eisen mit kleinem Trägheitsmoment an einen Torsionsfaden hängt. Nehmen wir z. B. an, daß das Stäbchen zuerst in vertikaler Richtung magnetisiert ist. Bei einer momentanen Ummagnetisierung mit Hilfe eines plötzlich eingeschalteten sehr starken Magnetfeldes fängt das Stäbchen an, sich zu drehen, und zwar mit der Winkelgeschwindigkeit ω, die man aus

$$\Theta\,\omega = -\Delta J = -\frac{2\,m\,c}{e}\,\Delta M \tag{63}$$

erhält, wobei Θ das Trägheitsmoment des Stäbchens ist. Beobachten können wir leichter den maximalen Winkelausschlag aus der Energiegleichung

$$\frac{D\,\varphi^2_{\max}}{2} = \frac{\Theta\,\omega^2}{2}, \tag{64}$$

wobei D die Direktionskraft des Torsionsfadens darstellt. Mit Hilfe der Gleichungen (63) und (64) können wir den Zusammenhang (61) kontrollieren. Leider ist jedoch die auf diesem Wege erreichbare Schwingungsamplitude sehr klein. Einstein und de Haas haben deshalb eine „Resonanzmethode“ verwendet. Das Eisenstäbchen wurde dabei im Inneren eines Solenoides aufgehängt, das in einem Wechselstromkreis eingeschaltet war. Wenn die Frequenz des Wechselstromes mit der Torsionsfrequenz des mechanischen Systems übereinstimmte, so traten sehr starke Torsionsschwingungen auf. Einstein und de Haas haben durch sehr sorgfältige Messungen die Resonanzkurven eines solchen Systems aufgenommen. Sie erhielten das sehr überraschende Resultat, daß das Verhältnis der zwei Momente nicht mit dem in Gleichung (61) angegebenen theoretischen Wert übereinstimmt, sondern innerhalb der Meßgenauigkeit gerade die Hälfte beträgt. Auf experimentellem Wege erhält man

$$\frac{J}{M} \approx \frac{m\,c}{e} \tag{65}$$

statt Gleichung (61). Dasselbe Resultat erhielt auch Richardson.

Man kann aber auch die ganze Erscheinung umkehren. Wenn wir ein ursprünglich nicht magnetisiertes Eisenstäbchen um seine Achse drehen, so addiert sich zur Umlaufsfrequenz jedes Elektrons noch die Drehfrequenz des Stäbchens (vom ruhenden System betrachtet). Außer seiner ursprünglichen Bewegung vollführt jedes Elektron noch eine zusätzliche Umlaufsbewegung, und zwar jedes Elektron in demselben Drehsinn und derselben Frequenz. Daraus resultiert ein magnetisches Moment, das wir als (scheinbare) Magnetisierung des Stäbchens beobachten.

Zur Berechnung der Größe der zu erwartenden Erscheinung bedenken wir folgendes: Bringen wir unser Stäbchen in ein homogenes Magnetfeld der

Stärke H, dann addiert sich zu der Umlaufsfrequenz jedes Elektrons noch das $1/2\pi$-fache der LARMORfrequenz $\omega_L = eH/2mc$. Drehen wir unser Stäbchen mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_L/2\pi$ in entgegengesetzter Richtung, dann ist – von dem ruhenden System aus betrachtet – keine Änderung bezüglich der umkreisenden Elektronen eingetreten, d.h., die Wirkung des äußeren Feldes und die Drehung des Stäbchens heben sich gerade auf. Aus diesem Gedankengange folgt, daß bei Rotation eines ursprünglich magnetisch neutralen ferromagnetischen Stäbchens mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega/2\pi$ eine scheinbare Magnetisierung auftritt, die von der gleichen Größe ist, als ob wir das Stäbchen in ein Feld der Stärke

$$H = \frac{2mc}{e}\,\omega \tag{66}$$

gebracht hätten. Wir sehen, daß in Gleichung (66) die Größe

$$\frac{H}{\omega} = \frac{2mc}{e} \tag{67}$$

auftritt, die uns schon aus Gleichung (61) bekannt ist.

Die tatsächliche Durchführung des Experimentes gelang zuerst BARNETT. Der Versuch führte zu dem überraschenden Ergebnis, daß nicht der in Gleichung (67) oder (61) angegebene Wert, sondern nur seine Hälfte richtig ist.

Die Experimente von EINSTEIN, DE HAAS und RICHARDSON wie die von BARNETT führten zu dem Ergebnis, daß der für das Verhältnis des mechanischen und magnetischen Momentes hergeleitete theoretische Wert zwar qualitativ richtig ist, quantitativ sicher unrichtig sein muß, weil der auf der rechten Seite von Gleichung (61) stehende Zahlenfaktor 2 den experimentellen Resultaten nicht entspricht, d.h., daß das magnetische Moment das doppelte des theoretischen Wertes ist.

Dieses Paradoxon konnte man vorläufig nicht erklären. Erst die von GOUDSMIT und UHLENBECK 1925 aufgestellte Hypothese, nach der sich das Elektron außer seiner Umlaufsbewegung auch noch um seine Schwerpunktsachse dreht, beseitigte die bestehenden Diskrepanzen. Die Theorie der Spektren zeigte, daß diese Hypothese mit der Erfahrung vollkommen übereinstimmt, wenn man der Drehung des Elektrons um seine Achse ein mechanisches Moment der Größe

$$J = \frac{1}{2}\,\frac{h}{2\pi} \tag{68}$$

und ein magnetisches von der Größe

$$M = \frac{eh}{4\pi mc} \tag{68a}$$

zuordnet, wobei h die sogenannte PLANCKsche Konstante bedeutet:

$$[h = 6{,}6251 \cdot 10^{-27}\ \text{erg sec}\ (1954)].$$

Wenn wir jetzt das Verhältnis dieser zwei Momente berechnen, so folgt tatsächlich statt des früher gefundenen Wertes (61)

$$\frac{J}{M} = \frac{mc}{e}, \tag{69}$$

also das auf experimentellem Wege gefundene Verhältnis. Die Eigenschaft des Elektrons, daß es sich – anschaulich ausgedrückt – „um seine Achse dreht", nennen wir den „Spin" des Elektrons. Da aus den oben erwähnten Experimenten folgt, daß das Verhältnis des mechanischen und magnetischen Momentes innerhalb der Meßfehler nicht mit dem für das umlaufende Elektron hergeleiteten theoretischen Wert, sondern mit dem aus dem Spin folgenden Wert übereinstimmt, ziehen wir den Schluß, daß die ferromagnetischen Erscheinungen ausschließlich vom Elektronenspin verursacht werden.

Zum Schluß wollen wir darauf hinweisen, daß mit der Hypothese von UHLENBECK und GOUDSMIT die bei dem Verhältnis der beiden Momente gefundene Anomalie noch nicht eindeutig geklärt ist. Wenn wir ganz analog wie im Falle des umlaufenden Elektrons die Rechnungen für das sich drehende Elektron durchführen würden, so würden wir deshalb noch nicht die Gleichung (65) erhalten. (Die Rechnung wäre überhaupt nicht durchführbar, wenn wir nicht irgendeine ganz hypothetische „Ausdehnung" des Elektrons annehmen würden.) Die befriedigende Erklärung dieser Frage ist erst innerhalb der von DIRAC herrührenden Verallgemeinerung der Wellenmechanik gelungen.

In neuester Zeit berechneten SCHWINGER sowie KARPLUS und KROLL aus der Quantenelektrodynamik, daß das magnetische Moment des Elektrons nicht genau das doppelte des Impulsmomentes beträgt, sondern unbedeutend (2,002298 statt 2) größer ist; der von den genannten Verfassern berechnete Wert stimmt mit den neuesten Messungsergebnissen glänzend überein. Neben der sogenannten Lambshift (eine kleine Verschiebung des $2\,S_{1/2}$-Niveaus im Verhältnis zu dem des $2\,P_{1/2}$-Niveaus beim Wasserstoffatom) betrachtet man dieses Ergebnis als ersten tatsächlichen Erfolg der Quantenelektrodynamik.

DAS VERHALTEN DER MATERIE IM ELEKTRISCHEN FELD

§ 8. Das konstante Dipolmoment

Zwei Ladungen derselben Größe, aber entgegengesetzten Vorzeichens befinden sich in einer kleinen Entfernung l voneinander (Abb. 2). Wir bezeichnen die Größe dieser Ladungen mit $\pm e$. Die zwei Ladungen zusammen nennen wir einen Dipol, die Größe

$$e\,l = \mu \tag{70}$$

das Dipolmoment.

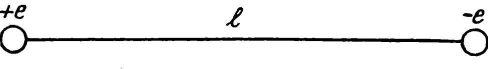


Abb. 2. Veranschaulichung eines Dipols

Dipole können bei Molekülen auftreten, die aus Ionen aufgebaut und nicht so symmetrisch beschaffen sind, daß die in den einzelnen Teilen auftretenden Dipole sich gegenseitig gerade aufheben. So haben z. B. zweiatomige Moleküle derselben Atomsorte kein Dipolmoment, ebenso wie CO_2 und C_2H_2 kein permanentes Dipolmoment besitzen, weil Kohlendioxyd wie Azetylen symmetrisch gebaute lineare Moleküle sind. Ähnlich haben CH_4 und CCl_4 kein Dipolmoment, weil sie Tetraederstruktur zeigen. Ein Dipolmoment besitzen die Halogen-Wasserstoffsäuren (HCl, HBr, HJ) und auch das Wassermolekül, weil das letztere nicht ein lineares Molekül ist, sondern die Konfiguration H—O—H am Sauerstoffatom einen stumpfen Winkel bildet usw.

Bei dem Salzsäuremolekül können wir das Entstehen des Dipolmomentes sehr anschaulich einsehen, weil ja die Salzsäure eine Ionenverbindung ist, deren Molekül aus einem negativen Cl- und einem positiven H-Ion (Proton) besteht. Nach den Messungen beträgt das Dipolmoment des HCl $1{,}03 \cdot 10^{-18}$ el. stat. Einheiten. Im Zusammenhang damit können wir einen interessanten Vergleich machen. Aus dem Bandenspektrum des HCl können wir nämlich die Kerndistanz (die Entfernung der Mittelpunkte der Cl- und der H-Ionen) berechnen und erhalten dafür $1{,}272 \cdot 10^{-8}$ cm. Da andererseits die Elektronenladung $4{,}8 \cdot 10^{-10}$ el. stat. Einheiten beträgt, so würden wir durch Multiplikation dieser zwei Zahlen $6{,}11 \cdot 10^{-18}$ el. stat. Einheiten für das Dipolmoment erhalten. Die Diskrepanz der obigen Werte für das Dipolmoment liegt darin begründet, daß die Ladung des positiven H-Ions (des Protons) eine Anziehungskraft auf die lockere Elektronenwolke des negativen Cl-Ions ausübt und demzufolge den unter Annahme vollkommen starrer Ionen berechneten Wert des Dipolmomentes sehr stark herabsetzt. Man bezeichnet die Erscheinung der Ladungsverschiebung mit dem Namen „Polarisation".

Ganz ähnliche Ursachen hat die Tatsache, daß die Dipolmomente der Halogen-Wasserstoffsäuren HBr und HJ noch kleiner sind (HBr $0{,}78 \cdot 10^{-18}$ und HJ $0{,}38 \cdot 10^{-18}$ el. stat. Einheiten). Dies ist um so auffallender, weil mit zunehmendem Atomgewicht die Radien der Halogenionen größer werden, so daß wir eigentlich erwarten müßten, daß das Dipolmoment in dieser Reihe nicht ab- sondern zunehmen sollte. Aber mit zunehmenden Atomradien wächst auch die Polarisierbarkeit, und diese überkompensiert die erwähnte Erscheinung.

Das Dipolmoment von zweiatomigen Molekülen ist meistens klein. So beträgt z. B. das Dipolmoment des CO-Moleküls nur ungefähr $0{,}1 \cdot 10^{-18}$ el. stat. Einheiten, was dafür spricht, daß bei diesen Verbindungen typische Ionenbindung selten ist. (Es liegt meistens ein starker Übergang zur homöopolaren Bindung vor.) Bei mehratomigen Molekülen kommen dagegen auch recht große Dipolmomente vor, so z. B. beim Acetaldehyd (CH_3CHO) $2{,}72 \cdot 10^{-18}$ el. stat. Einheiten, beim Acetonitril (CH_3CN) $3{,}4 \cdot 10^{-18}$, beim Äthylchlorid (C_2H_5Cl) $2{,}06 \cdot 10^{-18}$, beim Äthylenchlorid ($ClH_2C{-}CH_2Cl$) $1{,}75 \cdot 10^{-18}$, beim Äthylmethylketon ($CH_3 \cdot CO \cdot C_2H_5$) $2{,}79 \cdot 10^{-18}$ el. stat. Einheiten usw.

Die Messung des Dipolmomentes ist ein wichtiges Hilfsmittel zur Strukturbestimmung der Moleküle. Sehr oft kann man auf Grund der Tatsache, ob ein Molekül ein Dipolmoment besitzt oder nicht, zwischen zwei sonst für möglich erscheinende Strukturen entscheiden. Ein Dipol stellt sich selbstverständlich

in die Richtung des elektrischen Feldes ein. Denken wir aber deshalb nicht, daß die Messung einfach so durchführbar ist, daß wir z. B. ein bestimmtes Gasvolumen in ein elektrisches Feld bringen, danach das entstandene Dipolmoment messen, welches wir dann durch die Zahl der darin enthaltenen Moleküle dividieren. Das elektrische Feld versucht, den Dipol jedes Moleküls in seine eigene Richtung einzustellen. Entgegen wirkt die thermische Bewegung der Moleküle, so daß sich aus der gemeinsamen Wirkung des elektrischen Feldes und der thermischen Bewegung ein dynamisches Gleichgewicht einstellt.

Das Potential des Dipols erhalten wir, wenn wir die algebraische Summe der Potentiale der zwei benachbarten Ladungen bilden:

$$\varphi = \frac{e}{r_1} - \frac{e}{r_2}. \tag{71}$$

Außerdem müssen wir berücksichtigen, daß die Entfernung der zwei Ladungen eine gerichtete Größe ist, die wir als einen Vektor ($\mathfrak{l}$) darstellen müssen. In Gleichung (71) können wir das zweite Glied in eine Reihe entwickeln:

$$\varphi = \frac{e}{r_1} - \frac{e}{r_1} - e\left(\mathfrak{l}, \operatorname{grad}_a \frac{1}{r}\right) + \cdots, \tag{72}$$

wobei der Index a bedeutet, daß man im Anfangspunkt differenzieren muß. Bezeichnen wir das Dipolmoment jetzt als Vektor mit $\mathfrak{p} = e\mathfrak{l}$, dann können wir das Gesamtpotential in einer zur Länge des Dipols großen Entfernung schreiben:

$$\varphi = -\left(\mathfrak{p}, \operatorname{grad}_a \frac{1}{r}\right). \tag{73}$$

Unsere Formel wird streng richtig, wenn wir folgenden Grenzübergang machen: Nehmen wir an, daß die Größe der zwei Ladungen über alle Grenzen zunimmt, ihre Entfernung dagegen abnimmt, und zwar so, daß die früher definierte Größe dabei konstant bleibt, dann erhalten wir das Potential eines mathematischen Dipols. Es ist wesentlich, daß man die Emission der meisten Spektrallinien als elektromagnetische Strahlung eines schwingenden Dipols beschreiben kann.

Abb. 3. Ein Quadrupol

Auf ähnliche Art kann man auch Pole höherer Ordnung (Multipole) definieren. So liefern z. B. vier Ladungen, von denen je zwei Pole Dipole derselben Größe bilden und die so orientiert sind, daß sie gegeneinander wirken, einen Quadrupol (Abb. 3). Ähnlich können wir aus acht Ladungen einen Oktupol konstruieren usw. Im Atomkern kommen z. B. Quadrupolübergänge sehr häufig bei der Emission der γ-Strahlung vor. Auch im sichtbaren Teil des Spektrums kann die Emission mit Hilfe eines Quadrupolüberganges erfolgen, wenn die Ausstrahlung in Form eines Dipolüberganges nicht möglich (verboten) ist. Die Potentiale all dieser Pole höherer Ordnung können wir analog dazu angeben, wie wir das im Falle eines Dipoles getan haben.

§ 9. Die Polarisierbarkeit

Im vorigen Paragraphen haben wir den Fall besprochen, bei dem fertige Dipole in der Materie enthalten sind, auf die das elektrische Feld so einwirkt, daß es die Dipole in seine Richtung einzustellen trachtet. Da wir jedoch wissen, daß jede Art Materie aus elektrisch geladenen Teilchen aufgebaut ist, so muß das elektrische Feld auch dann einwirken, wenn fertige Dipole nicht vorhanden sind. Das ist die Erscheinung der sogenannten Verschiebungspolarisation, die darin besteht, daß das äußere Feld die Ladungen verschiedenen Vorzeichens in entgegengesetzte Richtungen fortzubewegen versucht. In einer ursprünglich keine Dipole enthaltenden Materie werden solche Dipole erzeugt. Bezeichnen wir das auf diese Weise in einem Atom oder Ion unter der Wirkung der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ induzierte Dipolmoment mit $\mathfrak{p}$, dann nennen wir die mit Hilfe der Gleichung

$$\mathfrak{p} = \alpha \mathfrak{E} \qquad (74)$$

definierte Größe α die Polarisierbarkeit des Atoms oder Ions. Unter gewissen vereinfachenden Annahmen kann man die Polarisierbarkeit auch theoretisch berechnen, so z. B. nach dem BOHRschen Atommodell die Polarisierbarkeit eines Systems, das aus einem Atomkern und den diesen umkreisenden Elektronen besteht. Alle diese Deutungen sind aber nur mehr von historischem Interesse. Die jetzt bekannten Polarisierbarkeiten entnehmen wir bekannten Meßergebnissen. In der folgenden Tabelle sind die Polarisierbarkeiten der (edelgasartigen) negativen Halogenionen, der positiven Alkaliionen und der neutralen Edelgasatome zusammengestellt.

Tabelle der Polarisierbarkeiten in Einheiten 10^{-24} cm^3

F^-	Cl^-	Br^-	J^-	Li^+	Na^+	K^+	Rb^+	Cs^+
0,99	3,05	4,17	6,28	0,075	0,21	0,87	1,81	2,79

He	Ne	A	Kr	X
0,202	0,392	1,629	2,46	4,00

Aus unserer Gleichung (74) können wir leicht herleiten, daß die Dimension der Polarisierbarkeit $[\alpha] = \text{cm}^3$ ist. Außerdem kann man aus den mitgeteilten Zahlenangaben ersehen, daß die Polarisierbarkeit der negativen Ionen besonders groß ist, was darin seine Erklärung findet, daß die „lockere" Elektronenwolke viel leichter deformierbar ist.

In Kristallgittern werden sich die Polarisierbarkeiten der benachbarten positiven und negativen Ionen infolge der teilweisen Überdeckung ihrer Elektronenwolken beeinflussen. Diesen Umstand erkannten schon FAJÀNS und JOSS. Neuerdings wurde wegen dieser Erscheinung von OPPENHEIMER und seinen Mitarbeitern eine neue, von der obigen etwas abweichende Tabelle für die Polarisierbarkeit der Ionen in Alkalihalogenidgittern angegeben.

Wir müssen hinzufügen, daß unsere Gleichung (74) nur dann streng richtig ist, wenn das elektrische Feld innerhalb des Atoms oder Ions als konstant betrachtet werden kann; im Falle eines äußeren Feldes ist dies meist der Fall. Wenn jedoch das elektrische Feld der Ionen die benachbarten Atome oder Ionen polarisiert, so sind die Verhältnisse wesentlich anders, weil ja die Entfernung dieses Ions von dem Atom, welches es polarisiert, von derselben Größenordnung ist wie die ganze Ausdehnung des Atoms; das Feld des Ions wird also innerhalb des Atoms schon stark inhomogen sein. In einer gewissen Näherung ist das Verfahren noch erlaubt, daß man in Gleichung (74) die im Mittelpunkte des Atoms auftretende elektrische Feldstärke einsetzt.

§ 10. Der tensorielle Charakter der Polarisierbarkeit der Moleküle

Bis jetzt haben wir die Polarisierbarkeit als eine skalare Größe betrachtet. Im Falle von Atomen oder Ionen ist das auch tatsächlich richtig. Wenn jedoch von Molekülen die Rede ist, so werden sich (da nur in Ausnahmefällen Kugelsymmetrie vorliegt) zwischen den in verschiedenen Richtungen genommenen Polarisierbarkeiten Unterschiede zeigen. Betrachten wir ein beliebiges Molekül und zerlegen das äußere Feld in seine Komponenten entlang der drei Achsen eines molekülgebundenen Koordinatensystems. Alle drei Komponenten werden das Molekül polarisieren. Wir könnten annehmen, daß wir jetzt drei Polarisierbarkeiten einführen müssen. Dieser Standpunkt ist jedoch unrichtig, weil jetzt das induzierte Moment im allgemeinen nicht in die Richtung der Komponente der induzierenden Feldstärke zeigen wird. Dieses induzierte Moment können wir wieder nach den Achsen des molekülgebundenen Koordinatensystems zerlegen. Wenn wir die in Richtung einer Achse des moleküleigenen Koordinatensystems auftretende Feldstärke betrachten, so induziert diese im allgemeinen Falle Momente in den Richtungen aller drei Achsen: Zur Definition der Polarisierbarkeit benötigen wir jetzt drei Konstanten. Da weiter das elektrische Feld auch drei Komponenten besitzt, so beträgt die Zahl der notwendigen Konstanten gerade neun. Das bedeutet, anders ausgedrückt, daß die Polarisierbarkeit eines Moleküls ein Tensor zweiter Ordnung ist. Bezeichnen wir die Komponenten dieses Tensors mit a_{ik}. Der erste Index bezieht sich auf die Achse des molekülfesten Koordinatensystems, in dessen Richtung wir die Komponente der Feldstärke legen. Der zweite Index bezeichnet die Achse, auf welcher wir das induzierte Moment suchen. Alle Komponenten veranschaulicht das folgende Schema:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}. \end{matrix}$$

Es ist ganz allgemein möglich, dieses Polarisationsellipsoid auf Hauptachsen zu transformieren, also mit Hilfe einer Drehung des Koordinatensystems zu erreichen, daß in unserer Tabelle nur die diagonalen Glieder nicht verschwin-

den. Der strenge Beweis dieser Möglichkeit würde hier zu weit führen. Wir bemerken deshalb nur, daß bei Molekülen, die kein optisches Drehvermögen besitzen, immer $a_{ik} = a_{ki}$ ist. Der Tensor wird dann symmetrisch. Zur Hauptachsentransformation ist nur das Verschwinden von drei Größen notwendig, und da die Lage eines Koordinatensystems ebenfalls durch drei Daten (die drei EULERschen Winkel) festgelegt wird, so ist diese Bedingung erfüllbar. Wir können das Polarisationsellipsoid des Moleküls durch drei Zahlenangaben beschreiben. Es ist wesentlich, daß wir über drei verschiedene meßbare Erscheinungen verfügen, die von den Polarisierbarkeiten des Moleküls abhängen. Es sind dies der Brechungsindex [3. Teil, § 15, (134a)], die Depolarisation bei der molekularen Streuung des Lichtes [4. Teil, § 33, (404)] und die KERRkonstante [3. Teil, § 19, (178)]. Aus diesen drei Meßergebnissen kann das Polarisationsellipsoid eines Moleküls berechnet werden. Das Verfahren dient zur Strukturbestimmung der Moleküle, zumal es noch den weiteren Vorteil besitzt, daß hier die Resultate der klassischen Theorie richtig sind.

Die Polarisierbarkeit ist selbstverständlich nicht unabhängig davon, ob das elektrische Feld konstant ist oder ob es oszilliert. Besonders zwei Fälle sind wichtig: die Polarisierbarkeit in statischen und in schnell veränderlichen Feldern, deren Frequenz in das optische Gebiet fällt. Bei Atomen und Ionen ist dieser Unterschied meistens bedeutungslos (er wäre nur in der Nähe einer Spektrallinie von Bedeutung). Bei Molekülen ist er dagegen sehr wichtig, weil die Elektronen den schnellen Lichtschwingungen folgen können, die Ionen jedoch nicht. Zur statischen Polarisierbarkeit tritt die Erscheinung hinzu, daß das äußere Feld zwei Ionen verschiedener Ladung auseinanderzuziehen trachtet. Für die optische Polarisierbarkeit sind dagegen nur die Verschiebungen der Elektronen verantwortlich. Die Erfahrung beweist jedoch, daß meist sowohl die statische als auch die optische Polarisierbarkeit simultan auf Hauptachsen transformierbar sind.

Als einfachen Fall zur Veranschaulichung der hier auftretenden Verhältnisse erwähnen wir das Salzsäuremolekül. Die Hauptachsentransformation der Polarisierbarkeit ist hier unmittelbar evident, weil eine Achse nur die Symmetrieachse des Moleküls (die H^+- und die Cl^--Ionen verbindende Gerade) sein kann. Die Orientierung der anderen beiden Achsen kann in der zur Symmetrieachse senkrechten Ebene ganz beliebig sein, weil es in dieser Ebene keine ausgezeichnete Richtung gibt. Bezeichnen wir mit X die Symmetrieachse, dann erhalten wir für die Komponenten der optischen Polarisierbarkeit $b_1 = 3{,}13 \cdot 10^{-24}$ und $b_2 = b_3 = 2{,}39 \cdot 10^{-24}$ cm^3. Nach einem allgemein üblichen Gebrauch bezeichnen wir die Komponenten der auf Hauptachsen transformierten Polarisierbarkeit nur mit einem Index. Für die Komponenten der statischen Polarisierbarkeit – die hier selbstverständlich ebenso auf Hauptachsen transformiert sind – erhalten wir die Werte $a_1 = 4{,}42 \cdot 10^{-24}$ und $a_2 = a_3 = 2{,}39 \cdot 10^{-24}$ cm^3. Wir sehen, daß nur die Komponenten entlang der Molekülachse voneinander verschieden sind. Dies kommt daher, daß zur statischen Polarisierbarkeit die im elektrischen Feld auftretende Verschiebung der Elektronen (im Verhältnis zum Atomkern) und auch das Auseinanderrücken der zwei Ionen entgegengesetzten Vorzeichens einen Beitrag liefert. Zur optischen Polarisierbarkeit trägt dagegen

nur die erstere Erscheinung bei, weil nur die Elektronen dem schnell veränderlichen Felde der Lichtwellen folgen können, die schweren Kerne dagegen nicht. Die zur Achse senkrechten Polarisierbarkeiten sind deshalb in beiden Fällen miteinander gleich, weil bei ihnen nur die Verschiebung der Elektronen eine Rolle spielt.

Ein dreiachsiges Polarisationsellipsoid besitzt z. B. das Schwefelwasserstoff-(H_2S)-Molekül, das bekanntlich nicht linear, sondern gewinkelt ist. Die Daten der Hauptachsenpolarisierbarkeiten sind $b_1 = 4{,}21$, $b_2 = 3{,}21$ und $b_3 = 3{,}93 \cdot 10^{-24}$ cm³. Ganz ähnlich sind die Verhältnisse beim Schwefeldioxyd (SO_2), das ebenfalls ein nichtlineares Molekül ist und dessen Daten 5,49, 2,72 und $3{,}49 \cdot 10^{-24}$ cm³ sind. Alle hier mitgeteilten Zahlenangaben sind aus den Meßwerten berechnet, die auf den drei erwähnten Erscheinungen basieren. Es sei noch erwähnt, daß diese Methode zur Molekülstrukturbestimmung von H. A. Stuart und seinen Mitarbeitern ausgearbeitet wurde.

§ 11. Die Energie eines Dipols im elektrischen Feld

Betrachten wir ein Molekül mit konstantem Dipolmoment im elektrischen Feld, so erhalten wir seine Energie dadurch, daß wir die Energien beider Ladungen (aus denen der Dipol besteht) algebraisch addieren. Wir nehmen an, daß das Feld homogen und parallel zur Z-Achse orientiert ist. Wenn $\mathfrak{E}$ die Feldstärke bedeutet, so ist das Potential $-E \cdot z$. Die Koordinaten der zwei Ladungen unseres Dipols seien z_1 und z_2. Dann ist die potentielle Energie im elektrischen Feld

$$V(\vartheta) = eE(-z_1 + z_2) = -eEl\cos\vartheta = -E\mu\cos\vartheta, \tag{75}$$

wobei ϑ den Winkel bedeutet, den die Achse unseres Dipols mit der Feldrichtung einschließt. Dabei ist $z_1 - z_2 = l\cos\vartheta$ und $\mu = el$ das Dipolmoment.

Die potentielle Energie eines induzierten Dipols ist gleich dem Produkte aus Feldstärke und Dipolmoment. Wir können vorerst ansetzen

$$V_1 = -\alpha E \cdot E = -\alpha E^2. \tag{76}$$

(Die Richtung spielt hier keine Rolle, weil das induzierte Dipolmoment, wenn α eine skalare Größe ist, immer parallel zur Feldrichtung orientiert ist.)

Andererseits muß aber noch eine Arbeit geleistet werden, damit das Teilchen (Atom, Ion) polarisiert wird. Die ursprünglich zusammenfallenden Schwerpunkte der zwei Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens müssen auseinandergezogen werden. Berechnen wir die Arbeit, welche das elektrische Feld leistet, wenn es von Null bis zu einer gegebenen Größe E zunimmt. Wir wissen, daß die elektrische Arbeit bei der Verschiebung einer Ladung e um die Strecke Δz im homogenen Feld $eE'\Delta z$ ist. $e\Delta z$ ist die Vergrößerung des induzierten Dipols bei zunehmendem Feld. Diesem entspricht das induzierte Dipolmoment $\alpha\Delta E'$.

Die letztere Größe müssen wir noch mit E' multiplizieren und von Null bis zu einem gegebenen Wert E integrieren:

$$V_2 = \int_0^E \alpha E' dE' = \frac{1}{2} \alpha E^2. \tag{77}$$

Aus den Gleichungen (76) und (77) erhalten wir für die gesamte potentielle Energie eines induzierten Dipols:

$$V_1 + V_2 = -\alpha E^2 + \frac{1}{2} \alpha E^2 = -\frac{1}{2} \alpha E^2. \tag{78}$$

Verwickelter sind die Verhältnisse bei Molekülen, bei denen die Polarisierbarkeit ein Tensor ist, und bei anisotropen Kristallen. Von der Behandlung der dort auftretenden Komplikationen wollen wir hier absehen.

§ 12. Das LORENTZsche innere Feld

Bis jetzt haben wir immer angenommen, daß das Teilchen (Atom, Molekül, Ion usw.), auf das das elektrische Feld einwirkt, allein vorhanden ist. Dieses Verfahren ist bei Gasen tatsächlich erlaubt, weil bei ihnen die gegenseitige Entfernung der Moleküle meist so groß ist, daß keine Wechselwirkungserscheinungen zu berücksichtigen sind. Ganz anders sind die Verhältnisse im Inneren der Flüssigkeiten oder festen Körper. Bei diesen sind die Teilchen so dicht beisammen, daß wir nicht allein die Tatsache berücksichtigen müssen, daß z.B. das äußere elektrische Feld jedes Teilchen polarisiert. Hier können die Felder der induzierten Dipole auch auf ihre Nachbarn einwirken. Es tritt zum äußeren Felde noch ein von den benachbarten Teilchen herrührendes Feld hinzu, das wir LORENTZsches inneres Feld nennen. Dieses „innere“ Feld wollen wir berechnen.

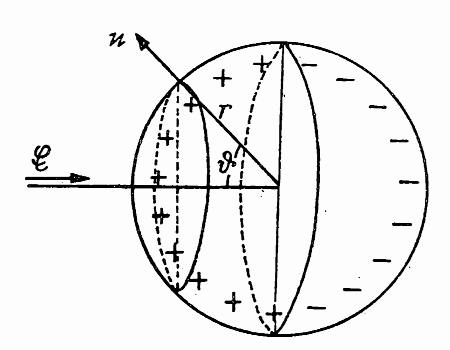


Abb. 4. Zur Berechnung des LORENTZschen inneren Feldes

Wir umgeben unser im Inneren eines Dielektrikums sich befindendes Teilchen mit einer Kugelfläche, dessen Radius jedoch so groß sein soll, daß darin noch sehr viele Moleküle enthalten sind (Abb. 4). Außerhalb dieser Kugelfläche wird das Dielektrikum selbstverständlich keine elektrische Wirkung auf unser Molekül ausüben, weil im Inneren eines Dielektrikums keine freien Ladungen vorhanden sind. Freie Ladungen werden jedoch an der Kugeloberfläche erscheinen. Die elektrostatische Wirkung der freien Ladungen an der Kugeloberfläche im Mittelpunkt der Kugel erhalten wir folgendermaßen: Die Polari-

sation im Dielektrikum sei $\mathfrak{P}$, eine (numerisch) ebenso große freie Ladung wird an einer zu $\mathfrak{P}$ senkrecht liegenden Oberflächeneinheit des Dielektrikums auftreten. Aus unserer Abbildung (4) können wir ersehen, daß dann auf einer Oberflächeneinheit der Kugel, deren Flächennormale den Winkel ϑ mit der Richtung von $\mathfrak{E}$ bildet, die Ladung $\mathfrak{P}\cos\vartheta$ vorhanden ist, also auf dem ganzen dazu gehörenden Kreisring von der Breite der Längeneinheit die Ladung $2\pi r\mathfrak{P}\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta$. Das elektrische Feld der freien Ladung auf der Flächeneinheit ist im Mittelpunkt der Kugel $\mathfrak{P}\cos\vartheta/r^2$. Wenn wir dieses Feld noch auf die Richtung von $\mathfrak{P}$ projizieren, so folgt $\mathfrak{P}\cos^2\vartheta/r^2$. Das Feld des ganzen Kreisringes ist im Mittelpunkt der Kugel $2\pi r\mathfrak{P}\cos^2\vartheta\sin\vartheta/r^2$. Diese Größe müssen wir mit $r\,d\vartheta$ multiplizieren und über die vordere halbe Kugelfläche integrieren. Wir erhalten

$$2\pi\mathfrak{P}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta = 2\pi\frac{\mathfrak{P}}{3}. \tag{79}$$

Denselben Wert liefert auch die hintere halbe Kugelfläche, so daß im Endresultat ein Feld der Größe

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E} + \frac{4\pi}{3}\mathfrak{P} \tag{80}$$

auf unser im Inneren des Dielektrikums sich befindendes Molekül einwirken wird.

Bis jetzt haben wir die Wirkung der Moleküle vernachlässigt, die innerhalb unserer Kugelfläche liegen. Inwiefern ist dies gerechtfertigt? Nehmen wir an, daß die Moleküle im Inneren der Kugel eine symmetrische „kristallgitterartige" Anordnung aufweisen, dann kann man ihre Wirkung tatsächlich vernachlässigen, weil wir zu jedem einzelnen Molekül ein anderes finden, dessen Wirkung zu dem des vorigen gleich, jedoch von entgegengesetztem Vorzeichen ist. Wie wir wissen, besitzen die meisten festen Stoffe eine kristalline Struktur. Wenn dagegen die Anordnung der Moleküle im Inneren der Kugel nicht geordnet, sondern ganz unregelmäßig ist, so können wir nur aussagen, daß ihre Wirkung im Mittelpunkt der Kugel – wenn wir über sehr viele Fälle mitteln – sich gerade aufhebt. Glasartige Stoffe, Flüssigkeiten usw. verhalten sich derartig. Wir können auch in diesen Fällen unsere Formel (80) anwenden. Wir müssen jedoch bedenken, daß wir unser Molekül im Mittelpunkt der Kugel nicht als punktförmig annehmen können, weil es eine endliche Ausdehnung besitzt. Aus all diesen Tatsachen können wir ersehen, daß das Problem des LORENTZschen inneren Feldes bei seiner scheinbaren Einfachheit doch ein recht verwickeltes Problem ist, das noch nicht als ganz geklärt betrachtet werden kann. In letzter Zeit ist dieses Problem im Zusammenhang mit der Theorie der sogenannten ferroelektrischen Erscheinung bedeutungsvoll geworden. Von Theoretikern wurde deshalb dieses innere Feld für sehr verschiedene Materialien sorgfältig berechnet. Aus diesen Arbeiten folgt, daß unsere elementare Formel (80) bei der kubisch-flächenzentrierten Anordnung der Bausteine (im regulären Kristallsystem) die wirklichen Verhältnisse am besten beschreibt.

Für die vorher besprochenen Verhältnisse können wir noch eine sehr anschauliche Herleitung dafür angeben, daß sich ein Dielektrikum zwischen den Platten eines ebenen Kondensators befindet. Die Potentialdifferenz zwischen den Platten dieses Kondensators sei V. Die wahre Ladungsdichte an den Platten erhalten wir aus der Formel

$$4\pi\sigma = \frac{V}{d} + 4\pi P, \tag{81}$$

wobei d den Plattenabstand des Kondensators und P die Polarisation des Dielektrikums bedeuten. Zur Herleitung von Gleichung (81) dividieren wir zuerst durch 4π, dann folgt

$$\sigma = \frac{V}{4\pi d} + P. \tag{82}$$

Da die Kapazität des ebenen Kondensators

$$C = \frac{\varepsilon F}{4\pi d} \tag{83}$$

(F = Fläche der Platten und ε = Dielektrizitätskonstante) und nach der Definition der Kapazität

$$C = \frac{Q}{V} \tag{84}$$

ist, wobei wir mit Q die Ladung des Kondensators bezeichnen, so folgt aus den Gleichungen (83) und (84)

$$\frac{V}{4\pi d} = \frac{Q}{F} \cdot \frac{1}{\varepsilon}. \tag{85}$$

Diese Größe ist der ε-te Teil der auf die Flächeneinheit des ebenen Kondensators fallenden Ladung. Wenn kein Dielektrikum vorhanden wäre, so würde die Flächendichte gerade

$$\frac{Q}{F} = \sigma \tag{86}$$

sein. Nur die an der Grenzfläche des Dielektrikums infolge der Polarisation auftretende scheinbare Ladung, die gleich P ist, schwächt diese Ladung auf ihren ε-ten Teil ab. Wenn wir die infolge der Polarisation auftretende scheinbare Ladungsdichte mit entgegengesetztem Vorzeichen zu Gleichung (85) addieren, so erhalten wir gerade Gleichung (86), also

$$\sigma = \frac{Q}{F} = \frac{Q}{F} \cdot \frac{1}{\varepsilon} + P = \frac{V}{4\pi d} + P. \tag{87}$$

Damit haben wir Gleichung (82) hergeleitet.

Da $V/d = E$ gilt, so können wir Gleichung (81) noch folgendermaßen schreiben:

$$4\pi\sigma = E + 4\pi P. \tag{88}$$

Ladungen treten auch an den Endflächen des Dielektrikums auf. Erstens erscheinen an den Endflächen, welche an den Kondensatorplatten anliegen, die

scheinbaren Ladungen $-P$ und $+P$, welche von der Polarisation des Dielektrikums herrühren und in dem Dielektrikum ein Feld von der Größe $-4\pi P$ verursachen. Zweitens müssen wir die scheinbaren Ladungen an der unser Molekül umgebenden Kugelfläche berücksichtigen, welche ein Feld von der Größe $\frac{4\pi}{3} P$ im Kugelmittelpunkt verursachen. Also erzeugen die an den Endflächen des Dielektrikums auftretenden scheinbaren Ladungen das Feld

$$F_2 = -4\pi P + \frac{4\pi}{3} P \tag{89}$$

am Orte des Moleküls. Nach Gleichung (88) erzeugt die an den Kondensatorplatten sich befindende Ladung ein Feld von der Größe

$$F_1 = 4\pi\sigma = E + 4\pi P. \tag{90}$$

Also tritt am Orte unseres Moleküls das elektrische Feld

$$F = F_1 + F_2 = E + \frac{4\pi}{3} P \tag{91}$$

auf. Wir erhalten genau dasselbe Resultat wie in unserer Formel (80), nur mit dem Unterschied, daß wir die skalare Schreibweise benutzen, weil wir zur Herleitung des Resultates den Plattenkondensator verwenden, bei dem die Richtung des Feldes (und der Polarisation) zu den Platten senkrecht steht.

Wie wir erwähnten, ist die Berücksichtigung des Umstandes, daß das innere Feld nicht mit dem äußeren Feld $\mathfrak{E}$ übereinstimmt, sondern nach Gleichung (80) bzw. (91) gleich $\mathfrak{F}$ ist, in Gasen meistens bedeutungslos. In Flüssigkeiten und festen Körpern ist dagegen dieser Unterschied sehr wesentlich. Deshalb müssen wir, wenn sich unser Teilchen (Atom, Molekül usw.) im Inneren dieser Medien befindet, überall $\mathfrak{F}$ statt $\mathfrak{E}$ schreiben.

§ 13. Die Wirkung der thermischen Bewegung auf die Materie im elektrischen Feld

Infolge ihrer thermischen Energie befinden sich die die Materie aufbauenden Teilchen (Moleküle, Atome, Ionen) in ständiger Bewegung. Es erhebt sich die Frage, wie diese Teilchen vom elektrischen Felde beeinflußt werden.

Wenn die Teilchen polarisierbar sind und die Polarisierbarkeit eine skalare Größe ist, also von der Orientierung der Teilchen nicht abhängt, oder wenn die Teilchen nur eine lineare Schwingungsbewegung ausführen können, dann beeinflußt die auftretende Polarisation die thermische Bewegung überhaupt nicht, weil die Bewegung der Elektronenwolken (wegen der kleinen Masse der Elektronen) viel rascher erfolgt als die thermische Bewegung.

Anders liegen die Verhältnisse, wenn – wie bei den Molekülen – die Polarisierbarkeit ein Tensor ist. Die Moleküle wollen sich dann immer mit der Achse der größten Polarisierbarkeit in die Feldrichtung einstellen. Diese Einstellung wird

durch die thermische Bewegung fortwährend gestört. Dieses ziemlich verwickelte Problem wollen wir hier jedoch nicht durchrechnen.

Wir wenden uns dem einfacheren Fall zu, bei dem die Moleküle ein fertiges Dipolmoment besitzen, mit dem sie bestrebt sind, sich in die Feldrichtung einzustellen. Diese Ordnung trachtet dann die thermische Bewegung immer wieder zu zerstören. Infolge der gleichzeitigen Wirkung beider Ursachen entsteht ein dynamisches Gleichgewicht. Dieses Gleichgewicht wollen wir berechnen.

μ sei das Dipolmoment unseres Moleküls. Wenn die Achse des Moleküls mit der Richtung des Feldes $\mathfrak{F}$ den Winkel ϑ_1 einschließt, so wird

$$\mu_1 = \mu \cos\vartheta_1 \tag{92}$$

die in die Feldrichtung fallende Komponente des Dipolmomentes sein. Sind in der Volumeneinheit N Moleküle mit dem konstanten Dipolmoment μ vorhanden, so folgt für die Polarisation:

$$P = \sum_{n=1}^{N} \mu \cdot \cos\vartheta_n. \tag{93}$$

Die potentielle Energie eines solchen Moleküls im Felde ist nach Gleichung (75)

$$V(\vartheta_n) = -F\mu \cos\vartheta_n. \tag{94}$$

Zur tatsächlichen Berechnung der Gleichung (93) müssen wir jetzt wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit die verschiedenen Werte der Winkel ϑ_n unter der gleichzeitigen Wirkung des elektrischen Feldes und der thermischen Bewegung auftreten werden.

Nach den Gesetzen der statistischen Mechanik (der BOLTZMANNstatistik) ist das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten zweier Zustände, welche die Energie V_1 und V_2 besitzen,

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{e^{-\frac{V_1}{kT}}}{e^{-\frac{V_2}{kT}}}, \tag{95}$$

wobei

$$k = 1{,}3804 \cdot 10^{-16}\,\text{erg grad}^{-1} \tag{96}$$

die BOLTZMANN-Konstante bedeutet. T ist die absolute Temperatur.

Die Energie $V(\vartheta)$ entnehmen wir den Berechnungen (75) bzw. (94). Die Wahrscheinlichkeit jeder Orientierung ist also dem Faktor $e^{+\frac{F\mu\cos\vartheta}{kT}}$ proportional. Andererseits muß die Summe aller Wahrscheinlichkeiten gleich Eins sein. Da hier eine kontinuierliche Winkelverteilung zu erwarten ist, können wir statt der Summe ein Integral schreiben:

$$K\int e^{\frac{F\mu\cos\vartheta}{kT}}\,d\omega = 1, \tag{97}$$

wobei K eine Proportionalitätskonstante ist, die wir aus dem obigen Zusammenhang berechnen können. Die Integration bezieht sich hier auf eine ganze Kugel-

fläche. Durch Einführen räumlicher Polarkoordinaten auf der Einheitskugel erhalten wir statt Gleichung (97)

$$K \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} e^{\frac{F\mu\cos\vartheta}{kT}} \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 1, \tag{98}$$

und daraus folgt

$$K = \frac{1}{\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} e^{\frac{F\mu\cos\vartheta}{kT}} \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}. \tag{99}$$

Mit Hilfe des berechneten Wertes von K können wir ohne weiteres angeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Wert von $\cos\vartheta$ auftritt. Dazu müssen wir nur den vorher erwähnten exponentiellen Faktor mit K multiplizieren; die Wahrscheinlichkeit ist daher

$$K e^{\frac{F\mu\cos\vartheta}{kT}} \, d\omega, \tag{100}$$

wobei $d\omega$ das Element des Raumwinkels bedeutet, in welches die Richtung des Dipols gerade zeigt.

Aus den Gleichungen (99) und (100) läßt sich der Mittelwert von $\cos\vartheta$ berechnen. Jeden Wert von $\cos\vartheta$ multiplizieren wir mit der dazu gehörenden Wahrscheinlichkeit und integrieren dann über die ganze Kugelfläche:

$$\overline{\cos\vartheta} = \frac{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \cos\vartheta \cdot e^{\frac{F\mu\cos\vartheta}{kT}} \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} e^{\frac{F\mu\cos\vartheta}{kT}} \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}. \tag{101}$$

Über φ können wir gleich integrieren, weil wir dann sowohl im Zähler als auch im Nenner als Resultat 2π erhalten. Die Integration über ϑ können wir vereinfachen, wenn wir bedenken, daß $F\mu\cos\vartheta$ im Zähler des Exponenten im Verhältnis zu der im Nenner des Exponenten stehenden Energie kT, welche von der Größe der thermischen Energie ist, bei den erreichbaren elektrischen Feldstärken sehr klein ist. Wir können den exponentiellen Faktor im Zähler wie im Nenner in eine Reihe entwickeln und diese Reihen mit dem ersten Gliede abbrechen. Es bleiben zwei Integrale zu berechnen:

$$\int_{\vartheta=0}^{\pi} \left(\cos\vartheta + \frac{F\mu}{kT}\cos^2\vartheta\right) \sin\vartheta \, d\vartheta = \frac{F\mu}{kT} \cdot \frac{2}{3} \tag{102}$$

und

$$\int_{\vartheta=0}^{\pi} \left(1 + \frac{F\mu}{kT}\cos\vartheta\right) \sin\vartheta \, d\vartheta = 2. \tag{103}$$

Setzen wir diese Resultate in Gleichung (101) ein, so folgt als Endresultat

$$\overline{\cos\vartheta} = \frac{1}{3}\frac{F\mu}{kT}. \tag{104}$$

Für das in der Feldrichtung gemittelte Dipolmoment folgt

$$\mu\,\overline{\cos\vartheta} = \frac{1}{3}\frac{\mu^2}{kT}F. \tag{105}$$

Wir möchten darauf hinweisen, daß unser Resultat nicht nur nach der hier mitgeteilten klassischen Berechnung, sondern auch nach der Quantenmechanik für elektrische Dipole richtig ist, jedoch im analogen magnetischen Fall nicht mehr gilt.

Sind in der Volumeneinheit N derartige Moleküle mit dem Dipolmoment der Größe μ vorhanden, so folgt für das ganze Dipolmoment dieser Volumeneinheit – also für die Polarisation –

$$P_1 = \frac{1}{3}\frac{N\mu^2}{kT}F. \tag{106}$$

Wie wir sehen, hängt die von den permanenten Dipolmomenten verursachte Polarisation von der Temperatur ab, und zwar so, daß sie der absoluten Temperatur umgekehrt proportional ist.

Wenn das Teilchen (das Molekül) außerdem polarisierbar ist, so tritt noch ein weiteres Glied der Polarisation auf. Bezeichnen wir die mittlere Polarisierbarkeit des Moleküls mit α, dann folgt für dieses Glied:

$$P_2 = \alpha N F. \tag{107}$$

Aus den Gleichungen (106) und (107) erhalten wir für die Polarisation:

$$P = P_1 + P_2 = N\left(\alpha + \frac{1}{3}\frac{\mu^2}{kT}\right)F. \tag{108}$$

Diese Formel gibt uns Richtlinien für die Messung der Polarisierbarkeit und des konstanten Dipolmomentes. Der von der Temperatur unabhängige Teil liefert nämlich die Polarisierbarkeit. Aus dem temperaturabhängigen Anteil können wir das Dipolmoment berechnen.

Es ist üblich, durch Einführung der Loschmidtschen Zahl L folgende Größe zu definieren:

$$R = \frac{4\pi}{3}L\left(\alpha + \frac{\mu^2}{3kT}\right), \tag{109}$$

die wir molare Polarisation nennen. Den Faktor $4\pi/3$ benützen wir aus Bequemlichkeitsgründen. Seine Zweckmäßigkeit werden wir noch einsehen.

Unsere statistischen Berechnungen in diesem Paragraphen bezüglich der Einstellung der Dipole im elektrischen Felde sind strenggenommen nur für Gase gültig. In Flüssigkeiten spielt der Umstand eine wesentliche Rolle, daß sich die Moleküle wegen der sehr geringen Entfernung bei der Einstellung gegenseitig stören. Debye hat deshalb bei Flüssigkeiten noch ein „Reibungsglied" berücksichtigt.

§ 14. Der Zusammenhang der elektrischen Suszeptibilität und der Dielektrizitätskonstante mit den Polarisierbarkeiten und dem Dipolmoment

In stark verdünnten Gasen, in denen wir die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ als gleich betrachten können, erhalten wir aus den Gleichungen (74) und (108) für das in der Volumeneinheit induzierte Moment (für die Polarisation)

$$\mathfrak{P} = N\left(\alpha + \frac{\mu^2}{3\,k\,T}\right)\mathfrak{E}. \tag{110}$$

Da andererseits nach der Definition der Suszeptibilität

$$\mathfrak{P} = \chi \cdot \mathfrak{E} \tag{111}$$

gilt, so folgt für die Suszeptibilität aus den Gleichungen (110) und (111):

$$\chi = N\left(\alpha + \frac{1}{3}\frac{\mu^2}{k\,T}\right). \tag{112}$$

Damit haben wir die makroskopische Suszeptibilität der Materie auf die elektrischen Daten der einzelnen Moleküle oder Atome zurückgeführt. Aus der Definition der Dielektrizitätskonstante

$$\varepsilon = 1 + 4\,\pi\,\chi \tag{113}$$

erhalten wir weiter, daß

$$\varepsilon = 1 + 4\,\pi\,N\left(\alpha + \frac{1}{3}\frac{\mu^2}{k\,T}\right) \tag{114}$$

ist. Wenn jedoch von Materialien die Rede ist, welche eine größere Dichte besitzen (Flüssigkeiten, feste Körper, stark verdichtete Gase), dann müssen wir den Vektor $\mathfrak{E}$ wegen der Berücksichtigung des inneren Feldes nach Gleichungen (80) und (91) durch den Vektor $\mathfrak{F} = \mathfrak{E} + \frac{4\,\pi}{3}\mathfrak{P}$ ersetzen, also statt Gleichung (110)

$$\mathfrak{P} = N\left(\alpha + \frac{1}{3}\frac{\mu^2}{k\,T}\right)\cdot\left(\mathfrak{E} + \frac{4\,\pi}{3}\mathfrak{P}\right) \tag{115}$$

schreiben. Ordnen wir diese Gleichung, so folgt

$$\mathfrak{P}\left\{1 - \frac{4\,\pi}{3}N\left(\alpha + \frac{1}{3}\frac{\mu^2}{k\,T}\right)\right\} = N\left(\alpha + \frac{1}{3}\frac{\mu^2}{k\,T}\right)\mathfrak{E} \tag{116}$$

und daraus unter Berücksichtigung von Gleichung (111)

$$\chi = N\,\frac{\alpha + \frac{1}{3}\frac{\mu^2}{k\,T}}{1 - \frac{4\,\pi}{3}N\left(\alpha + \frac{1}{3}\frac{\mu^2}{k\,T}\right)}. \tag{117}$$

Andererseits erhalten wir aus den Gleichungen (111) und (113) für die Dielektrizitätskonstante den Zusammenhang

$$\mathfrak{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\,\pi}\,\mathfrak{E}. \tag{118}$$

Wenn wir diese Gleichung in Gleichung (116) einsetzen, erhalten wir

$$\frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\left\{1 - \frac{4\pi}{3} N\left(\alpha + \frac{1}{3}\frac{\mu^2}{kT}\right)\right\} = N\left(\alpha + \frac{1}{3}\frac{\mu^2}{kT}\right). \tag{119}$$

Ordnen wir Gleichung (119), so folgt als Resultat

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} N\left(\alpha + \frac{1}{3}\frac{\mu^2}{kT}\right). \tag{120}$$

Wenn in der Materie keine fertigen Dipole vorhanden sind, so vereinfachen sich unsere Formeln (112), (114), (117) und (120) folgendermaßen:

Für stark verdünnte Materie ist

$$\chi = N\alpha \tag{121}$$

und

$$\varepsilon = 1 + 4\pi N\alpha\,; \tag{122}$$

für dichte Materie ist

$$\chi = \frac{N\alpha}{1 - \frac{4\pi}{3} N\alpha} \tag{123}$$

und

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} N\alpha. \tag{124}$$

§ 15. Die Dispersionstheorie und die Lorentz-Lorenzsche Formel

In Isolatoren haben die Maxwellschen Differentialgleichungen die Form

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathfrak{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}, \qquad & \operatorname{div}\mathfrak{H} &= 0 \\ \operatorname{rot}\mathfrak{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}, \qquad & \operatorname{div}\mathfrak{D} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{125}$$

und

Aus diesen Gleichungen kann man die Maxwellsche Relation

$$n = \sqrt{\varepsilon} \tag{126}$$

herleiten, wie wir das im ersten Teil dieses Werkes gesehen haben. Dieser Zusammenhang ist jedoch streng nur für sehr große Wellenlängen richtig.

Durch Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (22) mit dem Lösungssatz $x = x_0 \cdot e^{i 2\pi\nu t}$ (23) erhielten wir für die Schwingungsamplitude eines Elektrons unter der Wirkung des elektrischen Feldes der Lichtwelle den Ausdruck (25):

$$x_0 = \frac{\frac{e}{m}\mathfrak{E}_0}{4\pi^2(\nu_0^2 - \nu^2) + i\,2\pi\nu\gamma}. \tag{127}$$

Durch Einsetzen der Kreisfrequenzen

und
$$\left.\begin{aligned} \omega_0 &= 2\,\pi\,\nu_0 \\ \omega\ &= 2\,\pi\,\nu \end{aligned}\right\} \tag{128}$$

lautet Gleichung (127):

$$x_0 = \frac{\frac{e}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\,\gamma\,\omega}\,\mathfrak{E}_0. \tag{129}$$

Bekanntlich ist $e\,x$ das infolge der Schwingungsbewegung des Elektrons auftretende momentan induzierte elektrische Moment. Wenn wir berücksichtigen, daß nach Gleichung (23) $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \cos 2\pi\nu t$ der elektrische Vektor der einfallenden Lichtwelle ist, so folgt

$$p = e \cdot x = \frac{\frac{e^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\,\gamma\,\omega}\,\mathfrak{E} = \alpha\,\mathfrak{E}, \tag{130}$$

d.h., daß die Polarisierbarkeit gegenüber elektrischen Schwingungen hoher Frequenz (Lichtwellen)

$$\alpha = \frac{\frac{e^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\,\gamma\,\omega} \tag{131}$$

ist.

Die in der Materie eventuell vorhandenen fertigen Dipole können hier keine Bedeutung haben, weil diese dem schnell veränderlichen Feld der Lichtwellen nicht folgen können. Wir müssen also die Formel (124) benutzen, in die wir zuerst Gleichung (126) einsetzen. Dann folgt

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\,\pi}{3}\,N\,\alpha. \tag{132}$$

(132) ist die bekannte LORENTZ-LORENZsche Formel, welche den Zusammenhang zwischen dem Brechungsindex des Stoffes und den Polarisierbarkeiten der darin enthaltenen Atome, Ionen oder Moleküle angibt. Die Polarisierbarkeit betrachten wir hier noch nach der Definition des vorigen Paragraphen als reelle und nicht komplexe Größe.

Wenn die Materie aus mehreren Ionensorten aufgebaut ist, wie z. B. ein Alkalihalogenid-Kristall aus positiven Alkali- und negativen Halogenionen, so müssen wir nur die Polarisierbarkeiten beider Ionen summieren. Man erhält für Steinsalz z. B.

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\,\pi}{3}\,N\,(\alpha_{\mathrm{Cl}^-} + \alpha_{\mathrm{Na}^+}). \tag{133}$$

Da Brechungsindizes verhältnismäßig leicht meßbar sind, so liefert die LORENTZ-LORENZsche Formel eine bequeme Methode zur Messung der Polarisierbarkeiten. Aus Gleichung (133) erhält man nur die Summe der Polarisierbarkeiten. Man kann jedoch die Polarisierbarkeit der Alkaliionen mittels der Spektren der neutralen Alkaliatome aus der sogenannten RYDBERG-RITZschen

Korrektion berechnen. Ist dann nur eine solche Polarisierbarkeit bekannt, so erhält man alle übrigen aus Formeln vom Typ (133).

Bei Gasen ist der Brechungsindex nur wenig von der Einheit verschieden. Wir können deshalb in Gleichung (132) statt $n^2 + 2$ einfach 3 schreiben, dann folgt

$$n^2 - 1 = 4\pi N \alpha . \tag{134}$$

Diese Formel können wir auch unmittelbar aus Gleichung (122) erhalten.

Wenn die Polarisierbarkeit keine skalare Größe, sondern ein Tensor ist (vgl. Teil III, § 10), dann haben wir statt Gleichung (134):

$$n^2 - 1 = 4\pi N \frac{1}{3} (b_1 + b_2 + b_3) . \tag{134a}$$

Ähnlich müssen wir in diesem Falle auch Gleichung (132) umformen.

Setzen wir jetzt nach dieser kleinen Abschweifung Gleichung (131) in Gleichung (124) ein, dann folgt

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} N \frac{\frac{e^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} , \tag{135}$$

oder geordnet:

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi e^2}{m} \frac{N}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega - \frac{4\pi}{3}\frac{e^2}{m} N} . \tag{136}$$

Das im Nenner von Gleichung (136) stehende letzte Glied $\frac{4\pi}{3}\frac{e^2}{m} N$, welches das innere Feld berücksichtigt (es tritt nicht auf, wenn wir Gleichung (131) in Gleichung (122) oder (134) einsetzen), hat nur eine sehr untergeordnete Bedeutung, weil es konstant ist. Wir können es deshalb in unsere Konstante einbeziehen. Das bedeutet nur eine kleine Änderung der Eigenfrequenz des quasielastisch gebundenen Elektrons, die wir durch

$$\omega_0^2 - \frac{4\pi}{3}\frac{e^2}{m} N = \omega_1^2 \tag{137}$$

berücksichtigen.

Wenn wir jetzt die durch Gleichung (136) definierte Dielektrizitätskonstante in die MAXWELLschen Differentialgleichungen einsetzen, so erhalten sie die gewohnte Form

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{H} &= \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} , & \operatorname{div} \mathfrak{H} &= 0 , \\ \operatorname{rot} \mathfrak{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \quad \text{und} & \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} &= 0 , \end{aligned}\right\} \tag{138}$$

jedoch mit dem wesentlichen Unterschied, daß jetzt ε die Frequenz des einfallenden Lichtes ω (bzw. ν) enthält. Die Differentialgleichungen sind also nur für diese eine Frequenz gültig. Weiter müssen wir noch bedenken, daß nach Gleichung (136) der Brechungsindex jetzt eine komplexe Größe ist, was keinen inneren Widerspruch enthält, weil wir angenommen haben, daß auch der Licht-

vektor in der komplexen Schreibweise dargestellt ist. Unter Berücksichtigung dieser Umstände können wir jedoch unser Gleichungssystem (138) formal ebenso befriedigen, wie wir das im Falle von Gleichung (125) schon kennen.

Versuchen wir das Differentialgleichungssystem (138) durch folgende Ansätze zu befriedigen:

$$\left.\begin{aligned} E_y &= a e^{i\omega\left(t-\frac{\mathfrak{n}x}{c}\right)}, \quad E_x = E_z = 0, \\ H_z &= b e^{i\omega\left(t-\frac{\mathfrak{n}x}{c}\right)}, \quad H_x = H_y = 0. \end{aligned}\right\} \tag{139}$$

Hier sind a und b die Amplituden des elektrischen und magnetischen Vektors. $\mathfrak{n}$ bedeutet jetzt eine komplexe Größe. Aus der ersten MAXWELLschen Gleichung erhalten wir dann

$$\mathfrak{n} b = \varepsilon a \tag{140}$$

und aus der zweiten

$$\mathfrak{n} a = b. \tag{141}$$

Multiplizieren wir diese zwei Gleichungen miteinander und berücksichtigen außerdem die Gleichung (136), so erhalten wir als Resultat:

$$\mathfrak{n}^2 = \varepsilon = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}. \tag{142}$$

Da $\mathfrak{n}$ eine komplexe Zahl ist, so spalten wir sie in den reellen und imaginären Teil auf:

$$\mathfrak{n} = n - ik \tag{143}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{n} &= \sqrt{n^2 + k^2}\, e^{-i\varphi} \\ \operatorname{tg}\varphi &= \frac{k}{n}. \end{aligned}\right\} \tag{144}$$

und

Setzen wir diesen Wert von $\mathfrak{n}$ in Gleichung (139) ein, so folgen die Resultate

$$\left.\begin{aligned} E_y &= a e^{-\frac{\omega k x}{c}} \cdot e^{i\omega\left(t-\frac{n x}{c}\right)} \\ H_z &= a\sqrt{n^2 + k^2}\, e^{-\frac{\omega k x}{c}} \cdot e^{i\left\{\omega\left(t-\frac{n x}{c}\right)-\varphi\right\}}. \end{aligned}\right\} \tag{145}$$

und

Bei der Umformung der zweiten Gleichung wurde Gleichung (141) berücksichtigt. Damit haben wir unser Differentialgleichungssystem tatsächlich gelöst. Um jedoch den physikalischen Sinn dieser Lösung zu sehen, betrachten wir die reellen Teile unserer zwei Gleichungen (145). Diese reellen Teile sind

$$\left.\begin{aligned} E_y &= a e^{-\frac{\omega k x}{c}} \cos\omega\left(t - \frac{n x}{c}\right) \\ H_z &= a\sqrt{n^2 + k^2}\, e^{-\frac{\omega k x}{c}} \cdot \cos\left\{\omega\left(t - \frac{n x}{c}\right) - \varphi\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{146}$$

und

In Gleichung (146) können wir sofort den physikalischen Sinn der einzelnen Faktoren erkennen. Betrachten wir zuerst den exponentiellen Faktor und vergleichen ihn mit dem in der Lösung der Differentialgleichung für gedämpfte Schwingungen stehenden analogen Faktor. Dort steht im Exponenten t statt x. Dieser Faktor beschreibt dort die zeitliche Abnahme der Schwingungsamplitude, hier bedeutet dagegen dieser Faktor eine Abnahme der Amplitude entlang der Ausbreitungsrichtung, also die Schwächung der Lichtintensität im absorbierenden Medium. Da nach Gleichung (128) $\omega = 2\pi\nu$ ist, so können wir feststellen, daß beim Zurücklegen des Weges

$$x_0 = \frac{c}{2\pi\nu k} \tag{147}$$

die Amplitude des Lichtvektors auf den e-ten Teil abnimmt. Da nun $c/\nu = \lambda$ die Wellenlänge des Lichtes im Vakuum ist, so können wir Gleichung (147) folgendermaßen schreiben:

$$x_0 = \frac{\lambda}{2\pi k}. \tag{148}$$

Die trigonometrischen Funktionen in den Gleichungen (146) beschreiben die Schwingungsnatur des Lichtes. Das im Argument stehende Symbol n ist der reelle Brechungsindex des fraglichen Mediums. Da der Brechungsindex das Verhältnis der im Vakuum und der im fraglichen Medium gemessenen Lichtgeschwindigkeiten (v) ist, so haben wir

$$n = \frac{c}{v}. \tag{149}$$

Setzen wir Gleichung (149) in Gleichung (146/1) ein, so erhalten wir

$$E_y = a e^{-\frac{\omega k x}{c}} \cdot \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right). \tag{150}$$

Dieses Resultat ist tatsächlich richtig. Wir müssen nur in einer Entfernung x vom Anfangspunkt die Zeitkoordinate um die Zeitdauer $\frac{x}{v}$ verkleinern, die vergeht, bis das Licht die Strecke vom Anfangspunkt bis zum Punkt x zurücklegt. Damit haben wir bewiesen, daß n tatsächlich der Brechungsindex des fraglichen Mediums ist.

Wir bemerken noch, daß die Amplitude des magnetischen Vektors nach Gleichung (146) von der des elektrischen um den Faktor $\sqrt{n^2 + k^2}$ verschieden ist. Im Vakuum sind beide Amplituden einander gleich. Außerdem hat sich auch die Phase des magnetischen Vektors geändert.

Um die Konstanten n und k einzeln bestimmen zu können, setzen wir Gleichung (143) in Gleichung (142) ein. Durch Gleichsetzen der reellen und imaginären Teile folgen die Resultate

$$n^2 - k^2 = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \tag{151}$$

und

$$2nk = \frac{4\pi N e^2}{m} \frac{\omega\gamma}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}. \tag{152}$$

Aus Gleichung (152) sehen wir, daß das Produkt nk nur positiv sein kann, was nach Gleichung (148) die selbstverständliche physikalische Tatsache ausdrückt, daß die Intensität (die Amplitude) des Lichtes entlang der Ausbreitungsrichtung nur abnehmen, aber nicht zunehmen kann.

In dem Gebiet des Spektrums, in dem die Substanz durchsichtig ist – das also außerhalb der Absorptionsstellen liegt –, muß der Ausdruck $(\omega_1^2 - \omega^2)^2$ recht groß im Verhältnis zu $\gamma^2\omega^2$ sein. Deshalb können wir in diesem Gebiet die Formel (151) vereinfachen:

$$n^2 = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \cdot \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2}. \tag{153}$$

Besitzt das Atom mehrere quasielastisch gebundene Elektronen, so erhalten wir für die Dispersion:

$$n^2 = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \sum_l \frac{1}{\omega_l^2 - \omega^2}. \tag{154}$$

Wenn außerdem die untersuchte Materie noch aus mehreren Atomarten aufgebaut ist, dann müssen wir den Umstand berücksichtigen, daß N nicht für jede Frequenz ω_l denselben Wert hat.

Für verdünnte Gase können wir unsere Formeln noch weiter vereinfachen, weil in diesem Falle n von 1 nur wenig verschieden sein wird:

$$n^2 - 1 = (n-1)(n+1) \approx 2(n-1). \tag{155}$$

Mit dieser Vereinfachung erhält man für Gleichung (154):

$$n = 1 + \frac{2\pi e^2}{m} \sum_l \frac{N_l}{\omega_l^2 - \omega^2}. \tag{156}$$

Aus dieser Formel können wir ohne weiteres die Abhängigkeit des Brechungsindexes von der Frequenz ablesen. Für $\omega^2 \ll \omega_l^2$ geht Gleichung (156) in die folgende Formel über:

$$n = 1 + \frac{2\pi e^2}{m} \sum_l \frac{N_l}{\omega_l^2}. \tag{157}$$

Wenn wir Gleichung (157) mit der LORENTZ-LORENZschen Formel vergleichen, und zwar mit der in Gleichung (134) für Gase angegebenen Form und außerdem annehmen, daß ebenso wie dort auch nur eine Atomart vorhanden ist, so sehen wir, daß

$$\alpha = \frac{e^2}{m} \sum_l \frac{1}{\omega_l^2} \tag{158}$$

die statische Polarisierbarkeit ist. Ebenso können wir auch die Polarisierbarkeit für mehrere Atomarten angeben.

§ 16. Eine Bemerkung zur Dispersionsformel der Quantenmechanik

Nach der BOHRschen Theorie erfolgt die Emission der Spektrallinien nicht dadurch, daß in den Atomen tatsächlich quasielastisch gebundene Elektronen Schwingungsbewegungen ausführen. Wenn wir die Frequenzen der emittierten Spektrallinien mit ω_l (bzw. ν_l) bezeichnen, so zeigt die Erfahrung, daß die Dispersionserscheinungen durch Formeln vom Typ (156) richtig beschrieben werden. Dieses Faktum war zur Zeit der Aufstellung der BOHRschen Theorie ganz unerklärlich. Diese Schwierigkeit versuchte man dadurch zu beseitigen, daß man jedem BOHRschen Quantensprung einen „virtuellen Oszillator" zuordnete. Der Gesamtkomplex der Erscheinungen wurde durch die Wellenmechanik SCHRÖDINGERS eingehend geklärt, so daß nicht nur die BOHRschen Quantenübergänge, sondern auch die Dispersionsformel vom Typ (156) hergeleitet werden konnten. Selbstverständlich konnte die Wellenmechanik noch viele Einzelerscheinungen der Dispersionstheorie richtig deuten, denen gegenüber sich die klassische Theorie als machtlos erwies.

§ 17. Die anomale Dispersion und Absorption

Für ein verdünntes Gas gilt die Vereinfachung (155). Durch Einsetzen von Gleichung (143) in Gleichung (142) erhalten wir

$$n - ik = \sqrt{\varepsilon} = 1 + \frac{2\pi N e^2}{m} \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}. \tag{159}$$

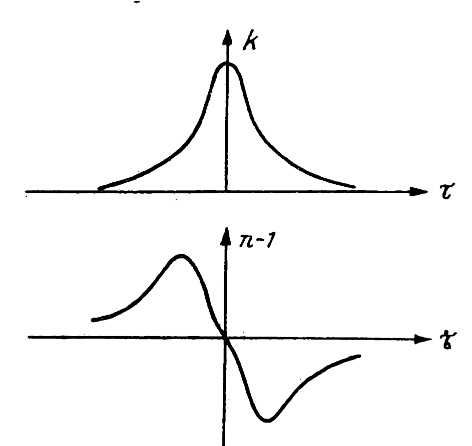


Abb. 5. Der Extinktionskoeffizient und der Brechungsindex in der Umgebung einer Spektrallinie

Die Separierung der reellen und imaginären Teile ergibt

$$n = 1 + \frac{2\pi e^2}{m} N \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \tag{160}$$

und

$$k = \frac{2\pi e^2}{m} N \frac{\gamma\omega}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}. \tag{161}$$

Da uns bei der Untersuchung der anomalen Dispersion und Absorption besonders die unmittelbare Umgebung einer Spektrallinie interessiert, führen wir die Bezeichnung $\omega - \omega_1 = \tau$ ein und vergessen dabei nicht, daß mit zunehmender einfallender Frequenz bei Annäherung an die Spektrallinie τ zuerst negativ sein wird, innerhalb der Spektrallinie jedoch sein Vorzeichen ändert

und von dort an positive Werte annimmt. Gleichungen (160) und (161) können wir in der Umgebung der fraglichen Spektrallinie schreiben als

$$n - 1 = -\frac{\pi e^2 N}{m\omega_1} \frac{\tau}{\tau^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \tag{162}$$

und

$$k = \frac{\pi e^2 N}{2m\omega_1} \frac{\gamma}{\tau^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \tag{163}$$

Aus diesen zwei Formeln können wir leicht ablesen, wie die Größen n und k in der Nähe einer Spektrallinie von der Frequenz des einfallenden Lichtes abhängen (vgl. die Abb. 5).

§ 18. Der FARADAYeffekt

Wenn wir linear polarisiertes Licht durch eine sich im magnetischen Felde befindende Substanz parallel zu den magnetischen Kraftlinien hindurchsenden, so machen wir die Erfahrung, daß sich die Polarisationsebene des austretenden Lichtes im Verhältnis zu dem des einfallenden gedreht hat. Der Winkel der Drehung ist der Schichtdicke der untersuchten Substanz und der magnetischen Feldstärke proportional. Diese Erscheinung nennen wir nach ihrem Entdecker den FARADAYeffekt. Von diesem FARADAYeffekt konnte man zeigen, daß ein Teil desselben (der sogenannte diamagnetische Effekt) eine Folge des viel später entdeckten ZEEMANeffektes ist. In den folgenden Ausführungen wollen wir den Zusammenhang zwischen den zwei Effekten herleiten.

Nehmen wir an, daß die Richtung des einfallenden Lichtes und des magnetischen Feldes die der X-Achse ist. Der elektrische Vektor des einfallenden Lichtes liegt dann in der YZ-Ebene. Bezeichnen wir seine Komponenten mit E_y und E_z und beschreiben wir die elektrische Feldstärke durch eine einzige komplexe Zahl, so folgt

$$E_y + iE_z = Ae^{i\alpha}, \tag{164}$$

mit $E_y = A\cos\alpha$ und $E_z = A\sin\alpha$. α ist der Winkel, welchen die Richtung des elektrischen Vektors mit der Y-Achse einschließt. Ganz allgemein kann man eine linear polarisierte Welle der Kreisfrequenz ω, welche in einem Medium mit dem Brechungsindex n entlang der X-Achse fortschreitet, durch

$$E_y + iE_z = a\cos\omega\left(t - \frac{nx}{c}\right) \tag{165}$$

beschreiben. Bezüglich der genauen Herleitung dieser Formel vgl. den IV. Teil (Optik) dieses Werkes. – In Gleichung (165) ist a eine komplexe Zahl, deren absoluter Wert die Amplitude und deren Phasenwinkel die Polarisationsrichtung angibt.

Wenn wir jetzt verlangen, daß die Polarisationsrichtung nach Zurücklegung einer Strecke von einem Zentimeter sich um den Winkel χ dreht, so können wir

dieses Postulat durch Hinzufügen des Faktors $e^{i\chi x}$ zu Gleichung (165) befriedigen. Der elektrische Vektor des aus einer Schicht der Dicke x austretenden Lichtes wird dann durch

$$E_y + i E_z = a e^{i\chi x} \cdot \cos\omega \left(t - \frac{n x}{c}\right) \tag{166}$$

beschrieben.

Wenn wir den Kosinus durch exponentielle Funktionen ausdrücken, so folgt

$$E_y + i E_z = \frac{1}{2}\, a \left\{ e^{i\omega\left[t - \frac{x}{c}\left(n - \frac{\chi c}{\omega}\right)\right]} + e^{-i\omega\left[t - \frac{x}{c}\left(n + \frac{\chi c}{\omega}\right)\right]} \right\}. \tag{167}$$

Diese Formel können wir folgendermaßen deuten: Beide exponentiellen Funktionen beschreiben einen polarisierten Lichtvektor, weil wir die erste Funktion mit Hilfe des Zusammenhanges $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ und die zweite mit Hilfe von $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ umformen und dann den reellen Teil gleich E_y und den Koeffizienten des imaginären Teiles gleich E_z setzen können. Da im ersten Glied das Vorzeichen von E_z positiv, im zweiten jedoch negativ ist, so wird sich die Richtung des elektrischen Vektors (also auch die Polarisationsebene) im ersten Teil nach rechts, im zweiten dagegen nach links drehen. Im Endresultat ist unser linear polarisierter Vektor in dem im Magnetfelde sich befindenden Medium in zwei sich in entgegengesetzter Richtung drehende zirkular polarisierte Komponenten von gleicher Amplitude zerfallen. Zu diesen zwei Komponenten gehören nach Gleichung (167) zwei verschiedene Brechungsindizes, und zwar

$$n_+ = n - \frac{\chi c}{\omega}$$

und

$$n_- = n + \frac{\chi c}{\omega}. \tag{168}$$

Wir können als Tatsache feststellen, daß eine Materie nur dann die Ebene des polarisierten Lichtes drehen wird, wenn sie „zirkular doppelbrechend" ist, d. h., wenn die Brechungsindizes des rechts- und linkszirkular polarisierten Lichtes in ihr nicht gleich sind. Beim FARADAYeffekt wird diese Erscheinung vom magnetischen Feld verursacht. Es gibt dagegen Stoffe, welche schon infolge ihrer inneren Struktur die Ebene des polarisierten Lichtes drehen. So verhalten sich einige Kristalle, z. B. der Quarz, einige gelöste organische Verbindungen, welche ein asymmetrisches Kohlenstoffatom enthalten.

Den Winkel der Drehung der Polarisationsebene können wir berechnen. Zu diesem Zweck müssen wir nur χ aus Gleichung (168) ausdrücken:

$$\chi l = (n_- - n_+)\, \frac{\omega}{2c}\, l. \tag{169}$$

Das Problem ist also jetzt die Berechnung von $n_- - n_+$. In § 5 haben wir gesehen, daß das magnetische Feld auf die Elektronen so einwirkt, als ob sich über die ungestörte Bewegung der Elektronen noch eine Rotation vom Betrage

$$\omega_L = -\frac{e}{2mc} H \tag{170}$$

superponieren würde. [Vgl. die Formeln (43) und (46).] Wenn in irgendeiner Materie sich eine rechtszirkular polarisierte Welle ausbreitet, so ist deren Frequenz, vom sich drehenden Koordinatensystem aus betrachtet, $\omega - \omega_L$, d.h., der Brechungsindex hat dieselbe Größe wie eine Welle der Frequenz $\omega - \omega_L$ bei Nichtvorhandensein des magnetischen Feldes. Eine ähnliche Betrachtung bezieht sich auf die linkszirkular polarisierte Welle. Deren Brechungsindex wird im Magnetfeld ebenso groß sein wie im feldfreien Falle für eine Welle der Kreisfrequenz $\omega + \omega_L$. Wir erhalten die Zusammenhänge

$$\left.\begin{aligned} n_- &= n(\omega + \omega_L) \\ \text{und} \qquad n_+ &= n(\omega - \omega_L). \end{aligned}\right\} \tag{171}$$

Die eingeklammerten Ausdrücke sind hier keine Faktoren, sondern bedeuten, daß n als Funktion von ω an der Stelle $\omega + \omega_L$ bzw. $\omega - \omega_L$ zu nehmen ist. Da andererseits diese LARMORfrequenz immer sehr klein im Verhältnis zur Frequenz des Lichtes ist, so haben wir

$$n_- - n_+ = n(\omega + \omega_L) - n(\omega - \omega_L) = \frac{dn}{d\omega} \cdot 2\,\omega_L. \tag{172}$$

Setzen wir in diese Formel Gleichung (170) ein und das erhaltene Resultat dann in Gleichung (169), so folgt

$$\chi l = -\frac{\omega}{2c}\, l \frac{dn}{d\omega} \cdot \frac{e}{mc} H. \tag{173}$$

Diese zuerst von BECQUEREL hergeleitete Formel beschreibt den Zusammenhang zwischen der Drehung der Polarisationsebene des Lichtes und der magnetischen Feldstärke.

Da $\omega \frac{dn}{d\omega} = -\lambda \frac{dn}{d\lambda}$ ist, so können wir Gleichung (173) auch in der Form

$$\chi l = \frac{el}{2mc^2} \frac{dn}{d\lambda} \lambda H \tag{174}$$

schreiben. Im sichtbaren Gebiet ist $\frac{dn}{d\lambda}$ negativ. Da die Ladung des Elektrons ebenfalls negativ ist, so muß die Drehrichtung des polarisierten Lichtes positiv sein. Die Drehung der Polarisationsebene erfolgt in Richtung des das Magnetfeld verursachenden Stromes.

Formel (174) stimmt für diamagnetische Stoffe mit der Erfahrung recht gut überein. Eine ganz genaue Übereinstimmung können wir selbstverständlich nicht erwarten, weil wir die Formel von BECQUEREL unter Berücksichtigung des normalen ZEEMANeffektes und außerdem „ganz klassisch" hergeleitet haben. Eine exakte Theorie kann man nur auf Grundlage der Quantenmechanik herleiten. Diese Theorie stammt von R. DE L. KRONIG.

Gleichung (174) ist unabhängig von der Temperatur, was bei diamagnetischen Stoffen mit der Erfahrung übereinstimmt. LADENBURG machte zuerst darauf aufmerksam, daß bei paramagnetischen Substanzen der FARADAYeffekt noch auf einem ganz anderen Wege zustande kommt, d.h., daß man Gleichung (174)

für diesen Fall durch ein Zusatzglied ergänzen muß. Wir nehmen hier aus der Theorie des Magnetismus die Tatsache voraus, daß der Paramagnetismus dadurch entsteht, daß kleine magnetische Dipole bestrebt sind, sich in die Feldrichtung einzustellen. Dieser Einstellung in die Feldrichtung wirkt die thermische Bewegung entgegen. Im Endresultat werden sich mehr magnetische Dipole in die Feldrichtung als in die antiparallele Richtung einstellen. Diese Erscheinung muß zur Folge haben, daß die Brechungsindizes der in entgegengesetzter Richtung zirkular polarisierten Komponenten verschieden sind. Es ist nicht unser Ziel, diesen Effekt genau herzuleiten. Er ist von KRONIG quantenmechanisch berechnet worden. Nur zwei Tatsachen wollen wir hervorheben: Man kann zeigen, daß der paramagnetische FARADAYeffekt der absoluten Temperatur umgekehrt proportional ist und daß sein Vorzeichen an den beiden Seiten einer Spektrallinie entgegengesetzt sein wird. Die Abhängigkeit von der Temperatur ist sehr wichtig, weil man bei Messung des Effektes bei verschiedenen Temperaturen den diamagnetischen und den paramagnetischen Teil der Erscheinung immer voneinander trennen kann. Andererseits kann man durch Anwendung sehr tiefer Temperaturen die Größe des paramagnetischen Gliedes stark erhöhen. Die Größe

$$\varLambda = \frac{\pi(n_- - n_+)}{\lambda H} \tag{175}$$

nennt man die VERDETsche Konstante des untersuchten Stoffes. Aus den Gleichungen (169) und (174) folgt, daß diese Zahlenangabe den FARADAYeffekt der untersuchten Substanz charakterisiert.

§ 19. Der elektrooptische KERReffekt

Wenn wir eine geeignete Substanz in ein elektrisches Feld bringen und dann senkrecht zur Feldrichtung einen linear polarisierten Lichtstrahl hindurchsenden, so machen wir die Erfahrung, daß die Substanz doppelbrechend geworden ist. Die Rolle der optischen Achse des Kristalles spielt jetzt die Richtung des elektrischen Feldes. Dieser Effekt ist gegenüber dem FARADAYeffekt kein linearer, sondern ein quadratischer Effekt. Die Differenz der Brechungsindizes ist dem Quadrat der zwischen den Kondensatorplatten herrschenden Feldstärke proportional. Das Prinzip seiner Messung ist im wesentlichen dasselbe wie das der Messung der Doppelbrechung von Kristallen. Auf die Methoden der Messung des genannten Effektes wollen wir hier nicht eingehen. Dessenungeachtet hat der KERReffekt eine viel größere Bedeutung als der FARADAYeffekt, da er viele technische Anwendungen ermöglicht. Andererseits ist es möglich, mit Hilfe des KERReffektes wichtige Schlüsse auf die Struktur der Moleküle zu ziehen. Wir bezeichnen die Größe

$$B = \frac{n_p - n_s}{\lambda} \cdot \frac{1}{E^2} \tag{176}$$

als KERRkonstante der untersuchten Materie, wobei n_p der Brechungsindex des parallel zur Feldrichtung schwingenden Lichtes ist. n_s ist der Brechungsindex

senkrecht zu dieser Richtung. Eine andere Definition dieser KERRkonstante, die in der Fachliteratur ebenfalls oft benutzt wird, ist

$$K = \frac{B\lambda}{n} = \frac{n_p - n_s}{n} \cdot \frac{1}{E^2}. \tag{177}$$

Sie besitzt den Vorteil, daß sie bei Gasen praktisch unabhängig von der Wellenlänge ist.

Der erste Versuch zur Ausarbeitung der Theorie des KERReffektes rührt von W. VOIGT her. Nach seiner Annahme soll der KERReffekt eine Folge des STARKeffektes sein, wie der FARADAYeffekt eine Folge des ZEEMANeffektes ist. Dieser sogenannte „VOIGTanteil" des KERReffektes tritt tatsächlich bei jeder Substanz auf, hat jedoch nur bei festen Körpern, bei Edelgasen und kugelsymmetrischen Molekülen eine Bedeutung, da der „VOIGTanteil" hier den KERReffekt allein hervorruft. Der Effekt ist bei den genannten Materialien immer sehr klein. Bei solchen Substanzen, welche aus nicht kugelsymmetrischen Molekülen aufgebaut sind, verdeckt eine aus einer anderen Ursache auftretende elektrische Doppelbrechung vollständig das vorher erwähnte „VOIGTsche" Glied. Die letztere Erscheinung übertrifft im allgemeinen den „VOIGTanteil" um zwei Größenordnungen.

Diesen viel größeren KERReffekt beschreibt die sogenannte LANGEVIN-BORN-GANSsche „Orientierungstheorie". Es ist nicht unser Ziel, die ziemlich langwierige Herleitung dieser Theorie ausführlich zu besprechen. Wir beschränken uns deshalb nur auf die Interpretation des physikalischen Inhaltes des Gedankenganges, der zur „Orientierungstheorie" führte.

Wie wir schon in § 10 ausführlich besprochen haben, sind die Polarisierbarkeiten der Moleküle, abgesehen von dem Ausnahmefall, daß ein Molekül kugelsymmetrisch ist, keine skalaren Größen, sondern Tensoren. Weiter haben wir dort erwähnt, daß man meist in guter Näherung die statischen und die optischen Polarisierbarkeiten der Moleküle simultan auf Hauptachsen transformieren kann. Bezeichnen wir die statischen Hauptpolarisierbarkeiten des Moleküls mit a_1, a_2 und a_3 und die optischen Hauptpolarisierbarkeiten mit b_1, b_2 und b_3. Wenn das Molekül außerdem ein konstantes Dipolmoment besitzt, dann zerlegen wir auch dieses nach den Hauptachsen des Polarisationsellipsoides und bezeichnen die auftretenden Komponenten mit μ_1, μ_2 und μ_3.

Die erwähnte Orientierungstheorie sagt nun aus, daß ein Molekül unter der Wirkung eines konstanten elektrischen Feldes bestrebt ist, sich einerseits mit der Richtung seines Dipolmomentes, andererseits mit der Richtung seiner größten statischen Polarisierbarkeit in die Feldrichtung einzustellen. Die thermische Bewegung der Moleküle wirkt dem entgegen. Das Resultat der einander entgegengesetzten Wirkungen wird ein dynamisches Gleichgewicht sein. Die Anisotropie dieser Orientierung verursacht eine optische Anisotropie, deren ausgezeichnete Achse die Feldrichtung ist.

Die Einstellung im elektrischen Feld können wir ebenso berechnen, wie wir das in § 13 getan haben. Da es sich jedoch jetzt um einen Effekt zweiter Ordnung handelt und die Energie der fertigen Dipole der Feldstärke proportional ist, so wird das von diesen Dipolen herrührende Glied dem Quadrat der abso-

luten Temperatur umgekehrt proportional sein. Die von den Polarisierbarkeiten herrührende Energie ist jedoch dem Quadrat der Feldstärke proportional. Das von der statischen Polarisierbarkeit verursachte Glied wird also nur der ersten Potenz der absoluten Temperatur umgekehrt proportional sein.

Die ziemlich langwierige, jedoch auf elementarem Wege durchführbare Rechnung liefert im Falle von Gasen die folgende Formel:

$$\begin{aligned} K &= \frac{n_p - n_s}{n} \cdot \frac{1}{E^2} \\ &= \pi N \left\{ \frac{1}{15 k^2 T^2} \left[(\mu_1^2 - \mu_2^2)(b_1 - b_2) + (\mu_2^2 - \mu_3^2)(b_2 - b_3) + (\mu_3^2 - \mu_1^2)(b_3 - b_1) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{15 k T} \left[(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) + (a_2 - a_3)(b_2 - b_3) + (a_3 - a_1)(b_3 - b_1) \right] \right\}, \qquad (178) \end{aligned}$$

wobei k die BOLTZMANNsche Konstante bedeutet und N die Zahl der Moleküle in einem cm^3 ist. In Flüssigkeiten hat der auftretende Effekt dieselben physikalischen Ursachen. Nur sind die Verhältnisse theoretisch viel verwickelter, weil die Nachbarmoleküle sich gegenseitig stark beeinflussen. In Gleichung (178) ist das erste Glied in der geschweiften Klammer – das zu $1/T^2$ proportional ist – das Dipolglied und das zweite – das zu $1/T$ proportional ist – das Anisotropieglied.

Für die gemessenen Hauptpolarisierbarkeiten der Moleküle haben wir schon einige Beispiele in § 10 mitgeteilt, wo wir ebenfalls schon erwähnt haben, daß die Hauptpolarisierbarkeiten aus der gemessenen KERRkonstante, aus der Depolarisation bei der molekularen Lichtstreuung und aus dem Brechungsindex berechnet wurden.

Zuletzt wollen wir den sehr wichtigen Umstand noch einmal hervorheben, daß man die Formel (178) auch aus der Quantenmechanik herleiten kann.

§ 20. Der COTTON-MOUTON-Effekt

Einige Stoffe werden im magnetischen Kraftfeld doppelbrechend. Diese Erscheinung, die ein magnetisches Analogon des elektrooptischen KERReffektes ist, nennen wir den COTTON-MOUTON-Effekt. Analog zu Gleichung (176) wird durch

$$C = \frac{n_p - n_s}{\lambda} \cdot \frac{1}{H^2} \qquad (179)$$

die COTTON-MOUTON-Konstante definiert. Dieser Effekt ist also ebenfalls von zweiter Ordnung. Ein sehr wesentlicher Unterschied gegenüber der Theorie des KERReffektes ist jedoch der, daß man die richtige Theorie des COTTON-MOUTON-Effektes nur auf der Grundlage der Quantenmechanik ausarbeiten kann. Der COTTON-MOUTON-Effekt ist klein und ist deshalb schwer zu messen. Im Falle von Gasen – was ja in erster Linie theoretisch interessant ist – ist es erst in der letzten Zeit unter Anwendung sehr hoher Drucke gelungen, den Effekt an N_2, O_2 und NO zu messen und die erhaltenen Resultate mit der Theorie zu vergleichen. Der COTTON-MOUTON-Effekt liefert auch interessante Aufschlüsse

bezüglich des Aufbaues der Moleküle, hat jedoch bei weitem nicht die große Bedeutung wie der KERReffekt.

Der FARADAYeffekt hat demgegenüber kein elektrisches Analogon, was davon herrührt, daß es keine zu den diamagnetischen analoge „diaelektrischen“ Erscheinungen gibt.

DAS MAGNETISCHE VERHALTEN DER KÖRPER

§ 21. Der Diamagnetismus

In § 6 unseres ersten Kapitels haben wir eigentlich schon die Theorie des Diamagnetismus ausgearbeitet und beschränken uns hier deshalb nur auf einige Bemerkungen. Die Quantenmechanik liefert uns die Tatsache, daß in Atomen, Ionen und Molekülen den Kern umkreisende Elektronen tatsächlich vorhanden sind. Wenn wir diese Teilchen in ein magnetisches Feld bringen, so superponiert sich zu den Umlaufsfrequenzen unserer Elektronen nach den Formeln (43) und (46) von § 5 noch die sogenannte LARMORpräzession:

$$2\pi \nu_L = \omega_L = -\frac{e^2 H}{2mc}. \tag{180}$$

Diese Änderung der Umlaufsfrequenz verursacht ein magnetisches Moment, für das wir nach Formel (57) des § 6 den Zusammenhang

$$\mu = kH = -\frac{e^2 H}{6mc^2} \sum_i \overline{R_i^2} \tag{181}$$

erhielten. Unsere jetzt benutzte Formel bezieht sich auf ein einziges Atom oder Molekül, deshalb haben wir den Faktor N im Zähler, der die Anzahl der Teilchen in einem cm^3 bedeutet, weggelassen.

Der Diamagnetismus ist eine ganz allgemeine Eigenschaft der Materie. Jeder Stoff ist diamagnetisch. Bei den paramagnetischen und ferromagnetischen Substanzen verdeckt nur ein viel größerer Effekt von entgegengesetztem Vorzeichen den Diamagnetismus.

Weil die diamagnetische Suszeptibilität eines Atoms oder Ions eine sehr kleine Zahl ist, so wird in der Literatur meistens die diamagnetische Suszeptibilität eines Gramm-Atoms oder Gramm-Moleküls angegeben, d. h. das Produkt von k [vgl. Formel (181)] mit der LOSCHMIDTschen Zahl. Diese Größe bezeichnen wir mit

$$\varkappa = -\frac{e^2 L}{6mc^2} \sum_i \overline{R_i^2}. \tag{182}$$

In der folgenden Tabelle haben wir einige sich auf die diamagnetische Suszeptibilität beziehende Meßergebnisse zusammengestellt. Die darin stehenden

Zahlenangaben sind alle mit 10^{-6} zu multiplizieren und sind alle mit negativen Vorzeichen zu nehmen.

F^-	Cl^-	Br^-	J^-	He	Ne	A	Kr	X
8,1	29,0	54,0	80,0	1,54	5,7	21,5	42,0	66,0

Li^+	Na^+	K^+	Rb^+	Cs^+
0,63	4,2	16,7	35,0	55,0

Da wir aus diesen Zahlenwerten die diamagnetische Suszeptibilität eines Atoms erhalten, indem wir diese Daten – mit 10^{-6} multipliziert – durch die LOSCHMIDTsche Zahl dividieren, so können wir sehen, wie außerordentlich klein die diamagnetische Suszeptibilität eines einzigen Atoms ist. So beträgt z. B. die eines Argonatoms $-3{,}55 \cdot 10^{-29}$ cgs Einheiten.

Wir bemerken noch, daß wir in der Formel (57) des § 6 die Suszeptibilität der in einem cm^3 enthaltenen Materie einfach so berechnet haben, daß wir die Suszeptibilität eines Atoms (bzw. Ions) mit der Zahl der in einem cm^3 enthaltenen Atome multipliziert haben. Diese Methode ist jedoch nicht ganz streng, weil wir ja dann die Erscheinung, daß die in den einzelnen Atomen induzierten magnetischen Momente sich auch gegenseitig beeinflussen, vernachlässigt haben. Das Problem des LORENTZschen inneren Feldes haben wir schon in § 12 ausführlich besprochen. Auf magnetische Erscheinungen ist unser dort besprochener Gedankengang unmittelbar übertragbar, so daß wir gleich die fertigen Resultate übernehmen können. Wenn wir die Formel (91) des Paragraphen 12 auf den Fall der magnetischen Erscheinungen umdeuten, so folgt

$$H_i = H + \frac{4\pi}{3} I, \tag{183}$$

wobei H_i das vollständige magnetische Feld, dem das Teilchen im Inneren der Materie unterworfen ist, bedeutet. H ist das äußere magnetische Feld und I das in der Volumeneinheit induzierte Moment. $\frac{4\pi}{3} I$ ist der Anteil des Feldes, der von den in den benachbarten Teilchen induzierten Momenten herrührt. Bezeichnen wir die diamagnetische Suszeptibilität eines cm^3 Materie mit $\varkappa_N$, so ist

$$I = \varkappa_N H. \tag{184}$$

Wenn wir k mit H_i multiplizieren, so erhalten wir das in einem Teilchen induzierte Moment. Und wenn wir dies weiter mit der Zahl der in einem cm^3 enthaltenen Teilchen vervielfältigen, so erhalten wir ebenso

$$I = k H_i N. \tag{185}$$

Wenn wir Gleichung (184) in Gleichung (183) einsetzen, das Resultat mit $k \cdot N$ multiplizieren und Gleichung (185) berücksichtigen, so folgt

$$\varkappa_N H = k N \left(H + \frac{4\pi}{3} \varkappa_N H\right) \tag{186}$$

oder umgeordnet und vereinfacht

$$\varkappa_N = \frac{kN}{1 - \frac{4\pi}{3} kN}. \tag{187}$$

Diese Formel gibt unter Berücksichtigung des LORENTZschen inneren Feldes die Suszeptibilität der in einem cm³ enthaltenen Materie an, wenn die Suszeptibilität eines Atoms oder Moleküls k ist. Wir sehen, daß bei Nichtvorhandensein des Nenners die Suszeptibilität der in einem cm³ enthaltenen Materie einfach gleich der Suszeptibilität eines Teilchens, multipliziert mit der Zahl dieser Teilchen, sein würde. Die Abweichung verursacht das innere Feld. Bei diamagnetischen Erscheinungen ist jedoch dieser Unterschied immer ganz unbedeutend, weil k, wie wir das im Falle des Argons berechnet haben, von der Größenordnung 10^{-29} cgs-Einheiten ist. Wenn wir den Nenner der Gleichung (187) berücksichtigen und für N die Zahl der in 1 cm³ enthaltenen Teilchen einsetzen, so wird auch dann das zweite Glied im Nenner von Gleichung (187) neben der Einheit immer vernachlässigbar klein sein. Hier ist die Ursache, warum wir bei diamagnetischen Erscheinungen ohne Bedenken einfach mit der Zahl der Teilchen multiplizieren können. Im analogen elektrischen Fall ist das jedoch – wie bereits berechnet – nicht immer der Fall, und analog auch bei den paramagnetischen und ferromagnetischen Erscheinungen nicht.

§ 22. Der Diamagnetismus der Moleküle

Die diamagnetische Suszeptibilität haben wir bis jetzt als skalare Größe behandelt. Tatsache ist aber, daß bei nicht kugelsymmetrischen Molekülen die Suszeptibilität in Richtung der verschiedenen Molekülachsen verschiedene Werte besitzt, ebenso wie wir das im Falle der elektrischen Polarisierbarkeit in § 10 gesehen haben. Gegenüber dem elektrischen Falle besteht darin ein großer Unterschied, daß bei den aliphatischen Verbindungen die diamagnetische Anisotropie sehr gering ist. Es bewährt sich in guter Näherung die Regel, daß man die diamagnetische Suszeptibilität eines Moleküls dadurch erhält, daß man die Suszeptibilitäten seiner Atome oder Ionen addiert. So erhalten wir z. B. die Suszeptibilität der Alkalihalogenidkristalle in sehr guter Näherung, wenn wir die aus unserer Tabelle entnommenen Suszeptibilitäten des negativen Halogenions und des positiven Alkaliions addieren.

Allgemein ist die diamagnetische Suszeptibilität von Kettenmolekülen (besonders von solchen, in welchen keine oder nur wenig Doppelbindungen enthalten sind) entlang der Achse ein wenig größer, senkrecht dazu dagegen etwas kleiner, als man nach der einfachen additiven Eigenschaft erwarten würde. Die theoretische Ursache dieser Erfahrung ist, daß bei der Molekülbildung nur die äußersten Elektronenbahnen modifiziert werden, für die diamagnetischen Erscheinungen dagegen alle Elektronen verantwortlich sind.

Ganz anders sind jedoch die Verhältnisse bei aromatischen Verbindungen. In einer Tabelle teilen wir einige Werte mit. Mit $\varkappa_1$ bezeichnen wir die Suszeptibili-

tät senkrecht zur Ebene des Moleküls, mit $\varkappa_2$ die entlang seiner Längsachse und mit $\varkappa_3$ die senkrecht zu dieser Längsachse in der Ebene des Moleküls:

	$\varkappa_1 \cdot 10^{+6}$	$\varkappa_2 \cdot 10^{+6}$	$\varkappa_3 \cdot 10^{+6}$
Benzol	— 91,2	— 37,3	— 37,3
Naphthalin	— 187,2	— 39,4	— 43,0
Anthrazen	— 275,5	— 45,9	— 52,7

Wir sehen, daß die diamagnetische Anisotropie dieser kondensierten aromatischen Verbindungen gegenüber den aliphatischen Verbindungen auffallend groß ist und daß die ausgezeichnete Richtung dabei, in der die Suszeptibilität so ungewöhnlich groß ist, senkrecht auf der Ebene der Benzolringe steht. Nach dem Modell von KEKULÉ sind im Benzolring abwechselnd einfache und doppelte Bindungen vorhanden. Doch hat man diesen letzteren Umstand schon aus rein chemischen Gründen bezweifelt, weil es danach z. B. zwei verschiedene Orthoderivate geben müßte, je nach dem, ob die zwei Substituenten an einer Einfach- oder einer Doppelbindung benachbart sind. Nach unseren modernen, sich auf die Struktur der Materie beziehenden Kenntnissen sind diese alternierenden Einfach- und Doppelbindungen im Benzolring tatsächlich nicht vorhanden, sondern die Doppelbindungen sind entlang des ganzen Ringes verschmiert. Die diamagnetische Anisotropie ist ein interessanter Beweis für diese Auffassung. Die überzählige Bindungen verursachenden Elektronen bewegen sich frei entlang des Ringes, beschreiben eine viel größere geschlossene Bahn als die ein Atom umkreisenden Elektronen. Deshalb ist die diamagnetische Suszeptibilität senkrecht zur Ebene des Benzolringes viel größer als entlang den anderen beiden Richtungen. Wir wissen, daß das Naphthalin aus zwei, das Anthrazen aus drei kondensierten Benzolringen besteht. Aus unserer Tabelle ist es tatsächlich sehr gut zu ersehen, wie die Suszeptibilität senkrecht zur Ebene des Moleküls zunimmt, entsprechend der Tatsache, daß die Bahnen der überzähligen Elektronen in der erwähnten Reihe immer größer werden.

Ein weiteres interessantes Beispiel ist der Graphit. Wie wir wissen, besitzt er ein Schichtengitter. Die einzelnen Schichten enthalten eine Vielzahl von Benzolstrukturen. Nach den Messungen ist der Graphit so stark diamagnetisch anisotrop, daß die Suszeptibilität senkrecht zu diesen Schichten (entlang der kristallographischen Achse) rund sechzigmal so groß ist wie senkrecht zu dieser Achse. Die Ursache dieser Erscheinung ist klar: Im Graphit können die Elektronen innerhalb einer Schicht eine sehr große geschlossene Bahn beschreiben. – Ein weiteres interessantes Beispiel für die diamagnetische Anisotropie ist das Wismut, bei dem aber die Anisotropie eine ganz andere Ursache hat.

§ 23. Der Paramagnetismus

Wenn die Bausteine der Materie (Atome, Ionen, Moleküle) fertige magnetische Dipolmomente besitzen, dann ist ein äußeres Magnetfeld bestrebt, diese Momente in seine Richtung einzustellen. Diese Erscheinung nennen wir den Paramagnetismus und die davon herrührende Suszeptibilität die paramagnetische

Suszeptibilität. Diese ist entgegen den beim Diamagnetismus auftretenden Verhältnissen immer positiv, was wir einsehen können, wenn wir bedenken, daß z. B. das Feld eines positiven Pols den negativen Pol der kleinen Magneten anzieht usw. Ein sehr wichtiger Unterschied der diamagnetischen Erscheinungen ist jedoch der, daß der Diamagnetismus die untrennbare Eigenschaft jeder Materie ist. Demgegenüber können wir vom Paramagnetismus sagen, daß er eine „Ausnahmeeigenschaft" der Materie ist, die nur unter speziellen Verhältnissen auftritt. Um das einzusehen, beschränken wir uns auf folgende Bemerkungen: Einerseits wissen wir, daß in jeder Materie die Atomkerne von Elektronen umkreist werden. Am Ende des § 7 haben wir außerdem die Entdeckung von UHLENBECK und GOUDSMIT, den Elektronenspin, erwähnt. Selbstverständlich verursachen beide Erscheinungen ein paramagnetisches Moment, weil ja einer umlaufenden Ladung oder einer sich drehenden geladenen Kugel ein kleiner Kreisstrom entspricht, der ein magnetisches Moment besitzt. Die Erfahrung lehrt aber (und die Quantenmechanik rechtfertigt dies auch), daß sich im allgemeinen Falle die Elektronenbahnen und Spins innerhalb eines Atoms oder Moleküls so orientieren, daß sie paarweise ein Moment von gleicher Größe, jedoch entgegengesetzter Richtung verursachen, die sich demzufolge gegenseitig aufheben. Eine solche Materie ist dann nur diamagnetisch. Zum Auftreten der paramagnetischen Erscheinungen ist also notwendig, daß aus irgendeiner Ursache diese paarweise Vernichtung der Momente unterbleibt.

Bei normaler Temperatur verfügen wir nur über zwei gasförmige und leicht herstellbare Stoffe, die paramagnetisch sind. Der eine ist das O_2, bei dem der Paramagnetismus dadurch verursacht wird, daß sonderbarerweise die Spins der zwei äußersten Elektronen des Moleküls sich nicht zueinander antiparallel, sondern parallel einstellen. Das zweite Beispiel ist das NO. Da das Stickstoffatom 7 und das Sauerstoffatom 8 Elektronen besitzt, also die Summe aller Elektronen des Moleküls ungerade ist, kann das spin- und bahnmagnetische Moment des einen überschüssigen Elektrons zur Geltung kommen. Bei Flüssigkeiten und festen Körpern gibt es selbstverständlich noch viele Beispiele für den Paramagnetismus, so sind z. B. die Verbindungen der ferromagnetischen Elemente meist paramagnetisch. Hier wollen wir nur nebenbei bemerken, daß die ferromagnetischen Körper eigentlich paramagnetische Körper sind, die ein so starkes inneres Feld besitzen, daß sich die kleinen (atomaren) Magnete demzufolge gegenseitig einstellen können. Solche Materialien sind Eisen, Kobalt und Nickel. Wenn diese Elemente eine Verbindung eingehen, dann sind die ferromagnetischen Ionen schon meist so weit voneinander entfernt, daß sie sich gegenseitig nicht einstellen könnten. Ihr magnetisches Moment stellt sich jedoch in einem äußeren Felde ein, und die Verbindung wird deshalb paramagnetisch. Der Paramagnetismus bzw. Ferromagnetismus dieser Atome (oder richtiger: Ionen) kommt dadurch zustande, daß eine innere Elektronenschale (nach der Bezeichnung der Quantenmechanik die $3d$-Schale) nicht voll besetzt ist. Die magnetischen Momente der dortigen Elektronen sind also nicht ganz kompensiert und kommen deshalb zur Geltung. Auf Grund einer ähnlichen Ursache treten paramagnetische Erscheinungen bei den Verbindungen der seltenen Erden auf, bei denen die $4f$-Schale nicht vollständig besetzt ist. Paramagnetisch

sind außerdem mehrere Metalle und deren Verbindungen usw. Wir sehen, daß zwischen dem Diamagnetismus und dem Paramagnetismus nicht ein gradueller Unterschied besteht, wie man das nach dem Experiment erwarten könnte, daß sich ein schwach paramagnetischer Körper in einem stark paramagnetischen Medium so verhält, als wenn er diamagnetisch wäre, sondern daß die gänzlich verschiedene Natur der Erscheinungen den Unterschied hervorbringt.

§ 24. Die paramagnetische Suszeptibilität

Das magnetische Feld ist bestrebt, die kleinen elementaren Magnete in seine Richtung einzustellen. Dieser Einstellung der Elementarmagnete wirkt die thermische Bewegung entgegen, so daß ein dynamisches Gleichgewicht entsteht, welches die paramagnetische Suszeptibilität des Stoffes bestimmt. Zur Berechnung der paramagnetischen Suszeptibilität können wir genauso verfahren, wie wir das im elektrischen Falle (§ 13) getan haben. Nur auf einen wichtigen Unterschied wollen wir hinweisen: Im Falle der elektrischen Erscheinungen rechtfertigen die aus den klassischen Berechnungen erhaltenen Resultate im vollen Umfange auch die Quantenmechanik; bei den magnetischen Erscheinungen ist das jedoch nicht der Fall. Beim Vorliegen sehr großer Quantenzahlen gehen die Resultate der Quantenmechanik asymptotisch in die der klassischen Theorie über. Im Falle von kleinen Quantenzahlen – und das ist eben der wichtige Fall – stimmen zwar qualitativ die Ergebnisse der beiden Theorien überein, quantitativ jedoch nicht vollständig. Nach dieser kleinen Abweichung schreiben wir jetzt unsere in § 13 erhaltenen Resultate für den magnetischen Fall um. Wir bezeichnen das magnetische Moment des Atoms, Ions oder Moleküls ebenfalls mit μ und die Feldstärke mit H. Die Energie unseres n-ten Teilchens im magnetischen Felde wird jetzt, wenn wir den Winkel, den die Richtung des magnetischen Momentes und die Feldrichtung einschließt, mit ϑ_n bezeichnen, in Analogie zur Formel (94) in § 13 durch die Formel

$$V(\vartheta_n) = -H\mu\cos\vartheta_n \tag{188}$$

gegeben sein.

Wenn wir wieder die BOLTZMANNstatistik anwenden, so erhalten wir für den Mittelwert von ϑ [vgl. die analoge Formel (101) in § 13]:

$$\overline{\cos\vartheta} = \frac{\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \cos\vartheta\, e^{\frac{H\mu\cos\vartheta}{kT}} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}{\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} e^{\frac{H\mu\cos\vartheta}{kT}} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}. \tag{189}$$

Unter der Annahme, daß die magnetische Energie so klein ist, daß wir Zähler und Nenner in eine Reihe entwickeln können, folgt

$$\overline{\cos\vartheta} = \frac{1}{3}\frac{H\mu}{kT}. \tag{190}$$

Für den Mittelwert des magnetischen Momentes entlang der Feldrichtung ergibt sich also aus Gleichung (190)

$$\mu \cdot \overline{\cos\vartheta} = \frac{1}{3} \frac{H\mu^2}{kT}. \tag{191}$$

Wenn die Zahl der ein magnetisches Moment der Größe μ besitzenden Partikeln in der Volumeneinheit gleich N ist, folgt für das magnetische Moment der Volumeneinheit, d. h. für die magnetische Polarisation,

$$I = \frac{1}{3} \frac{N\mu^2}{kT} H \tag{192}$$

und daraus für die magnetische Suszeptibilität

$$\chi = \frac{1}{3} \frac{N\mu^2}{kT}. \tag{193}$$

Bezüglich der Herleitung dieser Formel müssen wir noch zwei Bemerkungen machen. Zunächst bleibt die Frage offen, ob die erwähnte Reihenentwicklung [vgl. § 13, Formeln (102) und (103)] auch im magnetischen Falle tatsächlich erlaubt ist. Unter normalen Verhältnissen ist die magnetische Energie tatsächlich so klein, daß das zweifellos der Fall ist. Nur unter Anwendung von extrem hohen Feldstärken oder sehr tiefen Temperaturen ist es gelungen, auf experimentellem Wege zu zeigen, daß geringfügige Abweichungen von der Formel (193) auftreten. Unter Anwendung von sehr tiefen Temperaturen ist das KAMERLINGH ONNES und auf einem indirekten Wege J. BECQUEREL und W. DE HAAS gelungen. Unsere zweite Bemerkung bezieht sich auf das magnetische Feld. Selbstverständlich müßte man auch hier das äußere magnetische Feld durch das innere Feld ersetzen, wie wir das schon öfters und zuletzt bei den diamagnetischen Erscheinungen gesehen haben. Doch ist diese Korrektion auch bei den paramagnetischen Erscheinungen von untergeordneter Bedeutung. Ganz anders sind die Verhältnisse in beiden Fällen bei den ferromagnetischen Körpern.

Nach der Quantentheorie stellt sich das magnetische Moment nicht kontinuierlich ein, sondern – wenn wir die Quantenzahl des Atoms mit j bezeichnen – nur so, daß allein die Werte

$$\cos\vartheta_m = -1, \quad -\frac{j-1}{j}, \quad -\frac{j-2}{j} \cdots +\frac{j-2}{j}, \quad +\frac{j-1}{j}, \quad +1 \tag{194}$$

erlaubt sind. Unter Berücksichtigung dieses Umstandes wird das mathematische Problem eigentlich einfacher, weil wir jetzt in der Formel (189) statt zu integrieren einfach nur über die in Gleichung (194) angegebenen Zustände summieren müssen. Wenn wir wieder die in § 13 benutzten Reihenentwicklungen anwenden, dann müssen wir die folgenden Summen berechnen:

$$\sum_m \cos\vartheta_m = -1 - \frac{j-1}{j} - \frac{j-2}{j} \cdots + \frac{j-2}{j} + \frac{j-1}{j} + 1 = 0 \tag{195}$$

und

$$\sum_m \cos^2\vartheta_m = (-1)^2 + \left(\frac{j-1}{j}\right)^2 + \left(\frac{j-2}{j}\right)^2 \cdots + \left(\frac{j-2}{j}\right)^2 + \left(\frac{j-1}{j}\right)^2 + 1$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{j(j+1)(2j+1)}{j^2}. \tag{196}$$

Die Richtigkeit der Gleichung (196) können wir einsehen, wenn wir bedenken, daß bei Multiplikation der ganzen Gleichung mit j^2 auf der rechten Seite der zweifache Wert der Quadratsumme der ganzen Zahlen von 1 bis j steht.

Nach den obigen Ausführungen formen wir in unserer Formel (189) alle Integrale in Summen um:

$$\overline{\cos\vartheta_m} = \frac{\sum\limits_m \cos\vartheta_m\, e^{\frac{H\mu\cos\vartheta_m}{kT}}}{\sum\limits_m e^{\frac{H\mu\cos\vartheta_m}{kT}}}. \tag{197}$$

Wenn wir Zähler und Nenner in eine Reihe entwickeln, so erhalten wir

$$\sum_m \cos\vartheta_m\, e^{\frac{H\mu\cos\vartheta}{kT}} = \sum_m \cos\vartheta_m + \frac{H\mu}{kT}\sum_m \cos^2\vartheta_m \tag{198}$$

und

$$\sum_m e^{\frac{H\mu\cos\vartheta}{kT}} = \sum_m \left(1 + \frac{H\mu}{kT}\cos\vartheta_m\right). \tag{199}$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (195) und (196) in (198) und (199) unter Berücksichtigung, daß auf der rechten Seite von Gleichung (199) dann nur das erste Glied stehen bleibt und daß die Summation über alle in Gleichung (194) angegebenen Zustände $(2j+1)$ ergibt, folgt für

$$\mu\,\overline{\cos\vartheta_m} = \frac{1}{3}\,\frac{\mu^2 H}{kT}\cdot\frac{j+1}{j}. \tag{200}$$

Die Suszeptibilität ist dann in Analogie zu Gleichung (193)

$$\chi = \frac{1}{3}\,\frac{N\mu^2}{kT}\cdot\frac{j+1}{j}. \tag{201}$$

Wir sehen, daß die quantentheoretische Formel nur im letzten Faktor von der klassischen verschieden ist und im Falle von großen Quantenzahlen (großen j) in die klassische übergeht.

Wenn wir die Suszeptibilität nicht auf die Volumeneinheit, sondern auf ein Mol der Substanz beziehen und die LOSCHMIDTsche Zahl wieder mit L bezeichnen, dann geht unsere Formel (193) in

$$\chi_M = \frac{1}{3}\,\frac{L\mu^2}{kT} = \frac{C}{T} \tag{202}$$

über, in der wir C die CURIEkonstante nennen. Die quantentheoretische Formel unterscheidet sich von Gleichung (202) dadurch, daß der Faktor $\frac{j+1}{j}$ hinzutritt:

$$C = \frac{1}{3}\,\frac{L\mu^2}{k}\cdot\frac{j+1}{j}. \tag{203}$$

Nach der Formel (62) – siehe § 7 – besteht folgender Zusammenhang zwischen dem magnetischen Moment (μ) und dem mechanischen Impulsmoment (J) der umlaufenden Elektronen:

$$\frac{\mu}{J} = \frac{e}{2mc}. \tag{204}$$

Da nach der Quantentheorie

$$J = \frac{h}{2\pi}\,j = \hbar\cdot j; \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \tag{205}$$

ist, so folgt, wenn wir Gleichung (205) in Gleichung (204) einsetzen:

$$\mu = \frac{h\,e}{4\pi\,m\,c}\,j. \tag{206}$$

Da h, e, m und c Konstanten sind, so folgt, daß das magnetische Moment immer ein ganzzahliges Vielfaches der Größe

$$\mu_B = \frac{h\,e}{4\pi\,mc} \tag{207}$$

ist. Diese natürliche Einheit des magnetischen Momentes nennen wir BOHRsches Magneton; sein numerischer Wert ist

$$\mu_B = 0{,}917\cdot 10^{-20}\ \text{Gauß}\cdot\text{cm}^3. \tag{208}$$

In § 7 haben wir gesehen, daß bei Berücksichtigung des sogenannten Elektronenspins das Verhältnis der zwei Momente den doppelten Wert des in Gleichung (204) angegebenen ergibt. Wenn der Bahn- wie der Spinimpuls gleichzeitig auftreten, dann können wir unsere Formel (204) schreiben:

$$\frac{\mu}{J} = g\,\frac{e}{2mc}, \tag{209}$$

wobei jetzt der numerische Faktor g den vorher erwähnten Umstand berücksichtigt. Das magnetische Moment ist dann mit Hilfe der in Gleichung (207) eingeführten Bezeichnung

$$\mu = \mu_B\,g\,j. \tag{210}$$

Die quantentheoretische Formel können wir in der Form

$$\chi_M = \frac{1}{3}\,\frac{L\,g^2\,\mu_B^2\,j(j+1)}{kT} \tag{211}$$

schreiben. Wir können außerdem noch das Magneton nicht auf ein Atom, sondern auf ein Mol beziehen, d.h., wir können die Bezeichnung

$$M_B = \mu_B L = \frac{L h e}{4 \pi m c} \tag{212}$$

einführen. Berücksichtigen wir noch weiter, daß $k L = R$ ist, wobei R die absolute Gaskonstante bedeutet, so erhält Gleichung (211) die Form

$$\chi_M = \frac{M_B^2 g^2 j(j+1)}{3 R T}. \tag{213}$$

In dieser Form hat diese Formel zuerst F. Hund angegeben. Selbstverständlich sind die aus Gleichung (213) berechneten magnetischen Momente wegen des Auftretens des g-Faktors im allgemeinen Falle keine ganzzahligen Vielfache des Bohrschen Magnetons. Ein interessanter Umstand ist jedoch, daß sich die aus der klassischen Formel (202) berechneten magnetischen Momente

$$M = L\mu = \sqrt{3 R C} \tag{214}$$

bei vielen Substanzen angenähert als ein ganzzahliges Vielfaches des Wertes

$$M_W = 1123{,}5 \tag{215}$$

ergeben. P. Weiss, der zuerst diese Erfahrung machte, meinte, daß hier eine atomphysikalische Ursache vorliegen muß. Aus den Berechnungen der Quantenmechanik wissen wir, daß das nicht der Fall ist und die Beobachtung von Weiss ein bloßer Zufall war. Wir erwähnen diesen Umstand nur deshalb, weil es auch noch heutzutage üblich ist, die gemessenen Momente in Vielfachen des in Gleichung (215) abgegebenen „Weissschen Magnetons" anzugeben. Ein Weisssches Magneton ist annähernd ein Fünftel des in Gleichung (212) definierten Bohrschen Magnetons.

§ 25. Der Ferromagnetismus

Das Verhalten einiger Materialien wird durch eine anomal große Magnetisierbarkeit charakterisiert. Solche Materialien sind Eisen, Kobalt und Nickel, zwei Eisenerze, Magnetit und Pyrrhotin, einige Legierungen der erwähnten drei ferromagnetischen Elemente mit nicht ferromagnetischen Elementen und zuletzt die sogenannten Heuslerschen Legierungen. So sind z.B. einige Legierungen, die aus Mangan, Aluminium und Kupfer bestehen, ferromagnetisch, ohne daß irgendein Bestandteil dieser Legierungen ferromagnetisch ist. In neuester Zeit hat man entdeckt, daß auch ein Element der Gruppe der seltenen Erden, das Gadolinium, ferromagnetisch ist. Bei tieferer Temperatur sollen auch noch einige andere „seltene Erden" ferromagnetisch werden.

Diese ferromagnetischen Stoffe werden dadurch charakterisiert, daß sie schon bei einer relativ geringen Feldstärke – etwa 100 Gauß – bis zur Sättigung magnetisiert sind. Diese Sättigungsmagnetisierung kann nur unter Anwendung

von sehr hohen Feldern – in der Größenordnung von 10^4 Gauß – noch wenig erhöht werden. Weiterhin nimmt diese Magnetisierung mit zunehmender Temperatur zuerst langsam, dann immer schneller ab und zeigt in der Nähe der sogenannten CURIEtemperatur ein recht verwickeltes Verhalten. Oberhalb der CURIEtemperatur verliert die Materie ihre ferromagnetischen Eigenschaften und wird paramagnetisch. Die ferromagnetischen Substanzen gehorchen oberhalb ihrer CURIEtemperatur auch dem CURIEschen Gesetz, nur gegenüber der Formel (202) mit dem Unterschiede, daß jetzt im Nenner nicht die absolute Temperatur, sondern die Temperatur oberhalb des CURIEpunktes steht:

$$\chi = \frac{C}{T - \Theta}. \tag{216}$$

Θ ist die CURIEtemperatur des Stoffes. Gleichung (216) drückt das sogenannte CURIE-WEISSsche Gesetz aus.

Aus der anomal großen Magnetisierbarkeit der ferromagnetischen Stoffe folgt, daß die in der Theorie der paramagnetischen Stoffe gemachten Vernachlässigungen hier nicht mehr gerechtfertigt sind. Erstens kann man in den Formeln (189) bzw. (197) Zähler und Nenner nicht mehr in eine Reihe entwickeln. Andererseits kann man das innere Feld nicht mehr vernachlässigen.

Wir müssen zuerst die in Gleichung (189) stehenden Integrale genau berechnen. Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\frac{\mu H}{k T} = \alpha \quad \text{und} \quad \cos\vartheta = x. \tag{217}$$

Dann ist

$$\overline{\cos\vartheta} = \frac{\int\limits_{-1}^{+1} x e^{\alpha x} \, d x}{\int\limits_{-1}^{+1} e^{\alpha x} \, d x} = \mathfrak{Cot}\,\alpha - \frac{1}{\alpha}, \tag{218}$$

weil das im Nenner stehende Integral

$$\int\limits_{-1}^{+1} e^{\alpha x} \, dx = \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = \frac{2}{\alpha} \mathfrak{Sin}\,\alpha \tag{219}$$

ist. Für das im Zähler stehende Integral folgt mit Hilfe einer partiellen Integration:

$$\int\limits_{-1}^{+1} x \, e^{\alpha x} \, dx = 2\left(\frac{\mathfrak{Cof}\,\alpha}{\alpha} - \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha}{\alpha^2}\right). \tag{220}$$

Die auf der rechten Seite der Gleichung (218) stehende Funktion nennen wir die LANGEVINsche Funktion

$$L(\alpha) = \mathfrak{Cot}\,\alpha - \frac{1}{\alpha} = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha}. \tag{221}$$

Da $\mu \overline{\cos\vartheta}$ den Mittelwert der magnetischen Momente in der Feldrichtung bedeutet, den wir mit $\bar{\mu}$ bezeichnen, so folgt

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} = \overline{\cos\vartheta} = L(\alpha) = \mathfrak{Cot}\,\alpha - \frac{1}{\alpha}. \tag{222}$$

Zweitens müssen wir das innere Feld berücksichtigen. Bezeichnen wir dies mit $\mathfrak{F}$ und die Magnetisierung pro Volumeneinheit (also die magnetische Polarisation) mit $\mathfrak{M}$, dann haben wir die Vektorgleichung

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{H} + N\mathfrak{M}. \tag{223}$$

N ist eine Konstante, die ausdrückt, in welchem Maße die Magnetisierung im Inneren des fraglichen ferromagnetischen Körpers zunimmt. Diese Konstante nennen wir nach ihrem Entdecker die WEISSsche Konstante des inneren Feldes. Von ihrer Größe wird noch später die Rede sein.

Aus unserer Gleichung (222) erhalten wir die Magnetisierung, wenn wir den in der Feldrichtung genommenen Mittelwert $\bar{\mu}$ der magnetischen Momente mit der Zahl der sich in der Volumeneinheit befindenden Teilchen multiplizieren. Wenn wir ebenso μ mit dieser Zahl multiplizieren, so erhalten wir den Wert der Sättigungsmagnetisierung, den wir mit M_∞ bezeichnen:

$$\frac{M}{M_\infty} = L(\alpha) = \mathfrak{Cot}\,\alpha - \frac{1}{\alpha}. \tag{224}$$

Andererseits müssen wir berücksichtigen, daß es jetzt nicht genügt, in die Gleichung (217) das äußere Feld einzuführen. Wir müssen dafür die gesamte Feldstärke $\mathfrak{F}$ einsetzen, so daß

$$\alpha = \frac{\mu F}{k T} = \frac{\mu}{k T}(H + N M) \tag{225}$$

wird. Gleichung (225) können wir noch in folgender Form schreiben:

$$\frac{M}{M_\infty} = \alpha \frac{kT}{\mu N M_\infty} - \frac{H}{N M_\infty}. \tag{226}$$

Nehmen wir zuerst an, daß kein äußeres Feld vorhanden ist. Dann wird das zweite Glied der Gleichung (226) verschwinden. Betrachten wir jetzt ein Koordinatensystem, auf dessen Abszisse wir α und auf dessen Ordinate wir die Größe M/M_∞ auftragen (Abb. 6).

Der Gleichung (224) entspricht in diesem Koordinatensystem die Kurve L. Dagegen wird Gleichung (226) ohne zweites Glied durch eine durch den Anfangspunkt gehende Gerade dargestellt. Da beide Gleichungen gleichzeitig erfüllt sein müssen, so kann der tatsächlich auftretende Wert von M/M_∞ nur dem gemeinsamen Schnittpunkt der Kurve L und der Geraden entsprechen. Die Richtungstangente der erwähnten Geraden ist nach Gleichung (226):

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{M/M_\infty}{\alpha} = \frac{kT}{\mu N M_\infty}. \tag{227}$$

$\operatorname{tg}\delta$ ist also eine Funktion der Temperatur. Ähnlich bezeichnen wir die im Anfangspunkt genommene Richtungstangente der durch Gleichung (224) beschriebenen Kurve mit $\operatorname{tg}\gamma$. Dann sind zwei Fälle möglich. Im ersten Fall ist γ größer als δ. Die Gerade schneidet dann in einem bestimmten Punkt die Kurve. Aus der zu diesem Punkte gehörenden Ordinate erhalten wir M, also den Wert der spontanen Magnetisierung. Der zweite Fall, den wir besprechen müssen, entsteht dann, wenn $\gamma < \delta$ ist. Hier gibt es keinen Schnittpunkt, also ist $M = 0$, und es existiert keine spontane Magnetisierung. Die Materie ist in diesem Gebiet paramagnetisch. Wir sehen, daß die CURIEtemperatur der ferromagnetischen Substanz der Temperaturgrad ist, bei dem $\delta = \gamma$ ist. Die dazugehörende absolute Temperatur wird durch die Gleichung (227) definiert.

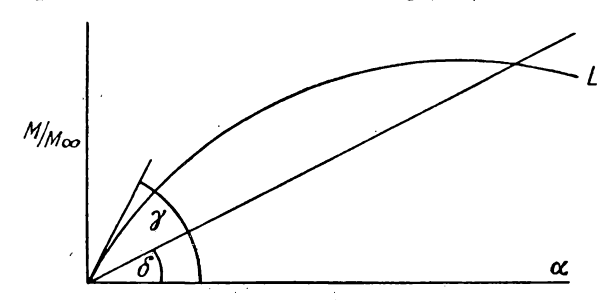


Abb. 6. Entstehung der spontanen Magnetisierung in ferromagnetischen Stoffen

Gegen unseren Gedankengang könnte man einwenden, daß sich auch dann, wenn $\gamma > \delta$ ist, die Gerade und die LANGEVIN-Kurve nicht nur in dem erwähnten Punkt, sondern auch im Anfangspunkt schneiden. Es müßte auch diesem Schnittpunkt ein möglicher Zustand entsprechen. Doch können wir leicht einsehen, daß dieser Zustand nicht stabil ist. Zum Beweis nehmen wir z. B. an, daß wir den Wert der Magnetisierung M ein wenig erhöhen. Dann muß nach Gleichung (225) α ebenfalls zunehmen. Nach der Abb. 6 gehört aber zu diesem α nach der die LANGEVINsche Funktion darstellenden Kurve ein noch größerer Wert von M usw. – M wird also so lange zunehmen, bis es den erwähnten Schnittpunkt erreicht, der nicht im Anfangspunkt liegt. Ähnlich kann man zeigen, daß der dem Anfangspunkt entsprechende Zustand auch dann nicht stabil ist, wenn wir die Magnetisierung herabsetzen. Ist ein äußeres magnetisches Feld vorhanden, so müssen wir in unserem Gedankengang nur die Änderung berücksichtigen, daß nach Gleichung (225) die Gerade jetzt nicht mehr durch den Anfangspunkt geht, sondern in einer endlichen Entfernung die Abszissenachse schneidet und der gesuchte Schnittpunkt der Geraden mit der LANGEVINkurve sich deshalb verschiebt. An unserem Gedankengange ändert dies jedoch nichts. Nach unserer obigen Definition ist $\operatorname{tg}\gamma$ die im Anfangspunkt auftretende Richtungstangente der LANGEVINkurve

$$\operatorname{tg}\gamma = L'(0)\,. \tag{228}$$

Da bei der CURIEtemperatur, die wir mit Θ bezeichnen, nach dem obigen

$$\gamma = \delta \tag{229}$$

ist, so folgt unter Berücksichtigung von Gleichung (227)

$$L'(0) = \frac{k\Theta}{\mu N M_\infty} \tag{229a}$$

oder

$$\Theta = \frac{\mu N M_\infty L'(0)}{k}. \tag{229b}$$

Setzen wir Gleichung (229a) in Gleichung (226) ein, so folgt

$$\frac{M}{M_\infty} = \alpha L'(0)\frac{T}{\Theta} - \frac{H\mu L'(0)}{k\Theta}. \tag{230}$$

Wir nehmen weiter an, daß wir im paramagnetischen Gebiet sind, also im ganz unteren Teil der LANGEVINkurve. Da die Kurve hier noch fast eine Gerade ist, so können wir Gleichung (224) durch die Gleichung

$$\frac{M}{M_\infty} = L'(0)\,\alpha \tag{231}$$

ersetzen und dadurch mit Gleichung (230) α eliminieren:

$$\frac{M}{M_\infty}\left(\frac{T}{\Theta} - 1\right) = \frac{H\mu L'(0)}{k\Theta}. \tag{232}$$

Da weiter $M/H = \chi$ ist, so folgt

$$\chi = \frac{M_\infty \mu L'(0)}{k} \cdot \frac{1}{T - \Theta}. \tag{233}$$

Dies ist das auf experimentellem Wege gefundene CURIE-WEISSsche Gesetz, welches wir auf rein theoretischem Wege hergeleitet haben. (Es sei hier nur noch bemerkt, daß sich jetzt χ nicht auf ein Mol, sondern auf die Volumeneinheit bezieht; dieselbe Bemerkung gilt auch für C.) Für die Konstante C folgt aus den Gleichungen (233) und (216)

$$C = \frac{M_\infty \mu L'(0)}{k} \tag{234}$$

oder unter Berücksichtigung von Gleichung (229a)

$$C = \frac{\Theta}{N}. \tag{235}$$

Aus unseren bisherigen Besprechungen folgt, daß die ferromagnetischen Materialien unterhalb ihrer CURIEtemperatur auch ohne Vorhandensein eines äußeren Feldes bis zur Sättigung magnetisiert sind. Andererseits müssen nach der Erfahrung die ferromagnetischen Stoffe doch einem magnetischen Felde ausgesetzt werden, damit sie tatsächlich Magnete werden. Worin liegt dieser scheinbare Widerspruch? Bevor wir einen ferromagnetischen Körper ins magnetische Feld bringen, gibt es für ihn gar keine ausgezeichnete Richtung. Es ist also tatsächlich so, daß alle Teile bis zur Sättigung magnetisiert sein werden. Doch

werden in sehr kleinen Elementargebieten dieses Körpers die Richtungen dieser Magnetisierungen in die verschiedensten Raumrichtungen zeigen und sich gegenseitig vernichten. Die Materie wird sich makroskopisch nicht wie ein Magnet verhalten. Ein verhältnismäßig schwaches äußeres Feld wird jedoch schon die Magnetisierungsrichtungen dieser kleinen Elementargebiete in seine eigene Richtung einstellen können. Der Körper wird demzufolge, auch vom makroskopischen Standpunkt aus betrachtet, magnetisch.

Das ist die Erklärung für die „Magnetisierung" im magnetischen Feld. Wenn wir hier von magnetischer Sättigung sprechen, so verstehen wir darunter den Wert der „spontanen Magnetisierung" bei der entsprechenden Temperatur. Ein äußeres magnetisches Feld ändert daran in erster Näherung gar nichts, weil es nur die Richtungen der vorher erwähnten Elementargebiete einstellt. Selbstverständlich nimmt aber im Falle eines sehr starken äußeren magnetischen Feldes auch der Wert der Magnetisierung selbst zu, weil sich der Schnittpunkt der LANGEVINkurve mit der durch Gleichung (225) definierten Geraden verschiebt. Diese Erscheinung ist nur bei extrem hohen Feldstärken von Bedeutung. Vom technischen Standpunkt verstehen wir unter Magnetisierung nur die Einstellung der Elementargebiete im magnetischen Feld.

Einige Zahlenangaben werden die hier auftretenden Verhältnisse deutlicher machen. Nach den experimentellen Ergebnissen wird das magnetische Verhalten des Eisens und des Nickels oberhalb der CURIEtemperatur durch die folgenden Formeln gekennzeichnet:

$$\left.\begin{aligned} \chi_{\mathrm{Fe}} &= \frac{0{,}0395\,\varrho_{\mathrm{Fe}}}{T-1047} \\ \text{und}\qquad \chi_{\mathrm{Ni}} &= \frac{0{,}0055\,\varrho_{\mathrm{Ni}}}{T-645}, \end{aligned}\right\} \tag{236}$$

wobei ϱ_{Fe} und ϱ_{Ni} die Dichten des Eisens und des Nickels bedeuten.

Vergleichen wir Gleichung (236) mit dem CURIE-WEISSschen Gesetz [siehe Formel (216)] oder mit der auf theoretischem Wege gewonnenen Formel (233), so erhalten wir für die CURIEtemperatur:

$$\Theta_{\mathrm{Fe}} = 1047^\circ\mathrm{K} \quad \text{und} \quad \Theta_{\mathrm{Ni}} = 645^\circ\mathrm{K}. \tag{237}$$

In gleicher Weise kann man aus (236), (237) und (235) die Konstanten des inneren Feldes für die Elemente Fe und Ni berechnen. Wir erhalten

$$N_{\mathrm{Fe}} = 3500 \quad \text{und} \quad N_{\mathrm{Ni}} = 14000. \tag{238}$$

Bezüglich der Frage, inwiefern die hier besprochene Theorie des Ferromagnetismus noch ergänzungsbedürftig ist, müssen wir noch einige Anmerkungen machen. Erstens haben wir in § 7 gesehen, daß allein der Elektronenspin das magnetische Verhalten der ferromagnetischen Stoffe verursacht. Wir müßten eigentlich statt unserer klassischen Formel (224) die quantenmechanische Formel (197) benutzen, in der die Quantenzahl m nur die Werte $\pm\frac{1}{2}$ besitzt. Außerdem können wir selbstverständlich bei ferromagnetischen Stoffen nicht

mehr die bei der Berechnung der Formel (197) angewandte Reihenentwicklung benutzen, sondern müssen die Integrale bzw. Summen genau berechnen, wie wir das schon im klassischen Falle bei unserer Formel (218) getan haben. Vollständigkeitshalber wollen wir erwähnen, daß man für den Wert $m = \pm\, {}^1/_2$ statt der klassischen Formel das Resultat

$$L_{1/2} = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}} \tag{239}$$

erhält. Am Wesen unseres besprochenen Gedankenganges ändert das jedoch nichts. Die Verhältnisse sind übrigens auch nach der Quantenmechanik nicht ganz so einfach, weil die ferromagnetischen Atome nicht nur ein Elektron mit einem nichtkompensierten Spinmoment enthalten.

Viel wichtiger ist folgender Umstand: Nach Gleichung (238) sind die Konstanten des inneren Feldes bei den ferromagnetischen Materialien sehr große Zahlen, deren Größenordnung um 10^3 oder 10^4 herum liegt. Andererseits haben wir in § 12 berechnet, daß die Konstante des LORENTZschen inneren Feldes $4\pi/3$ beträgt, zumal die Berechnung dieser Konstante mit prinzipiellen Schwierigkeiten verbunden ist, wie wir dies im obigen Paragraphen erwähnt haben. Wenn wir auch den berechneten Wert dieser Konstanten als nicht ganz zuverlässig betrachten müssen, so ist es dennoch klar, daß seine Größenordnung deshalb nicht unsicher sein kann. Dem steht gegenüber, daß bei ferromagnetischen Materialien gerade die aus den experimentellen Daten berechneten Konstanten des inneren Feldes um drei oder vier Größenordnungen größer sind. Hier liegt also ein schwerer Widerspruch vor. Es zeigt sich, daß die WEISSsche Theorie, welche das Verhalten der ferromagnetischen Stoffe auf das innere Feld zurückführt, phänomenologisch die ferromagnetischen Erscheinungen ganz einwandfrei beschreibt, doch dabei gezwungen ist, für das innere Feld sehr große Werte anzunehmen. Dieses Paradoxon war schon lange bekannt. Doch stand dem die klassische Theorie ganz machtlos gegenüber. Die tadellose Lösung dieses Problems ist dann auf der Grundlage der Quantenmechanik HEISENBERG gelungen. Zur Besprechung seines Gedankenganges müßten wir uns selbstverständlich auf die Resultate der Quantenmechanik berufen. Wir beschränken uns hier nur auf folgende Bemerkungen: Nach den obigen Ausführungen wird der Ferromagnetismus ausschließlich durch das vom Elektronenspin herrührende magnetische Moment verursacht. Aller Wahrscheinlichkeit nach geschieht dies nicht durch die fast freien äußersten Elektronen, welche die elektrischen Leitungserscheinungen verursachen, sondern durch die Elektronen, welche in einer inneren und nicht ganz abgeschlossenen Schale (der $3d$-Schale) vorhanden sind. Andererseits wissen wir seit den Untersuchungen von HEITLER und LONDON, daß das Wasserstoffmolekül von den sogenannten quantenmechanischen „Austauschkräften“ zusammengehalten wird. Das Austauschintegral ist meist negativ und erklärt eben deshalb das Zustandekommen der chemischen Bindung. Seine Größe beträgt einige Elektronenvolt. In einigen Fällen kann es aber auch positiv sein. Seine Größe beträgt dann nur einige zehntel Elektronenvolt. Das negative Austauschintegral bedeutet, daß sich die Spins zueinander antiparallel einstellen, also ihr magnetisches Moment gegenseitig vernichten.

Dieser Fall liegt bei der chemischen Bindung vor. Wenn dagegen das Austauschintegral positiv ist, dann stellen sich die Spins zueinander parallel ein. Das ist die Wechselwirkung, die nach der HEISENBERGschen Theorie die Spins im Inneren eines ferromagnetischen Stoffes zueinander parallel einstellt und demzufolge die Erfahrung erklärt, daß die Resultate der WEISSschen Theorie von den experimentellen Ergebnissen verizifiert werden, obwohl das von den magnetischen Momenten der einzelnen Spins herrührende innere Feld um 3–4 Größenordnungen zu klein ist. Das letztere wird durch die Austauschkräfte erklärt. Wir wollen nur darauf hinweisen, daß das Austauschintegral nach den Untersuchungen von BETHE dann positiv sein wird, wenn die Entfernungen der Atome im Verhältnis zu den Radien der Schalen der fraglichen Elektronen groß sind und die Nebenquantenzahl der erwähnten Elektronen groß ist. Beide Bedingungen sind bei den ferromagnetischen Elementen (Fe, Co, Ni) erfüllt. Wie wir erwähnten, wird der Ferromagnetismus der oben genannten Elemente durch die nicht komplette $3d$-Schale hervorgerufen. Da die seltenen Erden eine nicht abgeschlossene $4f$-Schale besitzen, war es naheliegend, daß der Ferromagnetismus auch bei diesen Elementen auftreten könnte. Tatsächlich konnten P. WEISS, G. URBAIN und F. TROMBE 1935 zeigen, daß das Gadolinium ferromagnetisch ist und seine CURIEtemperatur bei Zimmertemperatur ($16 \pm 2°$C) liegt. Nach neuesten Untersuchungen scheinen auch noch andere seltene Erden bei tieferen Temperaturen ferromagnetisch zu sein, bei Dy und Er wurde das schon auf experimentellem Wege verifiziert. Oft tauchte der Gedanke auf, ob es nicht auch einen „Kernspinferromagnetismus“ geben könnte. Nach den Rechnungen von FRÖHLICH und NABARRO könnte dieser z. B. bei Cu nur bei einer Temperatur von 10^{-6} °K auftreten.

Aus der Sättigungsmagnetisierung (M_∞) eines ferromagnetischen Materials kann man berechnen, wie viele nichtkompensierte Spinmomente in seiner $3d$-Schale enthalten sind. Dividieren wir M_∞ durch ϱ, so erhalten wir die Magnetisierung der Masseneinheit. Durch Multiplikation mit dem Atomgewicht A folgt die Magnetisierung eines Grammatoms. Wenn man diese Größe durch L (LOSCHMIDTsche Zahl) teilt, erhält man das magnetische Moment eines Atoms:

$$b = \frac{M_\infty}{\varrho} \cdot \frac{A}{L}.$$

Dividieren wir noch b durch μ_B (BOHRsches Magneton), so folgt die Zahl der nichtkompensierten Spins in der $3d$-Schale. Auf diesem Wege ergibt sich, daß beim Eisen auf ein Atom 2,2, beim Kobalt 1,7 und beim Nickel 0,6 nichtkompensierte Spins (BOHRsche Magnetonen) fallen.

Da der Aufbau der freien ferromagnetischen Atome bekannt ist (BOHRsche Tabelle des periodischen Systems) und außerdem jedes ferromagnetische Atom (Fe, Co, Ni) zwei $4s$-Elektronen besitzt, so kann man mit Hilfe der Zahlenangaben den Anteil der $4s$-Elektronen berechnen, der in die $3d$-Schale übergeht, und wie viele Elektronen als Leitungselektronen zur Verfügung stehen. Auf diese Fragen wollen wir hier nicht weiter eingehen. Die gebrochenen Elektronenzahlen stellen nach der Quantenmechanik kein Paradoxon dar. Anschaulich bedeutet dies nur soviel, daß ein Elektron sich statistisch teilweise im $3d$-Zustand und teilweise im $4s$-Zustand befindet.

§ 26. Die Magnetisierung von Einkristallen

Nach der HEISENBERG-WEISSschen Theorie besteht die technische Magnetisierung (d. h. die Magnetisierung tief unter der CURIEtemperatur und bei Feldstärken von einigen hundert Gauß) im wesentlichen darin, daß die Magnetisierungsrichtungen der bereits vorhandenen und bis zur Grenze der spontanen Magnetisierung magnetisierten Elementargebiete in die Richtung des äußeren Feldes eingestellt werden. Zur Untersuchung dieses Prozesses müssen wir in erster Linie feststellen, welche Kraft zur Einstellung der Magnetisierungsrichtungen der einzelnen Elementargebiete notwendig ist und welcher Natur diese Kräfte sind. Die Erfahrung, daß zur Magnetisierung endliche Kräfte notwendig sind, legt den Gedanken nahe, daß es bei Einkristallen eine ausgezeichnete Magnetisierungsrichtung geben muß.

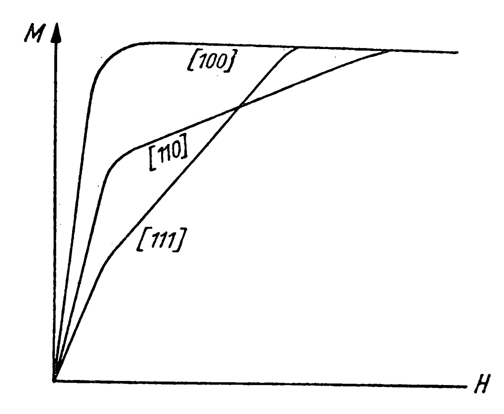


Abb. 7. Magnetisierung eines Eisen-Einkristalls

Betrachten wir von diesem Standpunkt aus zuerst das Verhalten des Eisens. Die Magnetisierung eines Eisen-Einkristalls veranschaulicht unsere Abb. 7. Das Eisen kristallisiert im regulären System. Es erreicht den Sättigungswert der Magnetisierung entlang den Würfelkanten mit zunehmender Feldstärke sehr schnell. Entlang einer Flächendiagonale oder in Richtung der Raumdiagonale des Würfels nimmt die Magnetisierung im Anfang ebenfalls außerordentlich schnell zu. Nach Erreichen eines gewissen Wertes verlangsamt sich der Magnetisierungsprozeß fast plötzlich und erreicht nur ganz allmählich den Sättigungswert. Daraus wird ersichtlich, daß beim Eisen die Richtung der spontanen Magnetisierung mit der kristallographischen Richtung der Würfelkante zusammenfällt, weil in dieser Richtung schon ein ganz kleines Feld (wegen der notwendigerweise vorhandenen Verunreinigungen und Gitterfehler kann es nicht infinitesimal klein sein) dazu genügt, daß sich ein Eisen-Einkristall in dieser Richtung bis zur Sättigung magnetisiert. Bei der Magnetisierung in der erwähnten Diagonalrichtung kann eine geringe Feldstärke die Magnetisierung nur so lange erhöhen, bis die Größe der Projektion der entlang der Würfelkanten auftretenden spontanen Magnetisierung erreicht wird. Von diesem Wert an muß das äußere Feld den Vektor der Magnetisierung von seiner Richtung parallel zu einer Würfelkante stufenweise in die Richtung der erwähnten Diagonalen verdrehen. Dazu ist aber eine viel größere Feldstärke notwendig. Dieser Umstand erklärt die scharfen, bei gewissen Feldstärken auftretenden Abweichungen von dem im Anfang fast mit der Ordinate parallelen Verlauf der anderen zwei Kurven in unserer Abb. 7. Beim Nickel treten analoge Verhältnisse auf, jedoch mit

dem Unterschied, daß bei diesem Metall die Richtung der spontanen Magnetisierung die der Raumdiagonalen des Würfels ist. (Das Ni kristallisiert ebenfalls im regulären System.) Etwas verwickelter liegen die Verhältnisse beim Kobalt, weil dieses Element im hexagonalen System kristallisiert. Ähnlich ist übrigens auch das Verhalten der in der Natur vorkommenden magnetischen Erze, des Pyrits und des Pyrrhotins. Ersteres kristallisiert im regulären, letzteres im hexagonalen System.

Wenn wir die äußere Feldstärke mit H und den Absolutbetrag des Magnetisierungsvektors im ferromagnetischen Stoff mit M bezeichnen, so wird in der ferromagnetischen Materie bei einer Magnetisierung bis zur Sättigung M_s die freie Energie

$$W = \int_0^{M_s} H\,d\,M \tag{240}$$

aufgespeichert. Die Differenz der Größen W für zwei verschiedene Richtungen gibt die Arbeit an, die man zur Drehung des Magnetisierungsvektors aus der einen Richtung in die andere aufwenden muß, unter der Annahme, daß der Kristall in beiden Fällen in demselben Grundzustand war.

Die nächste Frage, die wir beantworten müssen, betrifft die Abhängigkeit der magnetischen Energie von der Orientierung des Magnetisierungsvektors im Verhältnis zu den kristallographischen Achsen. Wir bezeichnen die Richtungskosinus der Winkel, welche der Magnetisierungsvektor mit den kristallographischen Achsen einschließt, mit α_1, α_2 und α_3. Dann kann die Gleichung für die Energie nicht die ungeraden Potenzen dieser Größen enthalten, weil bei Umkehr der Richtung der Feldstärke H die Energieglieder ihr Vorzeichen ändern müßten. Das ist unmöglich, weil es ja in den erwähnten Kristallsystemen keine solche ausgezeichnete Richtung gibt, welche nicht mit ihrer entgegengesetzten Richtung äquivalent wäre. Die niedrigsten Potenzen von α, die hier diskutabel wären, sind die Quadrate. Im regulären System sind weiter alle drei kristallographischen Achsen einander äquivalent. Die Richtungskosinus könnten nur in der Kombination $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$ auftreten. Da jedoch diese Summe gleich Eins ist, fällt die Abhängigkeit in diesem Fall fort. Es bleiben als niedrigste, nichtverschwindende Glieder die vierten Potenzen der α übrig. Wenn wir wieder die Äquivalenz der drei kristallographischen Achsen im regulären System berücksichtigen, so ergibt sich, daß nur folgende zwei Kombinationen auftreten können:

$$A = \alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4 \quad \text{und} \quad B = \alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2. \tag{241}$$

Es sind aber nicht einmal diese zwei Ausdrücke voneinander unabhängig. Bildet man das Quadrat von $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$, so erhält man den Zusammenhang $A + 2B = 1$. Es bleibt nur ein Ausdruck vierten Grades übrig. Wir benutzen im folgenden nur B. Von den Ausdrücken sechsten Grades kommen wegen der erwähnten Symmetrie des Gitters nur folgende in Betracht:

$$C = \alpha_1^6 + \alpha_2^6 + \alpha_3^6, \quad D = \alpha_1^4\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_2^4 + \alpha_2^4\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3^4 + \alpha_3^4\alpha_1^2 + \alpha_3^2\alpha_1^4 \tag{242}$$

und

$$E = \alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2.$$

(Diese sind gegenüber einer zyklischen Vertauschung der α invariant.) Wegen der evidenten Gleichung $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^3 = 1$ können wir z. B. den ersten Ausdruck im System (242) durch D und E ersetzen. Außerdem ist

$$\alpha_1^4\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_2^4 = \alpha_1^2\alpha_2^2\,(1 - \alpha_3^2),$$

so daß wir D mit dem in Gleichung (241) definierten B und dem hier angegebenen E ausdrücken können. Zum Schluß bleibt von den Gliedern sechsten Grades nur E übrig.

Wenn wir die Abhängigkeit der magnetischen Energie von den Richtungskosinus der Winkel, welche der Magnetisierungsvektor mit den kristallographischen Achsen einschließt, untersuchen und bis zu den Gliedern sechsten Grades gehen, so erhalten wir die Formel

$$F = K(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2) + K'\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2. \tag{243}$$

Die Richtungsabhängigkeit wird nur durch die Konstanten K und K' gekennzeichnet. In den meisten Fällen genügt es jedoch vollständig, die Glieder vierten Grades zu berücksichtigen, d.h. nur die Konstante K zu benutzen. Wenn der Magnetisierungsvektor parallel zu einer Würfelkante, zu einer Flächendiagonalen oder zur Raumdiagonalen des Würfels orientiert ist, so erhalten wir für die Werte von F unter Weglassung des zweiten Gliedes und Einsetzen der bekannten Werte für die Richtungskosinus

$$F_{100} = 0\,,$$

$$F_{110} = \frac{1}{4}\,K$$

und

$$F_{111} = \frac{1}{3}\,K. \tag{244}$$

Die Differenz $F_{111} - F_{100}$ liefert die Arbeit, die man bei einem Eisenkristall aufwenden muß, um den Magnetisierungsvektor aus der (natürlichen) Richtung entlang einer Würfelkante in die Richtung der Raumdiagonale zu zwingen. Diese Energie können wir aber auch nach Gleichung (240) dadurch erhalten (Abb. 7), daß wir das in Gleichung (240) stehende Integral entlang der mit [100] und [111] bezeichneten Kurven berechnen und die Differenz bilden. Wir berechnen damit den Flächeninhalt der von diesen zwei Kurven eingeschlossenen Fläche:

$$\int\limits_{[111]} H\,d\,M - \int\limits_{[100]} H\,d\,M = F_{111} - F_{100} = \frac{1}{3}\,K. \tag{245}$$

Da wir die Integrale durch Ausführung einer Messung bestimmen können, so läßt sich auch die Konstante K berechnen. Es sei noch bemerkt, daß diese Betrachtungen, die gar keine Hypothese bezüglich der physikalischen Natur der magnetischen Energie enthalten, sondern nur von geometrischen (bzw. kristallographischen) Betrachtungen ausgehen, größtenteils von Akulow herrühren.

§ 27. Die Magnetostriktion

Bekanntlich ist die freie Energie F_{el} eines elastisch deformierten Körpers ein quadratischer Ausdruck der Komponenten des Deformationstensors. Wir bezeichnen diese Komponenten mit A_{ik}. Ein nicht magnetischer Körper ist dann im Gleichgewicht, wenn diese freie Energie ihr Minimum erreicht. Es ist trivial, daß dann alle A_{ik} gleich Null sein müssen. Wenn jedoch das zu untersuchende Material magnetisierbar ist und außerdem tatsächlich bis zur Sättigung magnetisiert werden kann, so tritt infolge des magnetischen Zustandes eine freie Energie auf, die sowohl eine Funktion der Richtungskosinus des Magnetisierungsvektors α_1, α_2 und α_3 als auch der A_{ik} ist. Wir bezeichnen diese freie Energie mit F_A. Gehen wir ähnlich wie bei der Herleitung der Gleichung (243) vor, so erhalten wir folgende Zusammenhänge:

$$F_{el} = \frac{1}{2} c_1 (A_{11} + A_{22} + A_{33})^2 + c_2 (A_{11}^2 + A_{22}^2 + A_{33}^2) + 2 c_3 (A_{12}^2 + A_{23}^2 + A_{31}^2) \qquad (246)$$

und

$$F_A = s \left\{ A_{11} \left(\alpha_1^2 - \frac{1}{3} \right) + A_{22} \left(\alpha_2^2 - \frac{1}{3} \right) + A_{33} \left(\alpha_3^2 - \frac{1}{3} \right) \right\} + 2p \{ A_{12} \alpha_1 \alpha_2 + A_{23} \alpha_2 \alpha_3 + A_{31} \alpha_3 \alpha_1 \}, \qquad (247)$$

wobei c_1, c_2, c_3, s und p Konstanten sind.

Bei gegebenen Werten der mit α bezeichneten Richtungskosinus, die z.B. durch ein gegebenes äußeres Feld vorgeschrieben sein können, wird die freie Energie des fraglichen Körpers minimal sein, wenn die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial A_{ik}} (F_{el} + F_A) = 0 \qquad (248)$$

bestehen. Da andererseits auch F_A die A_{ik} enthält, so wird dem Minimum der freien Energie nicht mehr der Zustand entsprechen, in dem alle A_{ik} gleich Null sind. Der Körper deformiert sich infolge der Magnetisierung auch elastisch. Diese Erscheinung nennen wir die Magnetostriktion.

Die Magnetostriktion hat wichtige technische Anwendungen, weil wir mit ihrer Hilfe z.B. unter Anwendung des magnetischen Feldes eines hochfrequenten Stromes einen magnetisierbaren Körper zu mechanischen Schwingungen anregen und mit seiner Resonanz dann die Frequenz der elektrischen Schwingung kontrollieren können.

Eine andere wesentliche Anwendung der Magnetostriktion ist folgende: Eine Eisen-Nickel-Legierung, die ungefähr 35% Nickel enthält, besitzt die Eigenschaft, daß ihre thermische Ausdehnung in sehr guter Annäherung gleich Null ist. Man benutzt diese Legierung z.B. zur Konstruktion von guten Pendeluhren, weil eine aus diesem „Invar" hergestellte Pendelstange ihre Länge mit der Temperatur nicht ändert. Selbstverständlich besitzt jeder Körper – so auch Invar – eine thermische Ausdehnung. Doch tritt bei dieser Legierung infolge ferromagnetischer Erscheinungen auch die Temperaturabhängigkeit der

Magnetostriktion auf (also eine mit zunehmender Temperatur auftretende Abnahme der magnetostriktiven Ausdehnung). Diese kompensiert bei der angegebenen Zusammensetzung gerade die thermische Dilatation. Mit anderen Worten: Unter dem CURIEpunkt verhält sich dieses Material so, als ob es überhaupt keine thermische Dilatation besitzen würde. Eine Eisen-Platin-Legierung, die ungefähr 25% Platin enthält, zieht sich aus ähnlichen Gründen mit zunehmender Temperatur zusammen. Keine thermische Dilatation hat eine Fe-Co-Cr-Legierung, die außerdem den großen technischen Vorteil besitzt, daß sie „rostfrei" ist.

§ 28. Die technische Magnetisierungskurve und der BARKHAUSENeffekt

Bei den in der Elektrotechnik gebräuchlichen Feldstärken ändert der Magnetisierungsvektor nur seine Richtung, seine Größe dagegen nicht; die Änderung seiner absoluten Größe wäre nur bei extrem starken Feldern, also bei einigen 10000 Gauß bemerkbar, ist dagegen bei Feldern in der Größenordnung von 1000 Gauß absolut unbedeutend. Außerdem sind die in der Elektrotechnik benutzten ferromagnetischen Materialien keine Einkristalle, sondern sie besitzen eine mikrokristalline Struktur wie alle Metalle. Der Prozeß der technischen Magnetisierung besteht nach der HEISENBERG-WEISSschen Theorie darin, daß die regellos orientierten spontanen Magnetisierungsvektoren der kleinen Elementargebiete dem äußeren Feld parallel gestellt werden.

Bezeichnen wir mit V_k das Volumen eines kleinen Elementargebietes und mit ϑ_k den Winkel, den die Richtung der Magnetisierung (M_s) mit der äußeren Feldrichtung einschließt, so ist die makroskopische Magnetisierung der vorliegenden technischen Substanz

$$M = M_s \sum_k V_k \cos\vartheta_k, \tag{249}$$

wobei man über alle in einem cm³ enthaltenen Elementargebiete summieren muß.

Nach unserem früheren Gedankengang kann die Änderung der Magnetisierung entweder durch Änderung der Größe der Elementargebiete oder durch Änderung des Winkels, den der Magnetisierungsvektor mit dem äußeren Felde einschließt, auftreten. δM wird damit

$$\delta M = M_s \sum_k \{\cos\vartheta_k \cdot \delta V_k + V_k \delta(\cos\vartheta_k)\}. \tag{250}$$

Selbstverständlich muß $\sum\limits_k \delta V_k$ gleich Null sein. In Gleichung (250) rührt das erste Glied von der Änderung der Größe der Elementargebiete her. Die Erfahrung lehrt aber, daß das erste Glied 2 Komponenten besitzt: 1. die reversiblen und 2. die irreversiblen Änderungen. Eine andere Betrachtungsweise zeigt noch deutlicher den Unterschied zwischen diesen zwei physikalischen Prozessen; die reversiblen Erscheinungen laufen kontinuierlich ab. Zu einer noch so kleinen Änderung der äußeren Feldstärke gehört immer eine zwar kleine, jedoch end-

liche Änderung der Größe der Elementargebiete. Die irreversiblen Änderungen laufen mit zwar kleinen, aber endlichen Sprüngen ab. Das zweite Glied in Gleichung (250) beschreibt die sogenannten Drehprozesse, also die Erscheinungen, bei denen der Magnetisierungsvektor innerhalb eines Elementargebietes seine Richtung ändert.

In § 26 haben wir die Magnetisierung der Einkristalle besprochen. Die hier erwähnten Elementargebiete sind immer Einkristalle. Umgekehrt braucht – vom kristallographischen Standpunkt aus gesehen – ein Einkristall gar nicht ein Elementargebiet zu sein. Wie schon erwähnt, liegt beim Eisen die Richtung der spontanen Magnetisierung parallel zu einer Würfelkante. Die erwähnten reversiblen Wandverschiebungseffekte bestehen darin, daß ein Elementargebiet wächst, in dem der parallel zu einer Würfelkante stehende Magnetisierungsvektor verhältnismäßig günstig zur äußeren Feldrichtung orientiert ist (d. h. einen kleinen Winkel mit der letzteren einschließt), und zwar auf Kosten eines anderen Elementargebietes, bei dem der Winkel ϑ_k größer als im vorigen Fall ist. Die irreversiblen Wachstumsprozesse sind dadurch gekennzeichnet, daß der Magnetisierungsvektor eines ganzen Elementargebietes (in dem dieser Vektor verhältnismäßig ungünstig orientiert ist) in eine Richtung springt, die mit dem äußeren Felde einen möglichst kleinen Winkel bildet. Auch diese Richtung ist eine solche der spontanen Magnetisierung (beim Eisen parallel einer Würfelkante). Ist bei den Drehprozessen das äußere Feld schon so stark, daß es den Magnetisierungsvektor der Elementargebiete aus der Richtung der spontanen Magnetisierung verdrehen und in seine eigene Richtung einstellen kann, dann tritt die technische Sättigung ein. Wir bemerken hier, daß die Drehprozesse ebenfalls reversibel sind.

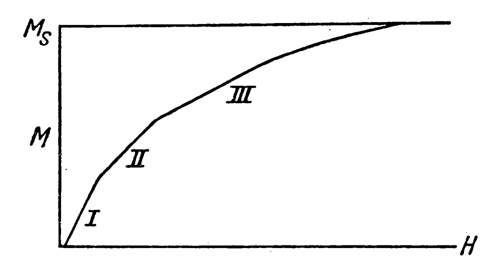


Abb. 8. Die drei Teile der technischen Magnetisierungskurve

Die technische Magnetisierungskurve besteht also aus drei Teilen. In unserer Abb. 8 rührt der mit *I* bezeichnete Teil der Magnetisierungskurve von den reversiblen Wandverschiebungseffekten (Wachstumserscheinungen) her. Den mit *II* bezeichneten Teil verursachen die irreversiblen Erscheinungen, die in kleinen Sprüngen ablaufen. Die Kurve besitzt hier keine kontinuierliche Krümmung, sondern hat einen stufenartigen Verlauf. Doch kann man diese recht kleinen Stufen wegen der Kleinheit unserer Abbildung hier nicht mehr veranschaulichen. Der mit *III* bezeichnete Teil beschreibt die Drehprozesse, die reversibel sind. Schließlich nähert sich die Kurve asymptotisch zu der die Sättigung beschreibenden Geraden, welche die Ordinate in dem mit M_s bezeichneten Punkt schneidet. Bei sehr großen Feldstärken muß man selbstverständlich berücksichtigen, daß sich bei einer weiteren Erhöhung der Feldstärke auch der absolute Wert von M_s vergrößert. Das wäre eigentlich der vierte Teil der Magnetisierungskurve.

Wie erwähnt, läuft die Magnetisierung im mittleren steilen Teil unserer Kurve in kleinen Sprüngen, jedoch in solchen von endlicher Größe (irreversibel) ab. Diese Erscheinung hat 1919 H. BARKHAUSEN entdeckt (BARKHAUSENeffekt). Unter Anwendung einer entsprechenden Verstärkung kann man jeden einzelnen BARKHAUSENsprung in einem Lautsprecher als ein Krachen hörbar machen. Solche Elementargebiete, welche einen BARKHAUSENsprung vollführen, bestehen im allgemeinen aus weniger als 10^{10} Atomen. Ihre Größe beträgt also maximal 10^{-13} cm³. In einigen speziellen Fällen können sie jedoch auch viel größer sein. So haben BOZORTH und DILLINGER bei Eisen-, Nickel- und Permalloy-Einkristallen, dann auch beim sogenannten Armcoeisen gefunden, daß die Elementargebiete auch die Größe 10^{-9} — 10^{-8} cm³ besitzen können. Durch Anwendung äußerer Kräfte kann man erreichen, daß z. B. in einem Draht, der nur aus einem Elementargebiet besteht, die Richtung der leichten Magnetisierbarkeit in die Längsrichtung fällt. An diesem Draht kann man auf experimentellem Wege zeigen, daß sich der BARKHAUSENsprung mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet. Es sei nur noch erwähnt, daß nach neueren Untersuchungen die Elementargebiete, in denen der Vektor der spontanen Magnetisierung eine bestimmte Richtung hat, und die Gebiete, die auf einmal einen BARKHAUSENsprung ausführen, nicht miteinander identisch sind. Die letzteren sind kleiner, d. h. also, daß meist nicht ein ganzes Elementargebiet als solches einen BARKHAUSENsprung vollführt.

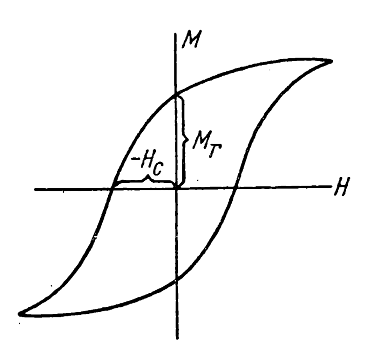


Abb. 9. Die Hystereseschleife

Wie wir schon erwähnten, ist der von den „BARKHAUSENsprüngen" verursachte Teil der Magnetisierungskurve irreversibel. Wenn wir eine vom makroskopischen Standpunkt nicht magnetisierte ferromagnetische Materie magnetisieren, dann erhalten wir die vorher erwähnte aus drei Teilen bestehende Kurve. Wenn wir jedoch nach Erreichung der Sättigung das Feld wieder abnehmen lassen, so wird die Magnetisierung der ferromagnetischen Materie nur entlang eines kleinen Stückes die ursprüngliche Kurve in entgegengesetzter Richtung beschreiben. Später weicht sie immer mehr davon ab. Wenn wir das Feld gerade auf Null reduziert haben, so wird der Magnetisierungsvektor nicht gleich Null sein, sondern noch einen positiven Wert besitzen, den wir mit M_r bezeichnen und magnetische Remanenz nennen (vgl. Abb. 9). Damit diese makroskopische Magnetisierung auch noch verschwindet, müssen wir dem äußeren Feld einen negativen Wert geben. Die Feldstärke $(-H_c)$, bei der die Remanenz gerade verschwindet, heißt Koerzitivkraft. Unter weiterer Steigerung des absoluten Wertes der negativen Feldstärke erreichen wir endlich den Zustand der Sättigung in entgegengesetzter Richtung. Wenn wir danach die Feldstärke in entgegengesetzter Richtung ändern, so wird wegen der irreversiblen Prozesse die Magnetisierung unseres Materials nicht die frühere Kurve in entgegengesetzter Richtung beschreiben, sondern die Remanenz, die Koerzitivkraft usw.

werden jetzt mit entgegengesetztem Vorzeichen auftreten. Unsere Abb. 9 zeigt das typische Verhalten eines ferromagnetischen Körpers. Selbstverständlich verfügen wir heute für technische Zwecke über sehr viele ferromagnetische Stoffe, die sehr verschiedene Eigenschaften haben. Das magnetische Verhalten dieser Stoffe wird ganz verschieden sein. Wegen der Irreversibilität der Prozesse werden beim „Umfahren" der Magnetisierungskurve Energieverluste auftreten, deren Größe proportional der von der Kurve umschlossenen Fläche ist. Man nennt diese Verluste Hystereseverluste der ferromagnetischen Materialien.

§ 29. Einige Bemerkungen bezüglich der in der Elektrotechnik gebräuchlichen ferromagnetischen Werkstoffe

Für die Zwecke der Elektrotechnik werden heutzutage schon sehr viele ferromagnetische Werkstoffe, die sehr verschiedene Eigenschaften besitzen, hergestellt, so daß das Legieren und die Behandlung derselben eine ganz selbständige Wissenschaft geworden ist, deren Resultate wir hier nicht detailliert besprechen können. Wir beschränken uns deshalb auf einige Bemerkungen bzw. auf die Hervorhebung einiger interessanter Fälle.

Bei ferromagnetischen Stoffen, die einer wechselnden Magnetisierung unterworfen sind, also bei Motoren, Generatoren, Transformatoren usw., ist es wichtig, daß die Permeabilität relativ groß, der Hystereseverlust möglichst klein ist. Es ist interessant, daß sehr reines (kohlenstoffreies) Eisen in dieser Hinsicht ein idealer Werkstoff sein würde, aber trotzdem praktisch nicht anwendbar ist (kostbare Herstellung, geringe Beständigkeit, große Wirbelstromverluste usw.). Ein einfaches unlegiertes Material, das praktisch tatsächlich brauchbar ist, ist das kohlenstoffarme Armco-Eisen, das ohne besondere Behandlung eine Koerzitivkraft von etwa nur 1 Oersted aufweist. Durch Zusätze von Silizium wird dieses Eisen vergütet. Auf diesem Wege können Koerzitivkräfte von 0,1 bis 0,5 Oersted erreicht werden. Die Sättigungsmagnetisierung nimmt jedoch gleichzeitig ein wenig ab. Solche Dynamo- und Transformatorenbleche werden in sehr vielen Sorten hergestellt, wobei die Erreichung eines möglichst geringen Wattverlustes (Hysterese-, Wirbelstrom- und Nachwirkungsverluste) ein wichtiges Ziel ist. Die für die Wechselstromtechnik hergestellten Materialien, die eine möglichst große Permeabilität besitzen, werden mit dem Namen „Hypernik" bezeichnet. Es gibt unlegierte, dann mit Si und Ni legierte Hypernike. Für Dynamo- und Motorenbleche werden größtenteils die mit Si legierten verwandt, für Transformatoren auch die mit Ni legierten.

Interessant sind die speziellen Legierungen, die eine enorm hohe Permeabilität besitzen. Reines gesintertes Weicheisen erreicht schon eine Permeabilität von 24000 und ist leicht herstellbar. Eine von Masumoto entdeckte Fe-Si-Al-Legierung, welche ungefähr 8–11 % Si und 5–5,6 % Al enthält, besitzt die maximale Permeabilität 162000 und hat außerdem einen sehr niederen Hystereseverlust. Das Material ist jedoch sehr zerbrechlich, was seine praktische Anwendbarkeit stark herabsetzt. Eine Eisen-Nickel-Legierung, die bei 51 % Ni

annähernd die Zusammensetzung FeNi aufweist und eine solche Gitterstruktur besitzt, daß parallel zu den Oktaederflächen abwechselnd sich Eisen und Nickelatomschichten befinden, besitzt ebenfalls interessante magnetische Eigenschaften, wenn es in einer Wasserstoffatmosphäre mehrere Stunden auf 1000–1200°C gehalten wird. Diese Behandlung entfernt die aus Kohlenstoff, Schwefel und Sauerstoff bestehenden Verunreinigungen. In diesem Zustand nennen wir diese Legierung eigentlich Hypernik. Die Permeabilität erreicht den Wert 150000. Ein weiterer ferromagnetischer Werkstoff ist das bekannte Permalloy, dessen günstigste Zusammensetzung fast der Formel $FeNi_3$ entspricht. Wenn diese Legierung vom CURIEpunkt abgeschreckt wird, so erreicht ihre Permeabilität den Wert 100000. Ihr Widerstand beträgt jedoch nur das Doppelte des Eisens. Durch Legierung mittels Cr und Mo vergrößert man ihren Widerstand und erhöht die Anfangspermeabilität auf 20000, setzt jedoch die maximale Permeabilität etwas herab.

Die Supermalloy genannte Legierung, die 79% Ni, 16% Fe und 5% Mo enthält und in einer Wasserstoffatmosphäre bei 1300°C geglüht wird, besitzt sogar die maximale Permeabilität 1000000 und die Anfangspermeabilität 100000. Außerdem besitzt sie eine sehr geringe Koerzitivkraft. Bei dem Mumetall, das aus 75% Ni, 18% Fe, 2% Cr und 5% Cu besteht und bei 1300°C in Wasserstoff geglüht wird, beträgt die maximale Permeabilität 100000 usw.

Für andere Zwecke, z.B. in der Technik der elektrischen Nachrichtenübermittlung, haben solche Werkstoffe eine große Bedeutung, die eine möglichst konstante Permeabilität besitzen. Ein bekanntes Material ist z.B. das Perminvar, das 30% Fe, 45% Ni und 25% Co enthält.

Zur Herstellung von permanenten Magneten sind solche Werkstoffe geeignet, welche eine große Koerzitivkraft (und demzufolge selbstverständlich auch einen großen Hystereseverlust) besitzen. Solche Materialien nennt man harte Werkstoffe gegenüber den früher besprochenen Werkstoffen, die man weiche ferromagnetische Werkstoffe nennt. HONDA hat schon vor nahezu drei Jahrzehnten ein derartiges Material dadurch hergestellt, daß er zu dem Eisen 35% Kobalt, 7–9% Wolfram oder Molybdän und 0,5% Kohlenstoff beimischte; diese ferromagnetische Legierung erreicht nach einer speziellen thermischen Behandlung die Koerzitivkraft von 200 Gauß. Nach MISHIMA erhält man ein Material, das noch günstigere Eigenschaften besitzt, wenn man Nickel und Kobalt mit Aluminium legiert und Mangan, Chrom und Wolfram hinzusetzt. Die Koerzitivkraft einer solchen Legierung erreicht 650 Gauß. In neuester Zeit hat man Legierungen entdeckt, die noch größere Koerzitivkräfte besitzen. Die verschiedenen Alniko-Arten, die aus Co, Ni, Al und Cu oder Ti aufgebaut sind, besitzen Koerzitivkräfte zwischen 550 und 250 Gauß. Eine Platin-Kobalt-Legierung, die 77% Pt und 23% Co enthält, hat die Koerzitivkraft 2600 Gauß. Das Silmanal (87% Ag, 9% Mn, 4% Al) besitzt sogar eine Koerzitivkraft von 6000 Gauß. Letztere Legierung enthält kein ferromagnetisches Element und gehört deshalb eigentlich zu den im folgenden Paragraphen zu behandelnden Stoffen.

Bei hohen Frequenzen tritt der Wirbelstromverlust stark in Erscheinung. Es besteht jedoch die Möglichkeit, denselben herabzusetzen, indem man die sogenannten Pulverwerkstoffe benutzt.

§ 30. Die HEUSLERschen Legierungen und andere ferromagnetische Legierungen

Bezüglich der Theorie des Magnetismus ist es sehr wichtig, daß einige Legierungen, die kein ferromagnetisches Element enthalten, doch ferromagnetische Eigenschaften aufweisen können. Ein solches Material ist eine Kupfer-Mangan-Aluminium-Legierung, deren Zusammensetzung man durch die Formel $(CuMn)_3$ Al beschreiben kann. Nach entsprechender thermischer Behandlung besitzt diese Legierung eine Sättigungsmagnetisierung M_s von annähernd 1200 Gauß. Ähnliche Eigenschaften hat auch eine Mangan-Kupfer-Zinn-Legierung. Beide Legierungen nennen wir HEUSLERsche Legierungen.

Ferromagnetische Eigenschaften zeigen außerdem noch mehrere aus nichtferromagnetischen Metallen bestehende Legierungen bzw. Verbindungen, welche die folgenden Zusammensetzungen besitzen: Mn_2As_3, MnB, MnBi, Mn_3C, Mn_3N, Mn_6N_2, Mn_7N_2, Mn_5P_2, Mn_2Sb, Mn_3Sb_2, MnSb, Mn_4Sn. Wie wir sehen, enthalten alle diese Legierungen das Element Mangan. Bei der Besprechung der Theorie des Ferromagnetismus haben wir erwähnt, daß die Voraussetzung des Auftretens ferromagnetischer Erscheinungen mit einem positiven Wert des Austauschintegrals verknüpft ist. Bei Fe, Co und Ni rührt von der Wechselwirkung der in der nichtabgeschlossenen $3d$-Schale enthaltenen Elektronen ein positives Austauschintegral her. Das Manganatom besitzt ebenfalls eine nichtabgeschlossene $3d$-Schale. Das reine Mangan ist aber nicht ferromagnetisch, aller Wahrscheinlichkeit nach deshalb nicht, weil das von der Wechselwirkung der in der erwähnten Schale sich befindenden Elektronen herrührende Austauschintegral nicht positiv ist. In den oben erwähnten ferromagnetischen Manganlegierungen sind jedoch die Manganatome voneinander weiter entfernt als im reinen Mangan. Es liegt deshalb der Gedanke nahe, anzunehmen, daß das Austauschintegral in diesem Fall positiv wird. Das Positivwerden des Austauschintegrals bei zunehmenden Entfernungen kann man theoretisch gut begründen. Ob das ferromagnetische Verhalten der HEUSLERschen Legierungen durch das Mangan verursacht wird, ist noch nicht endgültig entschieden. Es sei bemerkt, daß einige der hier erwähnten ferromagnetische Eigenschaften besitzenden Legierungen möglicherweise zu den im nächsten Paragraphen zu besprechenden sogenannten Ferriten gehören.

§ 31. Der Antiferromagnetismus und der Ferrimagnetismus

Nach der in § 25 besprochenen WEISSschen Theorie werden die ferromagnetischen Stoffe dadurch charakterisiert, daß die magnetische Wechselwirkung der in ihnen enthaltenen Elementarmagnete so stark ist, daß sie sich gegenseitig zueinander parallel einstellen. Ebenfalls dort haben wir erwähnt, daß die WEISSsche Theorie zwar phänomenologisch zu richtigen Folgerungen führt. Man kann jedoch zeigen, daß die Wechselwirkungen der elementaren – vom Elektronenspin herrührenden – Magnete zur Erklärung der Ausrichtung um Größenordnungen zu klein sind. Dieses Paradoxon hat HEISENBERG gelöst, der zeigte, daß die elementaren Spinmagnete nicht ihre magnetischen Wechselwirkungen, sondern die sogenannten quantenmechanischen Austauschkräfte zu-

einander parallel einstellen. Das aus der Theorie des H_2-Moleküls bekannte Austauschintegral ist in den ferromagnetischen Stoffen positiv, und das verursacht die zueinander parallele Ausrichtung der Spins. Nach der WEISSschen Theorie wäre ein Fall, in dem sich die Elementarmagnete gegenseitig nicht parallel, sondern antiparallel einzustellen trachten, eigentlich nicht denkbar. Nach der HEISENBERGschen Theorie ist das aber tatsächlich möglich. Dazu ist nur notwendig, daß das Austauschintegral im fraglichen Material negativ sein soll, wie es ja im H_2-Molekül auch tatsächlich der Fall ist. Das negative Austauschintegral stellt die Spins der zwei Elektronen zueinander antiparallel ein. Es erhebt sich die Frage, ob es solche Materialien gibt. Tatsächlich hat man in neuerer Zeit Stoffe gefunden, die oberhalb einer gewissen Temperatur (die wir antiferromagnetische CURIEtemperatur[1]) nennen) normal paramagnetisch sind, etwa ebenso wie ein ferromagnetischer Körper oberhalb seiner CURIEtemperatur. Kühlt man diese Stoffe in der Nähe ihres antiferromagnetischen CURIEpunktes ab, so nimmt ihre Suszeptibilität nicht stark zu, sondern stark ab und bleibt bei weiterer Temperaturerniedrigung sehr klein. Eine Anomalie der spezifischen Wärme tritt bei ihnen ebenso auf wie bei den ferromagnetischen Stoffen. Typische Beispiele für dieses Verhalten sind: FeO, CoO, NiO, MnO, MnS, MnSe, MnTe, $FeCl_2$, $NiCl_2$, $CoCl_2$ usw. Die Theorie des „Antiferromagnetismus" haben hauptsächlich NÉEL, VAN VLECK und BITTER ausgearbeitet. Nach ihnen kommt der Antiferromagnetismus dadurch zustande, daß das Austauschintegral nicht wie bei den ferromagnetischen Stoffen positiv, sondern negativ ist (wie im H_2-Molekül, nur seinem absoluten Werte nach viel kleiner). Die benachbarten Spinmagnete stellen sich unterhalb des antiferromagnetischen CURIEpunktes zueinander antiparallel ein. Das Gitter besteht – vom Standpunkt der Spineinstellung aus betrachtet – aus zwei Untergittern, in denen jeweils die Spins parallel zueinander, jedoch in den zwei Untergittern zueinander antiparallel stehen. Diese zwei Gitter sind ineinandergeschoben. In neuester Zeit ist es gelungen, diese rein theoretischen Gedankengänge experimentell zu fundieren. Wie wir wissen, streut jedes den Atomkern umkreisende Elektron das Röntgenlicht. Bei einer festen Materie können wir aus dem erhaltenen Diffraktionsbild die Gitterkonstante berechnen. Diese Messungen beeinflussen eventuell vorhandene antiferromagnetische Ausrichtungen nicht, weil die Richtung des Elektronenspins auf die Röntgenstreuung ohne Einfluß ist. (Das elektrische Wechselfeld der Welle wirkt allein auf die Elektronenladung, wie wir das z. B. aus der in § 3 hergeleiteten Formel (32) ersehen können.) Seitdem man genügend scharfe und homogene Neutronenstrahlen herstellen kann, ist es möglich, eine Kristallstrukturanalyse mittels Neutronenstrahlen durchzuführen. Bei der Streuung der Neutronenstrahlen ist aber nicht die Elektronenladung, sondern der Elektronenspin ausschlaggebend, weil das Neutron ein magnetisches Moment besitzt, auf welches das spinmagnetische Moment des Elektrons einwirkt. Dagegen hat das Neutron keine elektrische Ladung und ist deshalb gegen Elektronenladungen unempfindlich. Ist die oben besprochene Deutung des Antiferromagnetismus richtig, so muß, wenn man solche Stoffe unterhalb ihres antiferromagnetischen CURIEpunktes mit Neutronenstrahlen untersucht, aus dem

[1]) Man nennt diesen Temperaturpunkt auch NÉELsche Temperatur.

erhaltenen Diffraktionsbild eine doppelte Gitterkonstante folgen. Und das haben SHULL und seine Mitarbeiter tatsächlich beobachtet. Die genannten Verfasser untersuchten das MnO, das bei normaler Temperatur paramagnetisch ist. Nach Abkühlung unter die Temperatur des flüssigen Stickstoffes, bei der der paramagnetische Zustand in den antiferromagnetischen übergeführt wird, untersuchten sie das Material mit Neutronenstrahlen und erhielten aus dem Diffraktionsbild tatsächlich für die Entfernung der Mn-Ionen den doppelten Wert, den man aus Röntgendiffraktionsmessungen erhält. Damit ist jedenfalls bewiesen, daß die Grundvorstellung bezüglich des Antiferromagnetismus richtig ist. Vollständigkeitshalber sei erwähnt, daß das Gitter von einigen antiferromagnetischen Stoffen nicht aus zwei, sondern mehreren Untergittern besteht. KRAMERS betrachtete die Wechselwirkung zweier Mn-Atome mit einem dazwischenliegenden O-Atom. Die ursprünglichen Überlegungen stammen von ANDERSON.

Außer dem tatsächlichen Antiferromagnetismus hat man noch eine Abart dieser Erscheinung entdeckt, die darin besteht, daß in einigen Materialien in den zwei Untergittern, in denen die Spins zueinander parallel orientiert sind, nicht dieselbe Zahl von Atomen enthalten ist. Das magnetische Moment der verschiedenen Untergitter besitzt nicht dieselbe Größe und kann sich deshalb gegenseitig nicht ganz kompensieren. Solch eine Substanz verhält sich makroskopisch wie ein Ferromagnetikum. Diese Erscheinung nennen wir Ferrimagnetismus. Der Ferrimagnetismus ist also ein asymmetrischer Antiferromagnetismus. Der einfachste Fall, in dem diese Erscheinung auftritt, soll nach den neuesten Untersuchungen das Pyrrhotin sein. Die chemische Formel dieses Minerals ist FeS. Da es jedoch immer etwas zuviel Schwefel enthält, versuchte man die Formel Fe_7S_8 anzugeben. Aber der Überschuß an Schwefel ist meist nicht mit Hilfe einer ganzen rationalen Zahl auszudrücken. Auf Grund von Untersuchungen bilden die Eisenatome im Pyrrhotin zwei Untergitter, in denen die Spins zueinander parallel orientiert sind. In einem Untergitter fehlen jedoch einzelne Eisenatome, ihr Gitterplatz ist leer. Eben deshalb ergab die chemische Analyse zuviel Schwefel. Die zwei Untergitter kompensieren sich magnetisch nicht vollständig. Davon rührt der beobachtete schwache Ferrimagnetismus des Pyrrhotins her. Der zuerst entdeckte und bekannteste Vertreter dieser Stoffgruppe ist das Magnetit (Fe_3O_4). Dieses Material ist seinem äußeren Verhalten nach ferromagnetisch. Das magnetische Moment entspricht aber nur einem Bruchteil der Momente seiner Eisenionen im freien Zustand. Dieses Mineral, an dem man die Erscheinung des Ferromagnetismus entdeckte, ist eigentlich nicht ferromagnetisch. Das Magnetit kristallisiert im sogenannten Spinelltyp, dessen bekanntester Vertreter das $MgAl_2O_4$ ist. Im Gitter des Spinelltyps bilden die O-Ionen ein flächenzentriertes Gitter, dessen Lücken die Metallionen ausfüllen, und zwar derart, daß die zweiwertigen Metallionen (in unserem Beispiel die Mg-Ionen) in einem aus vier Sauerstoff-Ionen gebildeten Tetraedergitter, die dreiwertigen Metallionen (in unserem Beispiel die Al-Ionen) in einem von sechs O-Ionen gebildeten Oktaedergitter untergebracht sind. Es gibt andererseits einen sogenannten inversen Spinelltyp. Die zwei Metallionen von verschiedenem Typ, welche zwei Untergitter bilden, sind nicht in gleicher Zahl vorhanden

und auch nicht im gleichen Zustand, wenn sie ferromagnetisch sind. So können sie ihre magnetische Wirkung nicht aufheben, und der fragliche Stoff wird ferrimagnetisch. Heutzutage kennen wir schon sehr viele ferrimagnetische Materialien vom Spinelltyp, welche im allgemeinen durch die Formel $MOFe_2O_3$ charakterisiert werden können (M = zweiwertiges Metall – bei dem Magnetit ist M = Fe). Das Verhalten dieser Ferrite oberhalb der CURIEtemperatur ist typisch antiferromagnetisch. Besonders die Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität kennzeichnet den antiferromagnetischen Charakter. Unterhalb des CURIEpunktes ist der Magnetisierungsverlauf dagegen ferromagnetisch. Im Spinelltyp können recht verwickelte Verhältnisse auftreten. So kristallisiert auch das Magnetit im inversen Typ. An den Stellen der zweiwertigen Metallionen befinden sich Fe^{+++}-Ionen und an den Stellen der dreiwertigen abwechselnd Fe^{+++}- und Fe^{++}-Ionen. Da Fe^{+++} fünf und Fe^{++} vier Magnetonen besitzt, so resultieren – auf ein Fe_3O_4-„Molekül" berechnet – vier Magnetonen. Gemessen hat man 4,2. Die magnetischen Momente der anderen Ferrite lassen sich analog deuten. Ersetzt man ein ferromagnetisches Ion teilweise durch ein nichtferromagnetisches Ion, so wird das magnetische Moment einiger Ferrite erhöht.

Die große technische Bedeutung der Ferrite besteht darin, daß sie keine Metalle wie die ferromagnetischen Stoffe, sondern Halbleiter sind. Da die Wirbelstromverluste bei ihnen sehr gering sind, verwendet man sie besonders in der Hochfrequenztechnik. Die technischen Eigenschaften der Ferrite wurden sehr weitgehend von SNOEK erforscht.

Nach all dem Vorhergehenden hatte es den Anschein, daß die Theorie von HEISENBERG die ferromagnetischen Erscheinungen wenigstens in ihrem Grundprinzip einwandfrei erklärt. In den letzten Jahren hat jedoch ZENER die ganze Grundlage dieser Theorie bezweifelt. Nach ihm können die $3d$-Elektronen der ferromagnetischen Atome miteinander nur in eine antiferromagnetische Wechselwirkung treten. Das Austauschintegral soll also immer negativ sein. Der Ferromagnetismus kommt nach seiner Auffassung nur dadurch zustande, daß ein $3d$-Elektron eines ferromagnetischen Atoms mit einem Leitungselektron ($4s$-Elektron) und das $4s$-Elektron mit dem $3d$-Elektron eines benachbarten ferromagnetischen Atoms mit jeweiligem positivem Austauschintegral in Wechselwirkung tritt. Der Ferromagnetismus würde nach dieser Auffassung in zwei Schritten entstehen. Die unmittelbare antiferromagnetische Wechselwirkung der $3d$-Elektronen wäre zu schwach, um den positiven Wert des Austauschintegrals zu kompensieren. Es ist eigenartig, daß die ferromagnetischen Stoffe alle Metalle sind, bei denen die postulierten Leitungselektronen tatsächlich vorhanden sind, die antiferromagnetischen dagegen nicht. Diese Tatsache scheint für die Auffassung ZENERS zu sprechen. In einer späteren Veröffentlichung ging ZENER noch weiter und nahm an, daß für Co und Ni tatsächlich seine oben besprochene Auffassung zutrifft, beim Eisen dagegen die antiferromagnetische Wechselwirkung der $3d$-Elektronen überwiegt. Der Ferromagnetismus des Eisens ist eigentlich nur ein Ferrimagnetismus. Beim flächenzentrierten α-Eisen kann man nach dieser Auffassung das auftretende magnetische Moment tatsächlich in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung berechnen. Die Gedankengänge ZENERS sind rein qualitativ. HEBER bezweifelt auf Grund

seiner quantitativen Rechnungen die ganze ZENERsche Auffassung. Die große Schwierigkeit aller Rechnungen liegt darin, daß es sich immer um Vielkörperprobleme handelt. Man ist deshalb auf Näherungsmethoden angewiesen, bei denen die Abschätzung der Genauigkeit gar nicht leicht ist. Jedenfalls liegt bis jetzt kein zwingender Grund vor, an der Richtigkeit der HEISENBERGschen Theorie zu zweifeln.

§ 32. Das magnetische Moment der Erde

Nach unseren Erfahrungen besitzt die Erde ein magnetisches Feld. Dieses Feld ist jedoch nicht völlig konstant, sondern weist länger und kürzer dauernde Änderungen und außerdem sehr schnell ablaufende Störungen auf. Die Ursache der letzteren Erscheinung kann man nach der BIRKELAND-STÖRMERschen Theorie als geklärt betrachten, nach der die von der Sonne stammende Elektronenstrahlung die gemeinsame Ursache des Polarlichtes und der Störungen des erdmagnetischen Feldes ist. Es erhebt sich die Frage, weshalb die Erde überhaupt ein magnetisches Moment besitzt. Das magnetische Moment der Erde besitzt das Vorzeichen, das negativen Ladungen auf der sich drehenden Erde entspricht. Die Auffassung, daß wenigstens ein Teil der Erde ferromagnetisch ist, können wir prinzipiell ausschließen. Auch nach der alten und fast allgemein für richtig gehaltenen Theorie, die annimmt, daß das Erdinnere aus den Elementen Fe und Ni besteht, kann kein Ferromagnetismus auftreten, da das Erdinnere wegen der hohen Temperatur längst seine CURIEtemperatur überschritten haben muß. Eine andere Erklärung wäre möglich unter Berücksichtigung der atmosphärischen Ionen. Positive Ionen besitzen fast das Gewicht eines Atoms oder Moleküls. Negative Teilchen können sowohl Atom- oder Molekülionen als auch freie Elektronen sein. Das Gravitationsfeld der Erde wird im allgemeinen die positiven Ionen tiefer hinunterziehen als die negativen. Wegen der Erddrehung werden dann die negativen Ladungen einen größeren Kreis beschreiben. Die magnetische Wirkung der negativen Ladungen wird deshalb die der positiven Ladungen überwiegen. Wie wir sehen, würde diese Erscheinung das magnetische Feld der Erde mit richtigem Vorzeichen liefern. Die Rechnungen zeigen jedoch, daß das auf diesem Wege zu erwartende magnetische Moment zur Erklärung des Erdmagnetismus um Größenordnungen zu klein ist.

In § 7 haben wir den BARNETTeffekt erwähnt, also die Erscheinung, daß ein sich drehender Körper ein magnetisches Moment erhält, weil sich zu der Bewegung der umkreisenden (oder sich drehenden) Elektronen noch die makroskopische Drehbewegung des Körpers hinzuaddiert. Diese Erscheinung muß selbstverständlich auch im Falle der sich drehenden Erde auftreten. Die Rechnungen ergaben, daß der auf diesem Wege auftretende Effekt das richtige Vorzeichen besitzt. Seine Größe ist jedoch um zehn Größenordnungen zu klein. Eine andere Auffassung besteht in der Annahme, daß die Erde innen eine positive und außen eine negative Ladung besitzt. Zur Erklärung des Erdfeldes müßte man aber so große Ladungen annehmen, daß daraus ein Gradient von der Größe 10^{+8} Volt/cm folgen würde. Kein bekannter Isolator besitzt eine so große elektrische Festigkeit.

Weiterhin könnte man annehmen, daß vielleicht zu jedem mechanischen Moment auch ein magnetisches Moment gehört. Das wäre ein neues Naturgesetz. H. A. WILSON hat angenommen, daß eine dem BIOT-SAVARTschen Gesetz ganz analoge Gesetzmäßigkeit besteht, die der sich bewegenden Materie ein magnetisches Feld zuordnet. Selbstverständlich gibt es dafür keine experimentellen Beweise. In letzter Zeit hat BLACKETT diese Auffassung wieder aufgegriffen und darauf hingewiesen, daß die Größenordnungen des Verhältnisses der mechanischen und magnetischen Momente der Erde, der Sonne und eines Fixsternes (bei dem es gelungen sein soll, diese Größen zu messen) dieselben sein sollen. Es muß jedoch bemerkt werden, daß die Richtigkeit dieser Zahlenangaben fraglich sind. Nach den neuesten Messungen von H. W. BABCOCK und H. D. BABCOCK soll z. B. die Polarität des Feldes der Sonne das entgegengesetzte Vorzeichen besitzen und außerdem sehr klein sein. Die erwähnte Auffassung WILSONS besitzt auch hinsichtlich der Relativitätstheorie bedeutende theoretische Schwierigkeiten.

In neuester Zeit hat man versucht, das in einer leitenden Flüssigkeit bei einer turbulenten Bewegung spontan auftretende magnetische Moment, welches theoretisch von ALFVÉN entdeckt wurde, zur Erklärung der magnetischen Momente der Himmelskörper heranzuziehen. Besonders BULLARD versuchte mit Hilfe dieser magneto-hydrodynamischen Wirbel das erdmagnetische Feld zu erklären.

Das Problem des magnetischen Momentes der Erde ist bisher noch nicht gelöst. – Das magnetische Moment der Erde beträgt $7{,}9 \cdot 10^{25}$ el. stat. Einheiten.

§ 33. Die ferroelektrischen (seignetteelektrischen) und antiferroelektrischen Erscheinungen

ANDERSON hat als erster beobachtet, daß das Seignettesalz [Natriumkaliumtartrat ($NaKC_4H_4O_6 \cdot H_2O$)] in einem gewissen Temperaturintervall eine außerordentlich große, bei anderen Substanzen bisher nicht beobachtete Dielektrizitätskonstante besitzt. Weitere Untersuchungen, die von VALASEK, KURTSCHATOW und vielen anderen Forschern herrühren, führten zu dem Ergebnis, daß das Seignettesalz ein elektrisches Analogon der ferromagnetischen Körper ist. Ganz entsprechend der in den ferromagnetischen Körpern auftretenden spontanen Magnetisierung tritt hier ein spontaner, elektrisch polarisierter Zustand auf. Doch gibt es einen wesentlichen Unterschied. Wie oben erwähnt, richten sich in den ferromagnetischen Körpern die kleinen Elementarmagnete nicht infolge ihrer magnetischen Wechselwirkung parallel, wie das die WEISSsche Theorie angenommen hat. Die Austauschwechselwirkung der kleinen Spinmomente stellt die Elementarbezirke zueinander parallel ein. Im Seignettesalz stellt das elektrische Feld der darin enthaltenen elektrischen Dipole diese zueinander parallel ein. Die WEISSsche Theorie hat sich in ihrer ursprünglichen Form eigentlich nicht bei den ferromagnetischen Körpern bewährt, für die sie ja WEISS aufgestellt hat, sondern bei den beim Seignettesalz auftretenden analogen elektrischen Erscheinungen. Eigentlich hätten wir die ferroelek-

trischen Erscheinungen in dem über das Verhalten der Materie im elektrischen Feld geschriebenen Abschnitt besprechen sollen. Doch schien es wegen der weitgehenden Analogie mit den ferromagnetischen Erscheinungen zweckmäßig, die Ferroelektrika erst jetzt zu besprechen. Außerdem wollen wir noch bemerken, daß man in der deutschen und französischen Fachliteratur für diese Erscheinungsgruppe noch oft den Namen „Seignetteelektrische Erscheinungen" benutzt. In der angelsächsischen Literatur hat sich die Benennung „ferroelektrische Erscheinungen" eingebürgert. Da diese Benennung schon weitgehend international geworden ist, benutzen wir sie auch hier, ganz unabhängig davon, ob sie die logisch richtigere ist.

Das Seignettesalz kristallisiert im rhombischen System. Die elektrisch ausgezeichnete Achse ist die a-Achse. Der „elektrische CURIEpunkt" liegt bei 25°C. Oberhalb dieser Temperatur ist das Seignettesalz normal dielektrisch, unterhalb dagegen ferroelektrisch. Es besteht also aus spontan elektrisch polarisierten Elementargebieten. Unterhalb von —15°C hören die ferroelektrischen Erscheinungen wieder auf. Diese Erscheinung ist nicht eine Widerlegung der magnetischen Analogie, sondern hat sekundäre Ursachen. Man bezeichnet die Temperatur —15°C als den unteren CURIEpunkt des Seignettesalzes. Ganz ähnlich verhalten sich die vom Seignettesalz mit der Verbindung

$$Na(NH_4)C_4H_4O_6 \cdot 4\,H_2O$$

gebildeten isomorphen Mischkristalle, jedoch mit dem Unterschied, daß die Dielektrizitätskonstante dieser Kristalle nicht mit der Temperatur abnimmt. Die Verbindungen zeigen also noch klarer und einfacher das zu den ferromagnetischen Körpern analoge Verhalten, da sie keinen unteren CURIEpunkt besitzen. Das Seignettesalz und die Mischkristalle zeigen am CURIEpunkt eine Anomalie der spezifischen Wärme (ähnlich wie die ferromagnetischen Stoffe). Außerdem hat man bei ihnen einen „elektrischen BARKHAUSENeffekt" beobachtet. Sogar die Aufnahme ihrer Hystereseschleife ist gelungen. Die Analogie zu den ferromagnetischen Stoffen ist damit sehr weitgehend.

Außer den erwähnten zwei Materialien hat man später noch zwei weitere Gruppen der ferroelektrischen Körper entdeckt. Dazu gehören erstens das KH_2PO_4 und die zu ihm isomorphen Verbindungen wie KH_2AsO_4, KD_2PO_4 und RbH_2PO_4, und zweitens das $BaTiO_3$ und einige analog aufgebaute Verbindungen wie $KNbO_3$, $NaNbO_3$, $KTaO_3$, $NaTaO_3$, $LaGaO_3$ usw. In der Umgebung der CURIEtemperatur besitzen diese Materialien eine sehr große Dielektrizitätskonstante oder, anders ausgedrückt, die Dielektrizitätskonstante zeigt bei dieser Temperatur ein scharfes Maximum. Beim Seignettesalz treten zwei Maxima auf, bei den anderen ferromagnetischen Körpern dagegen nur ein Maximum. Wir erwähnen, daß beim Seignettesalz aller Wahrscheinlichkeit nach sogenannte Wasserstoffbindungen die elektrischen Momente verursachen. Das zwischen zwei Sauerstoffatomen gebundene Wasserstoffatom kann seine Lage ändern, indem es entweder zu dem einen oder anderen O-Atom näherrückt. Auf diese Weise können zwei elektrische Dipole entgegengesetzter Richtung erzeugt werden. Im KH_2PO_4 treten zwischen zwei Molekülen ebenfalls

Wasserstoffbindungen auf. Man nahm an, daß entweder die H_2PO_4-Gruppe oder die erwähnten Wasserstoffbindungen für die elektrischen Momente verantwortlich sind. Neue Untersuchungen deuten darauf hin, daß die letztere Annahme, die von SLATER herrührt, die richtige sein wird.

Bei den ersten zwei Gruppen der ferroelektrischen Körper sind zweifellos die Einstellungen der fertigen Dipole für die ferroelektrischen Erscheinungen verantwortlich. Die Größe der Konstante des LORENTZschen inneren Feldes ist dazu – gegenüber den bei ferromagnetischen Körpern auftretenden Verhältnissen – vollständig genügend. Jedoch besteht noch ein Unterschied gegenüber den ferromagnetischen Erscheinungen. In den ferroelektrischen Körpern polarisieren die elektrischen Dipole ihre Umgebung. Dieser Effekt erhöht noch wesentlich die auftretende spontane Polarisation. In den ferromagnetischen Körpern ist die analoge Erscheinung ganz unwesentlich, weil die Größe des von der diamagnetischen und der hochfrequenten paramagnetischen Suszeptibilität verursachten magnetischen Dipolmoments im Verhältnis zu der Suszeptibilität, die von dem magnetischen Spinmoment erzeugt wird, verschwindend klein ist.

Beim $BaTiO_3$ und den erwähnten analog aufgebauten Verbindungen müssen jedenfalls wesentlich andere Verhältnisse wie in den bis jetzt besprochenen ferroelektrischen Stoffen vorliegen. Das Bariumtitanat kristallisiert in einem regulären Koordinationsgitter. Es ist ganz ausgeschlossen, daß in diesem Gitter fast freie elektrische Dipole auftreten können. Nach röntgenographischen Untersuchungen wird im Gitter des $BaTiO_3$ das Ba-Ion von zwölf O-Ionen umgeben, das Ti-Ion dagegen von sechs O-Ionen. Anders ausgedrückt, wird das Ba-Ion von acht TiO_6-Oktaedern umgeben, die sich in ihren Spitzen berühren. In der Näherung, in welcher wir den Ionen endliche Radien zuschreiben können, folgt, daß der von den zwölf O-Ionen gebildete Raum für das Ba-Ion zu klein ist, d.h., das Ba-Ion schiebt die umgebenden O-Ionen auseinander, die TiO_6-Oktaeder werden dadurch größer. Mehrere Autoren bringen das anomale elektrische Verhalten des Bariumtitanats mit diesem Umstand in Zusammenhang. RUSHMAN und STRIVENS nehmen z.B. an, daß die Energie des Ti^{4+}-Ions nicht dann minimal ist, wenn sich dieses Ion im Mittelpunkt der erwähnten Oktaeder befindet, sondern in einer etwas verschobenen Lage, so daß – wegen der Symmetrie der Oktaeder – sechs Energieminima auftreten. Die Symmetrie des Gitters nimmt dadurch selbstverständlich ab. Nach dieser Auffassung muß man sich das Auftreten der ferroelektrischen Erscheinungen so vorstellen, daß oberhalb der CURIEtemperatur die Ti-Ionen ihre Lage zwischen diesen sechs möglichen Stellen des Energieminimums beständig ändern und deshalb keine spontane Polarisation entsteht. Unterhalb dieser Temperatur ist die elektrostatische Wechselwirkung schon ausreichend, um die Ti-Ionen von den sechs möglichen Lagen in einer Lage festzuhalten. Es tritt jetzt die spontane Polarisation auf. Röntgenographische Messungen führten zu dem Resultat, daß bei Zimmertemperatur die Verschiebung der Ti-Ionen höchstens 0,1 Å betragen könnte. Die daraus berechnete Polarisation ist zu klein. Es ist deshalb sehr wahrscheinlich, daß die Polarisierbarkeit der O-Ionen hier eine wesentliche Rolle spielt, d.h., daß diese das auftretende Moment und die spontane Polarisation wesentlich erhöht. Die Polarisierbarkeit der O-Ionen ist in den Ti-Verbindungen recht

groß. Das Rutil (TiO_2) besitzt bekanntlich eine sehr große Dielektrizitätskonstante. Es ist im Zusammenhang mit der hier besprochenen Frage erwähnenswert, daß auch die Dielektrizitätskonstante des BaO auffallend groß ist. Auf Grund dieser Tatsachen müssen wir uns das Zustandekommen der spontanen Polarisation des Bariumtitanats so vorstellen, daß die Wechselwirkung der infolge der nichtzentralen Lage der Ti^{4+}-Ionen auftretenden Momente zur Erzeugung einer spontanen Polarisation zwar nicht genügend groß ist. Die infolge der nichtzentralen Lage der Ti-Ionen verursachten Momente induzieren jedoch in ihrer sehr stark polarisierbaren Umgebung so starke Momente, daß die Wechselwirkungen der auf diesem Wege verstärkten Dipole schon eine spontane Polarisation verursachen können. Übrigens gibt es auch noch eine andere Theorie für das Auftreten der ferroelektrischen Erscheinungen beim $BaTiO_3$. Wie schon erwähnt, besitzen Rutil (TiO_2) und Bariumoxyd (BaO) eine auffallend große Dielektrizitätskonstante. Da das $BaTiO_3$ beide in den erwähnten zwei Kristallen auftretenden Atomgruppen enthält, so könnte man annehmen, daß nur die Wechselwirkung der Polarisierbarkeiten schon genügend stark zur Verursachung der ferroelektrischen Erscheinungen sein könnte.

In neuester Zeit hat man auch antiferroelektrische Erscheinungen entdeckt. Solche Körper werden dadurch charakterisiert, daß sie oberhalb des „antiferroelektrischen CURIEpunktes“ normal dielektrisch sind. Bei Annäherung an den „antiferroelektrischen CURIEpunkt“ nimmt ihre Suszeptibilität schnell ab und bleibt darunter sehr klein. Phänomenologisch zeigen die antiferroelektrischen Körper ein ähnliches Verhalten wie die antiferromagnetischen Körper. Es ist jedoch zu beachten, daß man die antiferromagnetischen Erscheinungen theoretisch leicht unter der Annahme einer Austauschwechselwirkung von entgegengesetztem Vorzeichen erklären kann. Hier besteht eine solche Möglichkeit dagegen nicht. Eine aus Dipolen aufgebaute lineare Kette könnte z. B. unmöglich antiferroelektrisch sein. Diese Möglichkeit ist sofort vorhanden, wenn zwei gleiche Ketten nebeneinander existieren. Als Beispiel sei das $PbZrO_3$ erwähnt, das antiferroelektrisch ist, wenn es weniger als 5% Ba als Verunreinigung enthält. In starken Feldern wird es in der Nähe des CURIEpunktes ferroelektrisch. Ein anderes Beispiel ist das $PbHfO_3$ usw.

§ 34. Ein Vergleich zwischen den elektrischen und den magnetischen Erscheinungen

Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen, daß es tatsächlich gelungen ist, das elektrische Analogon der ferromagnetischen Erscheinungen zu finden. Jetzt wollen wir in größter Allgemeinheit auf die Frage eine Antwort geben, inwieweit die Analogie zwischen elektrischen und magnetischen Erscheinungen besteht. Ein Unterschied ist dadurch vorhanden, daß die elektrische Feldstärke ein polarer, die magnetische Feldstärke ein axialer Vektor ist. Anschaulich ausgedrückt bedeutet dies, daß es wirkliche elektrische Ladungen gibt. Wirkliche magnetische Ladungen gibt es dagegen nicht. Magnetische Pole können nur als Paare mit entgegengesetztem Vorzeichen (Dipole) auftreten.

Wie ein Vergleich der in den §§ 13 und 24 erhaltenen Resultate zeigt, besteht tatsächlich eine weitgehende Analogie zwischen dem elektrischen und dem magnetischen Dipolmoment, selbstverständlich mit dem Unterschied, daß wir im elektrischen Falle die zwei Ladungen tatsächlich trennen können, z. B. können wir ein Salzsäuremolekül in ein Proton und ein negatives Halogenion zerlegen.

Das magnetische Analogon der elektrischen Polarisierbarkeit ist nicht die diamagnetische Suszeptibilität, was wir daraus ersehen können, daß erstere immer positiv, letztere dagegen immer negativ ist. Doch gibt es ein wirkliches magnetisches Analogon der elektrischen Polarisierbarkeit, die sogenannte hochfrequente paramagnetische Polarisierbarkeit, auf deren Vorhandensein zuerst Van Vleck aufmerksam machte. Diese paramagnetische Polarisierbarkeit verschwindet in einem zentralen Felde und ist deshalb weder bei Atomen noch bei Atomionen beobachtbar. Sie kann jedoch bei Molekülen auftreten. Tatsächlich erklärt diese Erscheinung bei gewissen Molekülen das Auftreten einer kleinen temperaturunabhängigen paramagnetischen Suszeptibilität, die von gleicher Größenordnung wie die diamagnetische Suszeptibilität ist.

Die diamagnetischen Erscheinungen besitzen kein elektrisches Analogon. „Diaelektrische Erscheinungen" könnten nur auftreten, wenn es umlaufende magnetische „Singulettpole" geben würde. Da es jedoch nur magnetische Dipole gibt, so mittelt sich die Wirkung des elektrischen Feldes auf einen sich bewegenden elementaren Dipol in erster Näherung immer heraus. Deshalb gibt es keine „diaelektrischen" Erscheinungen.

Im Zusammenhang mit dieser Frage wollen wir erwähnen, daß Dirac auf Grund von verwickelten theoretischen Überlegungen den Schluß gezogen hat, daß es in der Natur auch magnetische Singulettpole geben kann. Alle Experimente zur Rechtfertigung dieser Vermutung blieben bis jetzt erfolglos. Es wäre auch nach den Rechnungen von Dirac zur Trennung eines magnetischen Dipols in zwei Singulettpole eine ungewöhnlich große Energie notwendig.

§ 35. Die elektrische und die magnetische Feldstärke im Inneren von Körpern

Vom makroskopischen Standpunkt aus besteht eine weitgehende Analogie zwischen den paramagnetischen (ferromagnetischen) Stoffen und den Dielektrika. Bei den paramagnetischen Stoffen benutzen wir zur Beschreibung des Feldes den Vektor der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$ und den der Induktion $\mathfrak{B}$, im elektrischen Falle den Vektor der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ und den der dielektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$. Wir wollen jetzt die Frage beantworten, wie groß die Feldstärke im Innern eines dielektrischen oder ferromagnetischen Stoffes tatsächlich ist. In § 12 haben wir das sogenannte „Lorentzsche innere Feld" berechnet. Ganz analog kann man auch im magnetischen Falle vorgehen. Damit wir die Feldstärke im Innern eines Stoffes tatsächlich messen können, müssen wir einen Hohlraum herausschneiden, in den wir unsere Meßinstrumente hineinbringen können. Es entsteht dann die Frage, wie die gemessene Feldstärke von der Form dieses Hohlraumes abhängen wird. Zwei wichtige Grenzfälle sind

zu unterscheiden: Zunächst schneiden wir einen langen schmalen, zu den Kraftlinien parallelen Hohlraum heraus. In diesem tritt eine bestimmte elektrische – oder magnetische – Feldstärke auf. An den Wänden unseres Hohlraumes entstehen wegen der magnetischen oder elektrischen Polarisation scheinbare Ladungen. Da es sich jedoch um einen langen, schmalen, zu den Kraftlinien parallelen Hohlraum handelt, so treten scheinbare Ladungen nur an den Endflächen auf. Das von ihnen verursachte Feld nimmt umgekehrt proportional mit dem Quadrat der Entfernung ab und wird deshalb, wenn unser Hohlraum nur genügend lang und schmal ist, vernachlässigbar klein sein. Wir messen in einem zu den Kraftlinien parallelen und schmalen Hohlraum tatsächlich die Vektoren $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{E}$ als Feldstärken. An den Grenzflächen des Dielektrikums oder Ferromagnetikums treten aber wegen der Polarisation scheinbare Ladungen auf. Das Feld dieser scheinbaren Ladungen schwächt das äußere Feld ab. Die im erwähnten Hohlraum gemessenen Feldstärken werden kleiner sein als die, welche wir messen würden, wenn die untersuchte Substanz überhaupt nicht vorhanden sein würde. Nur bei diamagnetischen Stoffen ist die Feldstärke unwesentlich größer, da der Diamagnetismus immer sehr schwach ist. Es sei noch erwähnt, daß die Abschwächung des Feldes im Innern eines ferromagnetischen Stoffes so groß werden kann, daß sich das Vorzeichen der Feldstärke dort umkehrt.

Der zweite wichtige Grenzfall ist der eines zu den Kraftlinien senkrechten recht kurzen und sehr breiten Hohlraumes. Infolge der Polarisation werden scheinbare Ladungen an den Grenzflächen induziert. Bezeichnen wir die elektrische Suszeptibilität mit $\varkappa$, dann ist die Flächendichte dieser Ladungen $\varkappa\mathfrak{E}$ (bzw. $\varkappa\mathfrak{H}$). Von jeder Einheitsladung treten 4π Kraftlinien aus, welche an der gegenüberliegenden nahen Grenzfläche mit der induzierten Flächenladung $-\varkappa\mathfrak{E}$ endigen. Die in den Hohlraum hineingebrachten Meßinstrumente werden das Feld

$$\mathfrak{E} + 4\pi\varkappa\mathfrak{E} = (1 + 4\pi\varkappa)\,\mathfrak{E} = \varepsilon\mathfrak{E} = \mathfrak{D}$$

anzeigen. (Es ist zu beachten, daß das von den Flächenladungen herrührende Feld in unserem Hohlraum homogen ist und sich ebenso wie in einem ebenen Kondensator berechnen läßt.) Wenn wir in einem Dielektrikum einen recht kurzen und sehr breiten Hohlraum senkrecht zu den Kraftlinien herausschneiden, so messen wir als Feldstärke den Vektor der elektrischen Verschiebung. Ganz analog kann man einsehen, daß man im magnetischen Falle den Vektor der Induktion messen wird. Selbstverständlich ist auch hier zu berücksichtigen, daß die gemessenen Feldstärken deshalb nicht die ε- bzw. μ-fachen Werte der Feldstärke ohne Vorhandensein des fraglichen Körpers sein werden, weil man berücksichtigen muß, daß an den Endflächen des fraglichen Körpers scheinbare Ladungen auftreten. Die im Hohlraum gemessenen Feldstärken werden also kleiner als die erwähnten sein. So werden z. B. im Falle eines ferromagnetischen Körpers die an den Grenzflächen auftretenden scheinbaren magnetischen Ladungen die Feldstärke in der Umgebung des Körpers abschwächen. Die in seinem Inneren entsprechend dem Zusammenhang $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$ nach dem erwähnten Verfahren als Feldstärke gemessene Induktion ist jedoch größer als

das ungestörte äußere Feld; natürlich ist die gemessene magnetische Induktion kleiner als die mit μ multiplizierte Vakuumfeldstärke. Diese Erscheinung verursacht den Anschein, daß ein ferromagnetischer Körper die magnetischen Kraftlinien in sich hineinzieht. Die Analogie hinsichtlich der elektrischen Erscheinungen ist vollkommen.

DIE KLASSISCHE ELEKTRONENTHEORIE DER METALLE

§ 36. Der Grundgedanke der Elektronentheorie der Metalle

Gegenüber den elektrolytischen Leitern, bei denen der Leitungsvorgang durch Ionen geschieht, besteht die metallische Leitung in der Bewegung von Elektronen. Es lag zunächst der Gedanke nahe, für das fast freie Elektronengas im Inneren eines Metalles die aus der kinetischen Gastheorie erhaltenen Resultate als gültig anzunehmen. Den ersten Schritt in dieser Richtung hat DRUDE getan.

Zunächst betrachten wir den Grundgedanken seiner Theorie. Aus röntgenographischen Untersuchungen ist uns der Aufbau der Metalle bekannt. So kristallisieren z. B. die Alkalien in einem sogenannten raumzentrierten Gitter, dagegen ihre Nebengruppen (Cu, Ag, Au) in einem flächenzentrierten Gitter usw. Der Gedanke war naheliegend, daß diese Metallatome ihre Valenzelektronen im Metallgitter nicht mehr behalten, sondern abgeben. Diese Elektronen werden also frei, d. h., daß an den einzelnen Punkten des Raumgitters nicht Metallatome, sondern Metallionen sitzen. Die Zwischenräume werden von den freigewordenen Valenzelektronen, dem sogenannten „Elektronengas" ausgefüllt. Wenn wir eine Potentialdifferenz zwischen den zwei Enden eines Metallstückes erzeugen, so werden unter der Wirkung des entstehenden elektrischen Feldes die Elektronen hauptsächlich in einer Richtung wandern, was wir makroskopisch als einen elektrischen Strom beobachten. Aus der Gültigkeit des OHMschen Gesetzes folgt, daß die Elektronen nicht ganz frei sein können. Wenn die Elektronen völlig frei wären, so müßten sie unter der Wirkung des elektrischen Feldes eine beschleunigte Bewegung ausführen. Man muß annehmen, daß gegen die Bewegung der Elektronen irgendeine Art von Widerstand auftritt. Die naheliegendste Annahme war die, daß die Elektronen während ihrer Bewegung ständig mit den Gitterionen zusammenstoßen und deshalb einen Teil ihrer kinetischen Energie abgeben; ihre mittlere Geschwindigkeit wird tatsächlich der Feldstärke proportional. Die den Gitterionen abgegebene kinetische Energie beobachten wir dann als JOULEsche Wärme. Nach dieser Auffassung ist die Erscheinung, daß die Elektronen sich nicht ganz frei bewegen, sondern mit den Gitterionen zusammenstoßen, die Ursache des Widerstandes. Diese Theorie des Widerstandes ist jedoch nach der Wellenmechanik nicht mehr ganz richtig.

Die Ursache der Elektronenemission von Glühkathoden besteht nach der Elektronentheorie der Metalle darin, daß durch das Erhitzen des Metalls einige fast freie Elektronen eine so große kinetische Energie erlangen, daß sie aus dem Metall austreten können.

Die Theorie von DRUDE hat H. A. LORENTZ weiterentwickelt. SOMMERFELD hat diese Theorie unter Anwendung wellenmechanischer Betrachtungen modernisiert, wodurch er mehrere Widersprüche, auf welche die klassische Theorie führte, ganz einwandfrei beseitigen konnte. Eine weitere Entwicklung der Theorie der metallischen Leitung stammt von BLOCH, einem Schüler und Mitarbeiter SOMMERFELDS.

§ 37. Die DRUDEsche Theorie

Die Zahl der in der Volumeneinheit des Metalles vorhandenen Elektronen sei n. Zur Beschreibung der Zusammenstöße mit den Gitterionen müssen wir den Begriff der mittleren freien Weglänge (l) einführen, d. h. den Mittelwert der Strecke, welche die Elektronen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zusammenstößen mit den Gitterionen zurücklegen. Ganz analog zur kinetischen Theorie führen wir auch hier eine Funktion $f(\xi, \eta, \zeta)$ ein, welche die Geschwindigkeitsverteilung beschreibt. ξ, η und ζ bedeuten die Komponenten der Geschwindigkeiten entlang der X, Y und Z-Achse. Die eingeführte Funktion bedeutet, daß sich in 1 cm³ des betrachteten Metalles im Geschwindigkeitsintervall ξ bis $\xi + d\xi$, η bis $\eta + d\eta$ und ζ bis $\zeta + d\zeta$

$$f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \tag{251}$$

Elektronen befinden. Wenn die Geschwindigkeitsverteilung nicht an jeder Stelle des Metalles dieselbe ist (z. B. bei ungleichmäßiger Temperaturverteilung), dann hängt die Funktion f auch noch von den räumlichen Koordinaten ab. Wir müssen statt Gleichung (251) eine allgemeinere Verteilungsfunktion

$$f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \tag{252}$$

benutzen. Da in der Volumeneinheit n Elektronen enthalten sind, so muß die Funktion f erstens der Bedingung

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = n \tag{253}$$

genügen. Wenn die Funktion $f(\xi, \eta, \zeta)$ bekannt wäre (wie z. B. in der kinetischen Gastheorie die MAXWELLsche Verteilung), dann könnten wir damit den Ladungs- und Energietransport (die elektrische und die thermische Leitung) sofort berechnen.

Zur Berechnung des Ladungs- und Energietransportes müssen wir in erster Linie angeben können, wieviel Elektronen durch eine zur X-Achse senkrecht stehende Einheitsfläche während der Zeit dt hindurchtreten. Ein Elektron, das die Geschwindigkeitskomponente ξ besitzt, wird während der Zeit dt die Strecke $\xi\, dt$ in Richtung der X-Achse zurücklegen. Jedes Elektron, das die Geschwindigkeitskomponente ξ besitzt, wird durch unser Flächenelement während der Zeitdauer dt hindurchtreten, wenn es sich wenigstens in der Entfernung $\xi\, dt$ befindet. Um zu berechnen, wie groß der Überschuß der Elektronen

ist, die in der Zeiteinheit durch das Flächenelement in positiver Richtung hindurchtreten, müssen wir das Vorzeichen von ξ beachten. Wenn wir jetzt fragen, wieviel Elektronen verschiedener Geschwindigkeit während der Zeitdauer dt durch die Einheitsfläche treten, so müssen wir die in Gleichung (251) stehende Verteilungsfunktion mit ξ multiplizieren und dann über alle möglichen Geschwindigkeiten integrieren, d.h., wir müssen

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \xi f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \cdot dt \tag{254}$$

berechnen. Wenn wir Gleichung (254) mit der Elektronenladung e multiplizieren, dann erhalten wir die Elektrizitätsmenge, welche während der Zeit dt entlang der X-Achse fließt. Dividieren wir noch durch dt, so erhalten wir die Stromdichte (j_x) entlang der X-Achse:

$$j_x = e \iiint_{-\infty}^{+\infty} \xi f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \tag{255}$$

Damit ist bei bekannter Verteilungsfunktion das Problem der elektrischen Leitung gelöst.

Ganz analog können wir die (von dem Elektronengas verursachte) Wärmeleitung berechnen. Dazu müssen wir berücksichtigen, daß uns jetzt nicht der Transport der Ladung e der Elektronen, sondern der der kinetischen Energie

$$E_{kin} = \frac{m}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \tag{256}$$

interessiert. Die durch eine senkrecht zur X-Achse stehende Einheitsfläche während der Zeiteinheit hindurchtretende thermische Energie ist dann

$$W_x = \frac{m}{2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\, \xi f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \tag{257}$$

j_x und W_x werden gleich Null, wenn $f(\xi, \eta, \zeta)$ eine symmetrische Funktion von ξ ist – da sich dann die positiven und negativen Werte von ξ gerade aufheben. Damit überhaupt ein elektrischer Strom fließt, ist eine elektromotorische Kraft notwendig. Zur Wärmeausbreitung gehört jedenfalls eine Temperaturdifferenz.

Zur tatsächlichen Berechnung der Gleichung (255) und der Gleichung (257) müssen wir in erster Linie die ungestörte Funktion $f_0(\xi, \eta, \zeta)$ kennen. Man muß wenigstens in erster Näherung angeben können, wie sich die ungestörte Funktion infolge des Vorhandenseins eines elektrischen Feldes oder einer Temperaturdifferenz ändert. Drude ging bei seiner Theorie folgendermaßen vor: Auf Grund von Gleichung (255) kann man den Mittelwert ξ der Geschwindigkeiten einführen, den wir mit $\overline{\xi}$ bezeichnen. Gleichung (255) kann man dann unter Berücksichtigung von Gleichung (253) schreiben:

$$j = e n \overline{\xi}, \tag{258}$$

wo wir einfachheitshalber den Index x weggelassen haben (n bedeutet die Zahl der Elektronen in der Volumeneinheit). Wenn wir die von der angewandten Potentialdifferenz herrührende Feldstärke mit E_x bezeichnen, so muß folgende Bewegungsgleichung befriedigt sein:

$$m \frac{d\xi}{dt} = eE_x. \tag{259}$$

Integrieren wir diese Gleichung von 0 bis t, so folgt

$$m\xi(t) = m\xi_0 + eE_x t. \tag{260}$$

Aus Gleichung (260) berechnen wir jetzt den Mittelwert $\overline{\xi}$. Nehmen wir an, daß im Zeitpunkt $t = 0$ gerade ein Zusammenstoß stattgefunden hat. Zu diesem Zeitpunkt wird bei Mittelung über viele Elektronen $\overline{\xi_0} = 0$ sein, da keine Geschwindigkeitsvorzugsrichtung existiert. Von diesem Zeitpunkt an vollführen die Elektronen unter der Wirkung des Feldes eine beschleunigte Bewegung bis zum nächsten Zusammenstoß, der – wenn wir die Geschwindigkeit der Elektronen mit v bezeichnen ($v^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$) – zur Zeit $\tau = l/v$ stattfinden wird (l ist die freie Weglänge). Mitteln wir die Gleichung (260) über die Zeitdauer τ, so folgt für ein Elektron:

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \xi(t)\,dt = \xi_0 + \frac{1}{2}\frac{e}{m}E_x\tau. \tag{261}$$

Durch Mittelung über alle Elektronen verschwindet das erste Glied auf der rechten Seite der Gleichung (261). Wenn wir in das zweite Glied den Wert von τ einsetzen, so folgt

$$\overline{\xi} = \frac{1}{2}\frac{e}{m}E_x l \overline{\left(\frac{1}{v}\right)}. \tag{262}$$

Setzen wir $\overline{\xi}$ in Gleichung (258) ein, so erhalten wir für die Stromdichte:

$$j = \frac{ne^2 l}{2m}E_x \overline{\left(\frac{1}{v}\right)}. \tag{263}$$

Daraus resultiert für die elektrische Leitfähigkeit:

$$\sigma_{el} = \frac{ne^2 l}{2m}\overline{\left(\frac{1}{v}\right)}. \tag{264}$$

Der spezifische Widerstand ist der reziproke Wert der Gleichung (264).

Die Berechnung der Wärmeleitfähigkeit ist nach der Drudeschen Theorie etwas verwickelter. Nehmen wir an, daß sich im Metall die Temperatur entlang der X-Achse ändert. Wir gehen von einer zur X-Achse senkrecht stehenden Einheitsfläche aus. Die durch diese Fläche hindurchtretenden Elektronen haben ihren letzten Zusammenstoß durchschnittlich in einer Entfernung h von dieser Fläche vollführt. Wir müssen jetzt berücksichtigen, daß für die in entgegengesetzten Richtungen hindurchtretenden Elektronen die Ebenen gleichen Ab-

standes ($\pm h$) von der Einheitsfläche an Orten verschiedener Temperatur liegen (vgl. die Abb. 10). Die Elektronen bringen also verschiedene kinetische Energien von hier mit. Das ist der springende Punkt der ganzen Theorie der Wärmeleitung. Wir können jedoch die Entfernung h nicht einfach der freien Weglänge l gleichsetzen, weil sich ja die Elektronen nicht nur entlang der X-Achse, sondern in allen Raumrichtungen bewegen. Die Orte der letzten Zusammenstöße liegen auf einer Kugelfläche, d. h., wir müssen die Entfernung jedes Punktes dieser Kugelfläche vom Mittelpunkt entlang der X-Achse mitteln unter gleichzeitiger Berücksichtigung des Umstandes, daß wir bei schiefem Eintritt nicht ein ganzes Elektronenbündel vom Einheitsquerschnitt, sondern nur den Teil davon zu berücksichtigen haben, der durch unser Flächenelement hindurchgeht. Für h ergibt sich

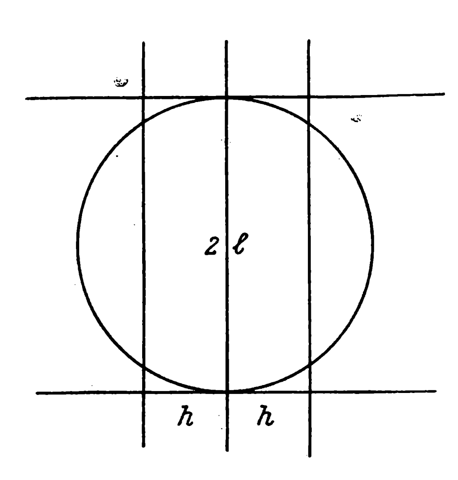


Abb. 10. Veranschaulichung der Theorie der Wärmeleitung

$$h = \frac{\int\limits_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} l^3 \cos^2\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\pi} l^2 \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi} = \frac{2}{3} l\,. \tag{265}$$

Da wir die in den entgegengesetzten Richtungen sich bewegenden Elektronen gesondert betrachten müssen, so benötigen wir noch die Zahl der Elektronen, welche durch die Einheitsfläche während der Zeitdauer in einer Richtung hindurchtreten. Diese erhalten wir aus dem Integral

$$Z = \int\limits_0^{+\infty} \xi \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta, \zeta) \, d\eta \, d\zeta \right] d\xi\,. \tag{266}$$

Gleichung (266) können wir unter Berücksichtigung der Gleichung (253) und der in Gleichung (258) gegebenen Definition von $|\overline{\xi}|$ schreiben:

$$Z = \frac{n}{2} |\overline{\xi}|\,. \tag{267}$$

Mit Hilfe dieser Ergebnisse können wir eine Formel für die Wärmeströmung angeben. Durch unsere Einheitsfläche, deren Koordinate entlang der X-Achse wir mit x_0 bezeichnen, werden von links in der Zeiteinheit Z Elektronen hindurchtreten, welche ihre Energie beim Zusammenstoß am Orte $x_0 - h$ erhalten haben. Ihre Energie entspricht der Temperatur des Ortes $x_0 - h$. Von rechts fallen ebenfalls Elektronen der Zahl Z ein, welche eine der Temperatur der

Stelle $x_0 + h$ entsprechende kinetische Energie mit sich führen. Unter Berücksichtigung der Gleichung (267) folgt für den gesamten Wärmestrom:

$$W = \left\{ \left(\frac{m}{2} \overline{v^2} \right)_{x_0 - h} - \left(\frac{m}{2} \overline{v^2} \right)_{x_0 + h} \right\} \frac{n}{2} \overline{\xi}. \tag{268}$$

Den in der geschweiften Klammer stehenden Ausdruck kann man nicht aus experimentellen Daten entnehmen. Es ist deshalb zweckmäßig, diesen Ausdruck mit dem Temperaturgradienten $\frac{\partial T}{\partial x}$ in Zusammenhang zu bringen, weil dieser eine unmittelbare physikalische Bedeutung besitzt. Wir müssen jedoch die Verteilungsfunktion $f(\xi, \eta, \zeta)$ explizit kennen. Nach der klassischen Theorie kann man annehmen, daß diese Funktion dieselbe ist wie die aus der kinetischen Gastheorie bekannte MAXWELLsche Verteilungsfunktion

$$f_0(\xi, \eta, \zeta) = n \left(\frac{m}{2 \pi k T} \right)^{3/2} e^{-\frac{\frac{m}{2} v^2}{k T}}. \tag{269}$$

Hier bedeuten

$$v^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \tag{270}$$

T die absolute Temperatur und k die BOLTZMANNkonstante. Aus Gleichung (269) können wir durch einfache Integrationen die aus der kinetischen Gastheorie bekannten Zusammenhänge herleiten:

$$\frac{m}{2} \overline{v^2} = \frac{3}{2} k T \tag{271}$$

und

$$|\overline{\xi}| = \sqrt{\frac{2 k T}{\pi m}}, \tag{272}$$

weiterhin

$$\overline{v} = 2 |\overline{\xi}|. \tag{273}$$

Setzen wir diese Resultate in Gleichung (268) ein, so erhalten wir

$$W = -\frac{n}{4} \overline{v} \frac{3}{2} k \frac{\partial T}{\partial x} 2 h \tag{274}$$

oder unter Berücksichtigung von Gleichung (265):

$$W = -\frac{n}{2} \overline{v} k l \frac{\partial T}{\partial x}. \tag{275}$$

Aus Gleichung (275) folgt für die thermische Leitfähigkeit:

$$\sigma_W = \frac{n \overline{v}}{2} k l. \tag{276}$$

Gleichung (276) gibt eigentlich nur einen Teil der thermischen Leitfähigkeit an, und zwar den, der von der Bewegung der Elektronen herrührt, also von der Erscheinung, daß die fast freien Metallelektronen von einem wärmeren Orte

des Metalles nach einem kälteren in Form von kinetischer Energie Wärmeenergie transportieren. Die Wärmeleitung kann aber auch so erfolgen, daß die benachbarten schwingenden Gitterionen einen Teil ihrer Energie unmittelbar einander übergeben. Der letztere Wärmeleitungsmechanismus tritt auch in Isolatoren auf und ist bei diesen die einzige Ursache der Wärmeleitung. In Metallen treten beide Erscheinungen gleichzeitig auf. Wir beobachten als Wärmeleitvermögen die Summe beider. Nur in dem Falle, daß die infolge der Bewegung der Elektronen auftretende thermische Leitfähigkeit gegenüber dem auch in Isolatoren auftretenden Wärmeleitungsmechanismus stark überwiegt, können wir sagen, daß die Wärmeleitung in Metallen durch Gleichung (276) beschrieben wird.

Wir erhalten einen wichtigen Zusammenhang, wenn wir aus Gleichung (264) und Gleichung (276) das Verhältnis der thermischen und der elektrischen Leitfähigkeit bilden:

$$\frac{\sigma_W}{\sigma_{el}} = m \frac{k}{e^2} \frac{\bar{v}}{\overline{\left(\frac{1}{v}\right)}}. \tag{277}$$

Da die DRUDEsche Theorie nur eine rohe Näherung darstellt, können wir $\frac{\bar{v}}{\overline{\left(\frac{1}{v}\right)}}$ gleich $\overline{v^2}$ setzen. Wenn wir $\overline{v^2} = \frac{3\,kT}{m}$ aus Gleichung (271) in Gleichung (277) einsetzen, so folgt

$$\frac{\sigma_W}{\sigma_{el}} = 3 \frac{k^2}{e^2} T. \tag{278}$$

Durch Multiplikation von Zähler und Nenner der rechten Seite von Gleichung (278) mit dem Quadrat der LOSCHMIDTschen Zahl L erhalten wir

$$\frac{\sigma_W}{\sigma_{el}} = 3 \frac{R^2}{F^2} T. \tag{279}$$

Wenn wir die numerischen Werte von R und F einsetzen, ergibt sich

$$\frac{\sigma_W}{\sigma_{el}} = 2{,}23 \cdot 10^8\, T. \tag{280}$$

WIEDEMANN und FRANZ haben schon 1853 auf experimentellem Wege die Gesetzmäßigkeit entdeckt, daß das Verhältnis der thermischen zur elektrischen Leitfähigkeit für alle Metalle fast übereinstimmt. L. LORENZ bestätigte experimentell im Jahre 1882, daß der Quotient der zwei Leitfähigkeiten der absoluten Temperatur proportional ist. Unsere Gleichung (280) drückt dieses vereinigte WIEDEMANN-FRANZ-LORENZsche Gesetz aus und ist damit in Übereinstimmung mit der Erfahrung.

Zum Vergleich mit den experimentellen Daten ist es zweckmäßig, σ_W in den Einheiten cal/grad cmsec und σ_{el} in $\text{Ohm}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$ auszudrücken:

$$\frac{\sigma_W \left[\frac{\text{cal}}{\text{grad} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}}\right]}{\sigma_{el} \left[\frac{1}{\text{Ohm} \cdot \text{cm}}\right]} = 2{,}23 \cdot 10^8 \frac{10^{-9}}{4{,}2 \cdot 10^7} T = 5{,}3 \cdot 10^{-9}\, T. \tag{281}$$

Bei $T = 300°$K ist das Verhältnis der zwei Leitfähigkeiten theoretisch gleich $1{,}6 \cdot 10^{-6}$. Die Übereinstimmung der theoretisch hergeleiteten Gleichung mit der Erfahrung zeigt unsere untenstehende Tabelle. Das WIEDEMANN-FRANZsche Gesetz bewährt sich nach den in Spalte 2 und 4 angegebenen Werten ziemlich gut. Es darf dabei nicht unberücksichtigt bleiben, daß die einzelnen Leitfähigkeiten der aufgeführten Metalle ziemlich verschieden voneinander sind. Außerdem messen wir die gesamte thermische Leitfähigkeit. In Gleichung (281) sollte man eigentlich nur den von den Elektronen herrührenden Teil einsetzen. Die Erfahrung spricht vollständig für die Richtigkeit des DRUDEschen Gedankenganges. Nach dem heutigen Wissensstand kann man jedoch sagen, daß bei den oben durchgeführten theoretischen Betrachtungen nach DRUDE rein „zufällig" der richtige Wert für den Quotienten σ_W/σ_{el} erhalten worden ist.

	$\frac{\sigma_W}{\sigma_{el}} \cdot 10^6$		$\frac{\sigma_W}{\sigma_{el}} \cdot 10^6$
Cu	1,53	Mo	1,79
Ag	1,58	Bi	2,27
Au	1,61	W	2,09
Al	1,39	Fe	1,69
Zn	1,57	Rh	1,76
Sn	1,73	Pd	1,78
Cd	1,66	Ir	1,71
Pb	1,69	Pt	1,72

§ 38. Die Theorie von H. A. LORENTZ

Wie wir erwähnten, hat die Beseitigung aller Widersprüche, welche in der Elektronentheorie der Metalle auftreten, nur die Wellenmechanik ermöglicht. Die größte Bedeutung der LORENTZschen Theorie liegt eigentlich darin, daß sie als (klassisches) Modell für die quantenmechanische Theorie diente. Wir wollen deshalb die LORENTZsche Theorie nur in großen Zügen besprechen.

LORENTZ untersuchte zunächst, wie sich die in Gleichung (252) angegebene Verteilungsfunktion mit der Zeit ändert und wie die Verteilung sein muß, bei der diese Funktion stationär wird. Wir nehmen an, daß ein elektrisches Feld der Stärke E_x vorhanden ist. Die einzelnen Elektronen erlangen dadurch die Beschleunigung

$$\ddot{x} = \frac{e}{m} E_x. \qquad (283)$$

Die Zahl

$$Z = f(\xi, \eta, \zeta, x, y, z)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, dx\, dy\, dz \qquad (284)$$

wird sich aus zwei Ursachen während der Zeit ändern. Erstens ändert sie sich wegen der translatorischen Bewegung der Elektronen. Diese Änderung ist wieder die Summe zweier Komponenten; einerseits geht die Koordinate x während der Zeit dt in $x + \xi dt$ über – analog auch die anderen zwei Koordinaten –, andererseits vergrößert sich die Geschwindigkeit ξ der Elektronen infolge des Vorhandenseins des elektrischen Feldes um $\ddot{x}\,dt$. Zweitens ändert sich Gleichung (284) auch deshalb, weil die Elektronen mit den Gitterionen zusammenstoßen. Im stationären Fall müssen sich diese Änderungen gegenseitig aufheben.

LORENTZ versuchte, das erwähnte Problem mit Hilfe des Ansatzes

$$f(\xi, \eta, \zeta, x, y, z) = f_0(x, v) + \xi\,\chi(x, v) \tag{285}$$

zu lösen, wobei f_0 und χ die Geschwindigkeit nur in Form ihres Betrages enthalten. f_0 bedeutet den isotropen (ohne Vorhandensein eines Feldes auftretenden) Teil von f. $\xi\chi$ ist ein im Verhältnis zu f_0 kleines, vom Felde herrührendes zusätzliches Glied. Unter Anwendung des erwähnten Postulates, daß im stationären Fall die Änderungen sich gegenseitig vernichten, folgt die Differentialgleichung

$$\frac{v}{l}\,\xi\chi = -\left(\xi\,\frac{\partial f}{\partial x} + \ddot{x}\,\frac{\partial f}{\partial \xi}\right). \tag{286}$$

Da nach unserer Annahme $\xi\chi \ll f_0$ ist, können wir in Gleichung (286) die Funktion f durch f_0 ersetzen. f_0 enthält die Geschwindigkeitskomponente ξ nur implizit durch v. Es gilt für die partielle Ableitung nach ξ:

$$\frac{\partial f_0}{\partial \xi} = \frac{\partial f_0}{\partial v} \cdot \frac{\xi}{v}.$$

Unter Berücksichtigung aller Besonderheiten erhalten wir aus Gleichung (286) für χ den Ausdruck

$$\chi(x, v) = -\frac{l}{v}\left(\frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{\ddot{x}}{v}\,\frac{\partial f_0}{\partial v}\right). \tag{287}$$

Das ist die ursprünglich von BOLTZMANN hergeleitete und nach ihm benannte Differentialgleichung. Kennen wir die Funktion $\chi(x, v)$, so können wir mit Hilfe von Gleichung (285) unter Verwendung der Gleichungen (255) und (257) des vorigen Paragraphen die elektrische und thermische Leitfähigkeit tatsächlich berechnen. Wir erhalten

$$j = e\iiint_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \chi\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \tag{288}$$

und

$$W = \frac{m}{2}\iiint_{-\infty}^{+\infty} v^2 \xi^2 \chi\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \tag{289}$$

Das f_0 enthaltende Glied fällt aus Symmetriegründen heraus.

Die weitere Berechnung liefert für die Stromdichte

$$j = \frac{2}{3} \frac{e^2 l n}{m} \left(\frac{1}{v}\right) E_x. \tag{290}$$

$\left(\frac{1}{v}\right)$ kann man aus der MAXWELLschen Geschwindigkeitsverteilung berechnen, so daß man für die elektrische Leitfähigkeit das Resultat

$$\sigma_{el} = \frac{4}{3} \frac{e^2 l n}{\sqrt{2\pi m k T}} \tag{291}$$

erhält. Ähnlich folgt für den durch die Flächeneinheit gehenden Wärmestrom

$$W = -\frac{8}{3} \frac{l n k^2 T}{\sqrt{2\pi m k T}} \cdot \frac{dT}{dx} \tag{292}$$

und für die thermische Leitfähigkeit

$$\sigma_W = \frac{8}{3} \frac{l n k^2 T}{\sqrt{2\pi m k T}}. \tag{293}$$

Bilden wir das Verhältnis von Gleichung (293) und (291), so erhalten wir den Zusammenhang

$$\frac{\sigma_W}{\sigma_{el}} = 2 \frac{k^2}{e^2} T. \tag{294}$$

Das ist wiederum das WIEDEMANN-FRANZ-LORENZsche Gesetz, jedoch mit einer anderen numerischen Konstanten. In der DRUDEschen Theorie war der Faktor 3 aufgetreten [siehe Gleichung (279)]. Dieser Umstand ist überraschend, zumal wir festgestellt haben, daß die DRUDEsche Theorie in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung ist, dagegen das viel strenger hergeleitete Resultat von LORENTZ nicht mehr. Das legt schon den Gedanken nahe, daß die gute Übereinstimmung der DRUDEschen Theorie mit der Erfahrung reiner Zufall ist.

Übrigens deuten darauf schon die folgenden Schwierigkeiten der DRUDEschen Theorie hin: Das Verhältnis der thermischen und der elektrischen Leitfähigkeit ist zwar tatsächlich auch experimentell der absoluten Temperatur proportional. Nach der DRUDEschen Theorie sollte jedoch, wie das aus Gleichung (264) unter Berücksichtigung von Gleichung (271) folgt, σ_{el} zu $\sqrt{T}$ umgekehrt proportional sein. Dagegen ist bei normaler Temperatur die Leitfähigkeit der Metalle ungefähr $\frac{1}{T}$ proportional. Ähnlich folgt aus Gleichung (276) – ebenfalls unter Berücksichtigung von Gleichung (271) –, daß σ_W zu $\sqrt{T}$ direkt proportional sein müßte. Nach der Erfahrung ist die thermische Leitfähigkeit der Metalle bei normaler Temperatur in erster Näherung von der Temperatur unabhängig. Aus all diesen Tatsachen können wir ersehen, daß es eigentlich ein reiner Zufall ist, daß die von LORENZ empirisch entdeckte Gesetzmäßigkeit auch aus der DRUDEschen Theorie folgt.

Eine weitere große Schwierigkeit der DRUDEschen Theorie ist folgende: Nach dem DULONG-PETITschen Gesetz beträgt die Atomwärme eines festen Stoffes

annähernd 6 cal/g-Atom · Grad. Auf jeden Freiheitsgrad fällt nach dem Äquipartitionstheorem die Energie $\frac{1}{2} R T$. Da jedes Atom eines festen Stoffes 6 Freiheitsgrade besitzt (drei infolge der Schwingungsbewegung um die Gleichgewichtslage in den drei Raumrichtungen und ebenfalls drei wegen der bei diesen Bewegungen auftretenden potentiellen Energien), so beträgt die Atomwärme $6 \frac{1}{2} R = 3 R$ oder annähernd gleich 6 cal/Grad · Mol. Da bei den einatomigen Gasen nur drei translatorische Freiheitsgrade auftreten, beträgt die Atomwärme nur 3 cal/Grad · Mol. Wenn wir mit DRUDE annehmen, daß im Metall freie Elektronen vorhanden sind und sich von einem Atom nur ein Elektron ablöst, so müßte auch dieses Elektronengas die „Atomwärme" von 3 cal/Grad · Mol besitzen, d. h., ein Mol des Metalles sollte nicht die Atomwärme 6 cal/Grad · Mol, sondern 9 cal/Grad · Mol haben. Diese Aussage steht jedoch im krassen Widerspruch mit dem Gesetz von DULONG und PETIT und der Erfahrung, nach der die Atomwärme der Metalle und der anderen festen Stoffe um 6 cal/Grad · Mol liegt. Nach den Betrachtungen hinsichtlich der spezifischen Wärme erscheint es plausibel, daß ein Elektronengas überhaupt nicht existieren kann. An allen diesen Widersprüchen konnte auch die LORENTZsche Theorie nichts ändern.

§ 39. Die Elektronenemission der Glühkathode. RICHARDSON-Gleichung

Eine im Vakuum bis zur Glühtemperatur erhitzte Metallfläche emittiert Elektronen. Zuerst wurde diese Erscheinung nach ihrem Entdecker unter dem Namen EDISONeffekt bekannt. Wenn wir den Glühfaden auf ein negatives, eine gegenüberliegende Elektrode auf ein positives Potential aufladen, so wird ein negativer Strom vom Glühfaden zu der positiv geladenen Elektrode fließen. Auch dann, wenn wir der Elektrode ein negatives Potential erteilen, können wir einen kleinen Strom beobachten. Die Elektronen verlassen die Glühkathode nicht mit der Geschwindigkeit Null, sondern mit einer zwar kleinen, aber endlichen Geschwindigkeit, so daß sie eine kleine entgegengesetzte Potentialdifferenz überwinden können. Wenn wir annehmen, daß die Elektronen mit einer MAXWELLschen Geschwindigkeitsverteilung den Glühfaden verlassen, so wird im Falle einer negativen (also hemmenden) Potentialdifferenz der Strom dem Ausdruck $e^{-\frac{eV}{kT}}$ proportional sein, wobei $-V$ die obige Potentialdifferenz bedeutet.

Wenden wir eine positive Potentialdifferenz an und erhöhen diese stufenweise, so nimmt die Stromstärke proportional $V^{3/2}$ zu. Wir befinden uns im sogenannten Raumladungsgebiet. Die Bezeichnungsweise stammt daher, daß in diesem Gebiet die angewandte Potentialdifferenz noch nicht stark genug ist, um alle von der Glühkathode austretenden Elektronen auf die gegenüberliegende positive Elektrode zu befördern. Deshalb bildet sich um die Glühkathode herum eine aus negativen Elektronen bestehende Raumladung. Erhöhen wir weiter die Potentialdifferenz, so erreichen wir nach Überschreitung eines kleinen Über-

gangsgebietes den Zustand der Sättigung, in dem jedes austretende Elektron die positive Elektrode tatsächlich erreicht und die Stromstärke von der Potentialdifferenz unabhängig wird. Erhöhen wir die angelegte Spannung weiter, so kann die Stromstärke nicht mehr zunehmen. Man spricht hier vom Gebiet des Sättigungsstromes. Die hier auftretenden Erscheinungen sind relativ einfach zu behandeln. Unsere letztere Behauptung ist bei Anwendung extrem starker Feldstärken noch ein wenig ergänzungsbedürftig. Bei sehr hohen Feldstärken erreichen wir das Gebiet der kalten Emission. Im weiteren werden wir von dieser nur bei extrem hohen Feldstärken wesentlichen Emission absehen.

Wie schon erwähnt, sind im Inneren der Metalle quasifreie Elektronen vorhanden. Wir müssen annehmen, daß irgendeine Potentialdifferenz diese Elektronen am Austritt aus dem Metall hindert, weil es sonst gar nicht notwendig wäre, die Glühkathode zu erwärmen. Woher diese Potentialdifferenz herrührt, ist eine ziemlich verwickelte theoretische Frage, die noch nicht völlig geklärt ist. Wir erwähnen hier nur, daß ein Teil der Potentialdifferenz zweifellos davon herrührt, daß bei Entfernung eines Elektrons aus dem Metall sein Feld im Metall eine elektrische Influenz verursacht. Die davon herrührende Ladungsverteilung ist bestrebt, das Elektron in das Metall zurückzuziehen. Dieser Effekt tritt zweifelsohne auf, genügt jedoch allein nicht zur Erklärung der Größe der Austrittsarbeit.

Zur tatsächlichen Berechnung des Sättigungsstromes nehmen wir an, daß die ebene Grenzfläche unseres Metallstückes senkrecht zur X-Achse orientiert ist. Wir bezeichnen die der Austrittsarbeit entsprechende Potentialdifferenz mit b. ξ_1 sei die zur X-Achse parallele Geschwindigkeit eines Elektrons innerhalb des Metalles, außerhalb ξ_2. Es muß dann folgender Zusammenhang bestehen:

$$\frac{m}{2}\,(\xi_1^2 - \xi_2^2) = e b. \tag{295}$$

Nur solche Elektronen können aus dem Metall austreten, deren Geschwindigkeit ξ_0 den aus der Gleichung

$$\frac{m}{2}\,\xi_0^2 = e b \tag{296}$$

berechneten Wert erreicht. Mit Hilfe der in Gleichung (251) definierten Geschwindigkeitsfunktion können wir ohne weiteres den durch die Oberflächeneinheit des Metalles emittierten Strom aufschreiben:

$$j_s = e \int\limits_{\xi=\xi_0}^{+\infty} \int\limits_{\eta=-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\zeta=-\infty}^{+\infty} \xi\, f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\,. \tag{297}$$

Führen wir die der klassischen Theorie entsprechende Hypothese ein, daß die Elektronen im Inneren des Metalles die MAXWELLsche Geschwindigkeitsverteilung besitzen, daß also nach Gleichung (269)

$$f(\xi, \eta, \zeta) = n \left(\frac{m}{2\,\pi\, k\, T}\right)^{3/2} e^{-\frac{\frac{m}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}{k T}} \tag{298}$$

ist, so erhalten wir für j_s das Resultat

$$j_s = e \cdot n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int\limits_{\xi=\xi_0}^{+\infty} \xi e^{-\frac{m\xi^2}{2kT}} d\xi \cdot \int\limits_{\eta=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m\eta^2}{2kT}} d\eta \cdot \int\limits_{\zeta=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m\zeta^2}{2kT}} d\zeta. \tag{299}$$

Das erste Integral können wir unmittelbar berechnen. Die in den zwei weiteren Faktoren stehenden Integrale sind vom Typ

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha y^2} dy. \tag{300}$$

Führen wir ebene Polarkoordinaten ein, so geht Gleichung (300) in die Form

$$I = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha r^2} 2\pi r dr = \left[-2\pi \frac{e^{-\alpha r^2}}{2\alpha}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{\alpha} \tag{301}$$

über. Für Gleichung (299) erhalten wir das Resultat

$$j_s = en \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}\, e^{-\frac{eb}{kT}}, \tag{302}$$

in welches wir den aus Gleichung (296) berechneten Wert von ξ_0 bereits eingesetzt haben.

Die Sättigungsstromstärke wird allgemein dargestellt durch

$$j_s = c\sqrt{T} e^{-\frac{eb}{kT}}, \tag{303}$$

wobei c und b zwei das Metall charakterisierende Konstanten sind. Das ist die in der Theorie der Glühkathoden so bedeutungsvolle RICHARDSON-Gleichung in ihrer ursprünglichen Gestalt.

Die Behandlung derselben Frage nach der Quantenmechanik hat zu einer etwas anderen Formel geführt, welche die Form

$$j_s = D T^2 e^{-\frac{eb}{kT}} \tag{304}$$

besitzt. Wir könnten uns denken, daß es sehr leicht ist, auf experimentellem Wege zu entscheiden, welche Gleichungsform tatsächlich richtig ist. Das ist jedoch nicht so einfach, da bei der Beschreibung der Temperaturabhängigkeit der Exponentialausdruck so ausschlaggebend ist, daß neben ihm eine kleine Potenz von T kaum bemerkbar wird. Es ist deshalb in den meisten praktischen Fragen ganz gleichgültig, ob wir die Gleichung (303) oder (304) benutzen. Man könnte sich aus dem Vergleich von Gleichung (302) und (303) denken, daß man den Wert der Konstante c einfach theoretisch berechnen kann; dem widerspricht jedoch die Erfahrung. Die Abhängigkeit der thermischen Elektronenemission von der Temperatur beschreibt zwar die Gleichung (303) oder (304) tatsächlich richtig. Den Wert der erwähnten Konstante müssen wir aus der Erfahrung entnehmen.

§ 40. Das Gebiet der Raumladungserscheinungen

Im vorigen Paragraphen haben wir kursorisch die Raumladungserscheinungen erwähnt. In diesem Paragraphen wollen wir diese Erscheinung nach dem von SCHOTTKY und LANGMUIR herrührenden theoretischen Gedankengang besprechen.

Nehmen wir an, daß unsere Kathode von einer ebenen Fläche begrenzt wird und ihr gegenüber eine ebenfalls ebene Anode steht. Bezeichnen wir mit φ das Potential an irgendeiner Stelle zwischen den zwei Elektroden und mit N die Zahl der Elektronen in einer Volumeneinheit des Raumes zwischen den beiden Elektroden; j sei die Stromdichte. Wenn wir die ursprüngliche kleine Austrittsgeschwindigkeit der emittierten Elektronen vernachlässigen, so können wir sofort folgende Energiegleichung aufschreiben:

$$\frac{1}{2} m v^2 = - \varphi e. \tag{305}$$

Außerdem besteht für die Raumladung selbstverständlich die POISSONsche Gleichung

$$\Delta \varphi = - 4 \pi \varrho = - 4 \pi N e. \tag{306}$$

Die Stromdichte ist durch

$$j = - \varrho v \tag{307}$$

gegeben. Aus den Gleichungen (307) und (305) folgt

$$- \varrho = \frac{j}{v} = \frac{j}{\sqrt{\varphi}} \sqrt{\frac{m}{-2e}}. \tag{308}$$

Nach Gleichung (306) erhalten wir

$$\Delta \varphi = 2 \pi \sqrt{\frac{2m}{-e}} \frac{j}{\sqrt{\varphi}}. \tag{309}$$

Diese Differentialgleichung müssen wir unter Berücksichtigung folgender Grenzbedingungen integrieren: Die Kathode sei geerdet, so daß $\varphi_K = 0$ ist. Das Potential der Anode sei $\varphi_A = V$. Wir fordern weiter, daß die Feldstärke unmittelbar an der Kathode gleich Null wird, d.h.

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_K = 0. \tag{310}$$

Die Richtigkeit dieser Behauptung können wir auf folgendem Wege einsehen: Die die Kathode umgebende negative Raumladung versucht das Austreten der Elektronen zu hindern. Die Elektronen treten mit einer kleinen, jedoch endlichen Geschwindigkeit aus der Kathode. In der unmittelbaren Nähe der Kathode muß der Gradient deshalb von entgegengesetzter Richtung sein, damit er diese Elektronen abbremsen kann. Erst in einer von der Kathode kleinen, jedoch endlichen Entfernung wird dieser Gradient gleich Null sein. Wir vernachlässigen jedoch diese kleine Entfernung und benutzen deshalb Gleichung

(310) als Grenzbedingung. Da nach unserer Annahme der Zustand stationär ist, können die Funktionen φ, ϱ, j nicht von der Zeit abhängen.

Unsere Differentialgleichung (309) definiert j als eine Funktion von φ. Wir können noch vor der Lösung dieser Differentialgleichung folgende wichtige Schlüsse ziehen:

Wenn φ_1 und das dazugehörende j_1 Lösungen der Differentialgleichung sind, so müssen $\varphi_2 = a\varphi_1$, und $j_2 = a^{3/2}\, j_1$ ebenfalls Lösungen dieser Gleichung sein. Wenn weiterhin V_1 und I_1 zwei der ersten Lösung entsprechende Werte der unabhängigen und abhängigen Veränderlichen sind, so gehören zur anderen Lösung die zusammengehörenden Werte $V_2 = a\, V_1$ und $I_2 = a^{3/2}\, I_1$. Daraus folgt

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{V_2^{3/2}}{V_1^{3/2}} \tag{311}$$

oder

$$I = \text{const } V^{3/2}. \tag{312}$$

Damit ist der Zusammenhang zwischen der Potentialdifferenz und der Stromstärke im Gebiet der Raumladung gefunden.

Zur Integration von Gleichung (309) verfahren wir folgendermaßen: Die Gleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{-e}} \cdot \frac{j}{\sqrt{\varphi}} \tag{313}$$

multiplizieren wir mit $2\,\frac{d\varphi}{dx}$; dann folgt

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = 8\pi \sqrt{\frac{2m}{-e}}\, j \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{\varphi}\,. \tag{314}$$

Da an der Kathode sowohl φ als auch $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ verschwinden, so erhalten wir

$$\frac{d\varphi}{dx} = \left(8\pi \sqrt{\frac{2m}{-e}}\, j\right)^{1/2} \cdot \varphi^{1/4}. \tag{315}$$

Mit Hilfe einer weiteren Integration folgt aus Gleichung (315)

$$\varphi^{3/4} = \frac{3}{4}\left(8\pi \sqrt{\frac{2m}{-e}}\, j\right)^{1/2} x. \tag{316}$$

Wenn wir die Entfernung der ebenen Endfläche der Kathode und der Anode mit l bezeichnen, so drückt die Gleichung

$$I = \frac{\sqrt{2}}{9\pi}\sqrt{\frac{-e}{m}}\,\frac{V^{3/2}}{l^2}. \tag{317}$$

die Abhängigkeit der Stromdichte von der angewandten Potentialdifferenz im Raumladungsgebiet aus.

Bei technischen Anwendungen kommt es häufiger vor, daß die drahtförmige Kathode von einer zylindrischen Anode umgeben wird. Es ist dann zweck-

mäßig, I so zu definieren, daß es den von der Längeneinheit des Glühfadens emittierten Strom bedeutet:

$$I = 2\,\pi r j. \tag{318}$$

Bei der Integration unserer Differentialgleichung müssen wir Δj als Funktion von r ausdrücken. Eigentlich müßten wir $\Delta\varphi$ in Zylinderkoordinaten darstellen. Aus Symmetriegründen bleibt jedoch nur die Abhängigkeit von r erhalten. Nach Durchführung der eben besprochenen analogen Rechnungen erhalten wir als Resultat:

$$I = \frac{2\sqrt{2}}{9}\sqrt{\frac{-e}{m}}\,\frac{V^{3/2}}{R}, \tag{319}$$

wobei R den Halbmesser der Anode bedeutet. Diese Lösung ist nur dann streng richtig, wenn die Glühkathode ein unendlich dünner Faden wäre. Trotz dieser Vernachlässigung liefert unser Resultat (319) eine für die Praxis vollständig ausreichende Näherung.

§ 41. Der HALLeffekt

Ein Metallstreifen von der Dicke d und der Breite b werde von einem Strom der Stärke I in seiner Längsrichtung durchflossen. Wir bringen dieses Metallband so in ein magnetisches Feld, daß die Richtung des Feldes parallel zur Dicke (d) des Bandes ist. Dann werden wir folgendes beobachten: In der Richtung der Breite (b) des Metallbandes wird zwischen den zwei Endflächen eine Potentialdifferenz auftreten, welche der Stromstärke und der magnetischen Feldstärke direkt, der Dicke des Metallbandes dagegen umgekehrt proportional ist. Diese Erscheinung nennen wir den HALLeffekt. Formelmäßig ausgedrückt ist also

$$\Phi = R\,\frac{H I}{d}. \tag{320}$$

R ist die HALLkonstante des Leiters. Zur anschaulichen Deutung der Erscheinung nehmen wir an, daß der Strom nach rechts fließt und der Vektor des magnetischen Felds nach hinten gerichtet ist. Dann werden die den Strom erzeugenden Ladungsträger durch das magnetische Feld nach oben abgelenkt. Die Ladungsträger werden sich dort so lange anreichern, bis das von ihnen verursachte elektrostatische Feld den ablenkenden Einfluß des magnetischen Feldes gerade kompensiert.

Wir müssen hier gleich auf einen interessanten Umstand aufmerksam machen: Bei den meisten elektrischen Erscheinungen können wir den Strom entweder so charakterisieren, daß sich positive Ladungen in der Stromrichtung oder negative Ladungen in der entgegengesetzten Richtung bewegen. Nach beiden Betrachtungsweisen kommen wir zu denselben Schlußfolgerungen. Das ist die Ursache, daß die Physik lange Zeit hindurch die Frage nicht beantworten konnte, ob es nur positive oder negative oder gleichzeitig beide Arten von Ladungsträgern gibt.

Beim HALLeffekt sind die Verhältnisse anders. In unserem vorher erwähnten Beispiel wird der „Strom" nach oben abgelenkt. Wenn der Strom von der Bewegung positiver Ladungen herrührt, so wird an der oberen Grenzfläche eine positive Ladung und demzufolge auch ein positives Potential auftreten. Wenn der Strom infolge der Bewegungen negativer Ladungen (Elektronen) entsteht, so wird dort eine negative Ladung und ein negatives Potential auftreten, d. h., die durch Gleichung (320) definierte HALLkonstante ist im Fall der Strömung von positiven Ladungsträgern positiv und im Falle von negativen Ladungsträgern negativ. Bevor wir aus dieser Tatsache weitere Schlüsse ziehen, wollen wir die strengere Theorie des HALLeffektes besprechen.

Im stationären Fall muß das magnetische Feld die Wirkung des durch den HALLeffekt erzeugten Feldes gerade kompensieren:

$$E_y - \frac{\bar{v}_x}{c} H_z = 0, \tag{321}$$

wobei $\bar{v}_x$ die entlang des Metallstreifens auftretende mittlere Geschwindigkeit bedeutet. Wir verlangen jedoch, daß die mittlere Ablenkung in Richtung der Breite des Bandes verschwindet. Deshalb müssen wir Gleichung (321) noch ein wenig korrigieren. Da die entlang des Bandes auftretende Geschwindigkeit zwischen zwei Zusammenstößen linear mit der Zeit zunimmt und man nach dem LORENTZschen Kraftgesetz

$$m\dot{\mathfrak{v}} = e\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}, \mathfrak{H}]\right\} \tag{322}$$

erhält, so folgt für $\dot{v}_y$ – also für die zeitliche Ableitung der entlang der Bandbreite auftretenden Geschwindigkeitskomponente – die Gleichung

$$\dot{v}_y = \frac{e}{m}\left[E_y - \frac{v_x}{c} H\right]. \tag{323}$$

Daher kann man $\dot{v}_y$ schreiben:

$$\dot{v}_y = A + Bt, \tag{324}$$

wobei sich $v_y = At + \frac{1}{2}Bt^2$ ergibt. Wenn wir jetzt über die Zeit von 0 bis τ mitteln, so wird $\bar{\dot{v}}_y$ gleich Null sein, wenn $A + \frac{1}{2}B\tau = 0$, $\bar{v}_y$ dagegen dann, wenn $A + \frac{1}{3}B\tau = 0$ ist. Da andererseits der Zusammenhang (321) sich nicht auf die Kräfte, sondern auf die Verschiebungen beziehen soll und die ersteren den Beschleunigungen, die letzteren den Geschwindigkeiten proportional sind, so müssen wir – den berechneten Mittelwerten entsprechend – die oben erwähnte Gleichung (321) mit dem Faktor 2/3 korrigieren. Wir erhalten statt Gleichung (321) folgenden Ausdruck:

$$E_y - \frac{2}{3}\frac{\bar{v}_x}{c} H_z = 0. \tag{325}$$

Wenn n die Zahl der Elektronen pro Volumeneinheit und e deren Ladung ist, so erhalten wir für I:

$$I = b d n e \bar{v}_x. \tag{326}$$

Durch Einsetzen von $\bar{v}_x$ in die Gleichung (325) folgt

$$E_y = \frac{2}{3} \frac{I H_z}{b d c n e}. \tag{327}$$

Wenn wir außerdem noch die entlang der Breite unseres untersuchten Bandes zwischen den zwei Endflächen auftretende Potentialdifferenz $E_y \cdot b = \Phi$ einführen, dann erhalten wir als Resultat:

$$\Phi = \frac{2}{3} \frac{1}{n c e} \cdot \frac{H I}{d}. \tag{328}$$

Vergleichen wir jetzt Gleichung (328) mit Gleichung (320), so folgt für die HALL konstante

$$R = \frac{2}{3c} \cdot \frac{1}{n e}. \tag{329}$$

In der Literatur wird die HALLkonstante meist in elektromagnetischen Einheiten angegeben. Die Umrechnung in diese Einheiten erfolgt durch Multiplikation der Gleichung (329) mit c^2. Wenn der Strom von der Bewegung negativer Elektronen verursacht wird, dann muß nach der hier besprochenen klassischen Theorie [Gleichung (329)] die HALLkonstante immer negativ sein. Außerdem können wir die Größenordnung der HALLkonstanten aus Gleichung (329) leicht abschätzen. Aus Meßergebnissen folgt tatsächlich, daß die HALL-konstante der meisten Leiter negativ ist und auch ihre Größenordnung mit dem aus Gleichung (329) berechneten Wert übereinstimmt. Es gibt jedoch auch Ausnahmen. So besitzt z.B. das Wismut eine anomal große HALLkonstante. Diese Anomalie kann nur die Quantenmechanik erklären. Die HALLkonstante einiger Leitern ist nicht negativ, sondern positiv, z.B. bei den Elementen Fe, Co, Zn, Cd, Pb. Doch dürften wir daraus nicht den Schluß ziehen, daß in diesen Metallen positive Ladungsträger für den Strom verantwortlich sind. Streng-genommen müßte das Auftreten der positiven HALLkonstante ebenfalls nach der Quantenmechanik erklärt werden. Die anschauliche Ursache des Auftretens einer positiven HALLkonstante läßt sich folgendermaßen interpretieren: Betrachten wir irgendein mit einer negativen Raumladung versehenes Volumen und nehmen an, daß sich in dieser homogenen Raumladung (ladungsfreie) Hohlräume befinden. Evidenterweise werden sich jene so verhalten, als ob sie eine positive Ladung besäßen. Das ist die Ursache des Auftretens einer positiven HALLkonstante. Selbstverständlich müssen wir dazu annehmen, daß die Elektronen doch nicht ganz frei sind. Wir wollen hier noch erwähnen, daß man aus dem Vorzeichen der HALLkonstante bei Halbleitern über die Frage entscheiden kann, ob die Halbleitereigenschaften vom Freiwerden einiger Elektronen oder umgekehrt vom „Einfangen“ einiger sich in vollen „Bändern“ befindenden Elektronen verursacht werden. Im letzteren Fall ist die HALLkonstante positiv.

§ 42. Die Elektronentheorie der Metalle nach der Quantenmechanik

Am Ende des § 38 haben wir die Schwierigkeiten erwähnt, welche in der klassischen Elektronentheorie der Metalle auftreten, besonders die, welche mit dem Problem der elektrischen Leitung und der spezifischen Wärme der Metalle zusammenhängen. Alle diese Schwierigkeiten hat die Quantenmechanik einwandfrei gelöst. Da die Besprechung dieser Theorie außerhalb des Rahmens dieses Buches liegt, so beschränken wir uns auf einige qualitative und anschauliche Bemerkungen.

Nach der klassischen Theorie wird der Widerstand eines Metalls dadurch hervorgerufen, daß die Elektronen mit den Gitterionen zusammenstoßen und einen Teil ihrer kinetischen Energie abgeben. Nach der klassischen Theorie erhält man eine Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur, die der Erfahrung widerspricht. Erst Bloch konnte dann zeigen, daß nach der Wellenmechanik der elektrische Widerstand dadurch zustande kommt, daß die thermische Bewegung der Materie die strenge Regelmäßigkeit des Gitters aufhebt und daß das so gestörte Gitter die dem Elektronenstrahl entsprechende Wellenbewegung streuen kann. Eine ähnliche Wirkung haben auch Gitterfehler und Verunreinigungen. Ein sehr schöner Beweis für diese Auffassung ist das auf experimentellem Wege gefundene Gesetz von Mathiessen, nach dem der Widerstand sich bei normalen Temperaturen aus zwei Teilen zusammensetzt: Der eine Teil ist der absoluten Temperatur direkt proportional und von Verunreinigungen unabhängig, der andere Teil ist unabhängig von der Temperatur und eine Funktion des Reinheitsgrades.

Ein anderer schwerwiegender Widerspruch, zu dem die klassische Theorie geführt hat, ist die spezifische Wärme des Elektronengases, welche nach den experimentellen Ergebnissen einfach überhaupt nicht vorhanden ist. Dieses Paradoxon konnte Sommerfeld dadurch lösen, daß er auf das Elektronengas nicht die klassische Boltzmannsche Statistik anwandte, sondern die aus der Quantenmechanik folgende Fermi-Diracsche Statistik. Wenn in der Volumeneinheit ein Energiezustand schon mit einem Elektron – bzw. unter Berücksichtigung des Spins: mit zwei Elektronen antiparallelen Spins – besetzt ist, so kann nach der Fermi-Dirac-Statistik kein Elektron mehr in diesen Zustand übergehen. Wenn alle Zustände unter einer gewissen Energie schon mit Elektronen besetzt sind, so können wir dem System durch Abkühlung keine Energie entziehen, d.h., die spezifische Wärme ist gleich Null. Damit ist begründet, weshalb man auf experimentellem Wege keine Spur der spezifischen Wärme des Elektronengases finden konnte. Im Inneren des Metalles befindet sich das Elektronengas in jenem „entarteten“ Zustand.

Außerdem haben wir erwähnt, daß man die Theorie der modifizierten Richardsonschen Gleichung und der positiven Hallkonstante ebenfalls nur auf der Grundlage der Quantenmechanik angeben kann.

§ 43. Die MAXWELLschen Differentialgleichungen auf der Grundlage der Elektronentheorie

Bei der Besprechung des Verhaltens der Materie im elektrischen Feld haben wir gesehen, daß die Dielektrizitätskonstante und die elektrische Suszeptibilität von den Polarisierbarkeiten der einzelnen Moleküle, Atome und Ionen stammen. Es ist klar, daß z. B. die Dielektrizitätskonstante nur dann einen Sinn besitzt, wenn man das betrachtete Volumen so groß wählt, daß noch recht viel Atome oder Ionen darin enthalten sind. Die Dielektrizitätskonstante verliert vollkommen ihren Sinn, wenn man von Volumina spricht, die kleiner als die atomaren Dimensionen sind. Die erwähnte Konstante hat nur als eine über ein Volumen, das noch sehr viele Atome enthält, gemittelte Größe einen Sinn. Da der Vektor der elektrischen Verschiebung durch die Dielektrizitätskonstante mit dem Vektor $\mathfrak{E}$ der elektrischen Feldstärke zusammenhängt, so hat der Vektor $\mathfrak{D}$ ebenfalls nur als ein Mittelwert einen Sinn. Ähnliche Bemerkungen können wir bezüglich der magnetischen Vektoren machen.

Die Verhältnisse sind im Falle des elektrischen Stromes im wesentlichen dieselben. Wir haben gesehen, daß der Unterschied zwischen Leitungsstrom und Konvektionsstrom nur makroskopisch einen Sinn hat. Jedoch führte die Elektronentheorie der Metalle zu der Erkenntnis, daß es einen „Leitungsstrom" eigentlich nicht gibt. Jener wird nur von der Bewegung von Teilchen viel kleinerer Masse (von Elektronen) verursacht, d. h., es gibt eigentlich nur einen Konvektionsstrom.

Wir wollen jetzt sehen, wie wir nach der obigen Ausführung die MAXWELLschen Differentialgleichungen schreiben können, also unter Berücksichtigung des Umstandes, daß es in atomaren Dimensionen keine Permeabilität, keine Dielektrizitätskonstante und keinen Leitungsstrom gibt. Bezeichnen wir die Vektoren der auf das Vakuum bezogenen elektrischen und magnetischen Feldstärken mit $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{h}$, dann nehmen die MAXWELLschen Differentialgleichungen folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathfrak{h} &= \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{e}} + \frac{4\pi}{c}\varrho\mathfrak{v}, & \operatorname{div}\mathfrak{e} &= 4\pi\varrho, \\ \operatorname{rot}\mathfrak{e} &= -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{h}}, & \operatorname{div}\mathfrak{h} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{330}$$

Diesen Differentialgleichungen seien die sich auf makroskopische ruhende Körper beziehenden MAXWELLschen Differentialgleichungen gegenübergestellt:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathfrak{H} &= \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{D}} + \frac{4\pi}{c}\mathfrak{j}, & \operatorname{div}\mathfrak{D} &= 4\pi\varrho_w, \\ \operatorname{rot}\mathfrak{E} &= -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{B}}, & \operatorname{div}\mathfrak{B} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{331}$$

Damit wir unsere Gleichungssysteme (330) und (331) in Zusammenhang bringen können, müssen wir die im Gleichungssystem (330) stehenden Größen mitteln, und zwar über ein Volumen, das so groß ist, daß es sehr viele Atome enthält,

vom makroskopischen Standpunkt doch so klein ist, daß sich darin die in Gleichung (331) stehenden Vektoren noch nicht merklich ändern. Ebenso müssen wir die in Gleichung (330) stehenden Glieder über die Zeit mitteln, jedoch über ein so kleines Zeitintervall, daß sich die in der Welt der Atome oder Moleküle abspielenden Bewegungen (Elektronenumläufe, Schwingungen der Atome usw.) schon herausmitteln, die makroskopisch betrachteten Differentialquotienten nach der Zeit in Gleichung (331) dagegen noch nicht bemerkbar verschmiert werden. Bezeichnen wir die Mittelwerte durch Überstreichen, so geht unser Gleichungssystem in das folgende über:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\overline{\mathfrak{h}} &= \frac{1}{c}\dot{\overline{\mathfrak{e}}} + \frac{4\pi}{c}\overline{\varrho\mathfrak{v}}, & \operatorname{div}\overline{\mathfrak{e}} &= 4\pi\overline{\varrho}, \\ \operatorname{rot}\overline{\mathfrak{e}} &= -\frac{1}{c}\dot{\overline{\mathfrak{h}}}, & \operatorname{div}\overline{\mathfrak{h}} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{332}$$

Wir können versuchen, diese Gleichungen mit den eigentlichen MAXWELLschen Differentialgleichungen in Zusammenhang zu bringen. Unter der Annahme

$$\overline{\mathfrak{e}} = \mathfrak{E} \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{h}} = \mathfrak{B} \tag{333}$$

gehen die beiden letzten Gleichungen von (332) tatsächlich in die entsprechenden beiden Gleichungen von (331) über. Wenn wir jedoch Gleichung (333) in die ersten beiden Gleichungen von Gleichung (332) einsetzen, so erhalten wir

$$\operatorname{rot}\mathfrak{B} = \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{E}} + \frac{4\pi}{c}\overline{\varrho\mathfrak{v}} \tag{334}$$

und

$$\operatorname{div}\mathfrak{E} = 4\pi\overline{\varrho}, \tag{335}$$

welche mit den in Gleichung (331) angegebenen analogen Gleichungen nicht übereinstimmen. Führen wir deshalb die Vektoren der elektrischen ($\mathfrak{P}$) und magnetischen Polarisation ($\mathfrak{M}$) (das elektrische und das magnetische Moment der Volumeneinheit) ein, dann gilt bekanntlich

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{B} - 4\pi\mathfrak{M} \tag{336}$$

und

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{P}. \tag{337}$$

Setzen wir die Gleichungen (336) und (337) in die ersten beiden Differentialgleichungen des Systems (331) ein, so erhalten wir die Resultate

$$\operatorname{rot}\mathfrak{B} = \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{E}} + \frac{4\pi}{c}(\mathfrak{j} + \dot{\mathfrak{P}} + c\operatorname{rot}\mathfrak{M}) \tag{338}$$

und

$$\operatorname{div}\mathfrak{E} = 4\pi(\varrho_w - \operatorname{div}\mathfrak{P}). \tag{339}$$

Vergleichen wir die Gleichungen (338) und (339) mit (334) und (335), so bemerken wir, daß die auf der Grundlage der Elektronentheorie hergeleiteten

Differentialgleichungen mit den eigentlichen MAXWELLschen Differentialgleichungen nur dann übereinstimmen, wenn

$$\overline{\varrho \mathfrak{v}} = \mathfrak{j} + \dot{\mathfrak{P}} + c \operatorname{rot} \mathfrak{M} \tag{340}$$

und

$$\overline{\varrho} = \varrho_w - \operatorname{div} \mathfrak{P} \tag{341}$$

ist.

Gleichung (341) drückt die bekannte Tatsache aus, daß die wahre Ladung infolge der Polarisation des umgebenden Mediums scheinbar verkleinert wird, weil ja im Dielektrikum scheinbare Ladungen von entgegengesetztem Vorzeichen induziert werden.

Also ist der Mittelwert des Vektors $\mathfrak{e}$ gleich dem Vektor $\mathfrak{E}$ der makroskopischen Feldstärke. Der Mittelwert des Vektors $\mathfrak{h}$ ist gleich dem Vektor der magnetischen Induktion $\mathfrak{B}$. Andererseits müssen die Gleichungen (340) und (341) bestehen. Besonders die experimentelle Rechtfertigung der ersten Beziehung ist die wichtigste Stütze des hier besprochenen Gedankenganges.

§ 44. Die Experimente von ROWLAND, RÖNTGEN und EICHENWALD

Aus unserer Gleichung (340) folgt, daß der für das Auftreten eines magnetischen Feldes verantwortliche Strom gleich

$$\overline{\varrho \mathfrak{v}} = \mathfrak{j} + \dot{\mathfrak{P}} \tag{342}$$

ist.

Das zweite Glied auf der rechten Seite von Gleichung (342) drückt eigentlich die (atomphysikalische) Tatsache aus, daß eine Änderung der Polarisation notwendigerweise mit kleinen Verschiebungen von Ladungen verbunden sein muß.

Die Stromkomponente $\mathfrak{j}$ können wir weiter zerlegen in einen eigentlichen Leitungsstrom $\mathfrak{j}_l$ und in einen Konvektionsstrom, den wir dadurch bekommen, daß wir Gleichung (341) mit $\mathfrak{u}$ multiplizieren und damit $\mathfrak{u}(\varrho_w - \operatorname{div}\mathfrak{P})$ erhalten ($\mathfrak{u}$ ist die makroskopische Geschwindigkeit). Setzen wir diese zwei Komponenten statt j in Gleichung (342) ein, so folgt

$$\overline{\varrho \mathfrak{v}} = \mathfrak{j}_l + \mathfrak{u}(\varrho_w - \operatorname{div}\mathfrak{P}) + \dot{\mathfrak{P}}, \tag{343}$$

wobei $\dot{\mathfrak{P}}$ den vollständigen Differentialquotienten der Polarisation nach der Zeit bedeutet.

Um zu beweisen, daß der im makroskopischen Sinne verstandene Konvektionsstrom tatsächlich ein magnetisches Feld verursacht, stellte ROWLAND folgendes Experiment an: Seine Einrichtung bestand darin, daß eine $^1/_2$ cm dicke Ebonitscheibe (Hartgummischeibe) zwischen zwei Glasscheiben um eine vertikale Achse gedreht wurde. Die beiden Seiten der Ebonitscheibe sowie die der Ebonitscheibe gegenüberliegenden Seiten der Glasscheiben waren vergoldet und stellten Kondensatorbelegungen dar. Die vergoldeten Teile der Glasscheiben waren geerdet. Den auf der Ebonitscheibe befindlichen Goldschichten erteilte ROWLAND elektrische Ladungen. Wenn er jetzt die Ebonitscheibe tatsächlich

drehte, so zeigte ein empfindliches astatisches Magnetnadelsystem bei ungefähr 60 Umdrehungen in der Sekunde ein magnetisches Feld an, das dem BIOT-SAVARTschen Gesetz entsprach. Nur bei sehr großen Potentialdifferenzen hat man davon Abweichungen beobachtet. RÖNTGEN hat die Experimente von ROWLAND mit ähnlichen Ergebnissen wiederholt.

EICHENWALD benutzte bei einem seiner Experimente folgende Einrichtung: Eine runde Ebonitscheibe konnte sich um eine senkrecht zu ihrer Ebene stehende vertikale Achse drehen. Auf der Scheibe befand sich oben und unten ein Metallring. Diese Ringe waren an einer Stelle durch einen kleinen Schlitz unterbrochen (damit in diesen kein Strom zirkulieren kann). Die Metallringe konnte man zusammen mit der Scheibe drehen, jedoch war die Scheibe auch im Fall ruhender Ringe drehbar. Wenn jetzt EICHENWALD zwischen den zwei Ringen eine Potentialdifferenz erzeugte und dann die ganze Einrichtung drehte, so beobachtete er das Auftreten eines dem BIOT-SAVARTschen Gesetz entsprechenden Magnetfeldes. EICHENWALD konnte die Größe des Magnetfeldes am besten kontrollieren, indem er bei ruhender Anordnung mit Hilfe eines galvanischen Elementes in den Ringen einen Strom erzeugte und die Stromstärke so wählte, daß er dasselbe magnetische Feld beobachtete wie im oben angegebenen Falle. Außerdem konnte EICHENWALD zeigen, daß im Falle einer gegebenen Potentialdifferenz die Größe des auftretenden Effektes von der Dielektrizitätskonstante der Ebonitscheibe ganz unabhängig ist und sogar denselben Wert besitzt, wenn diese Scheibe überhaupt nicht vorhanden ist. Diese zu Zeiten EICHENWALDS recht auffallende Erscheinung ist in unseren Tagen auf Grund der Elektronentheorie fast selbstverständlich. Im Falle derselben Potentialdifferenz wird infolge des bekannten Zusammenhanges $Q = C V$ die wahre Ladung der Kondensatorplatten, wenn wir den Zwischenraum mit einem Dielektrikum ausfüllen, auf das ε-fache erhöht. Die infolge der Polarisation des Dielektrikums auftretenden freien Ladungen schwächen jedoch diese wahre Ladung scheinbar auf ihren ε-ten Teil ab. Diese zwei Erscheinungen heben sich gegenseitig gerade auf.

Ähnlich tritt das magnetische Feld auch dann auf, wenn sich die Ebonitscheibe dreht, die Metallringe dagegen nicht. Dieser Stromkomponente entspricht der von der Polarisation herrührende Anteil $-\mathfrak{u} \operatorname{div} \mathfrak{P}$ [siehe Gleichung (343)]. $\operatorname{div} \mathfrak{P}$ verschwindet an der Grenzfläche des Dielektrikums nicht, weil dort $\mathfrak{P}$ innerhalb einer ganz kurzen Strecke von Null bis $\mathfrak{P}$ zunimmt.

Noch vor EICHENWALD machte RÖNTGEN das Experiment, daß er eine ladungsfreie Glas- oder Ebonitscheibe zwischen den Platten eines geladenen und ruhenden Kondensators drehte und dabei zeigte, daß die Bewegung eines polarisierten Dielektrikums tatsächlich ein magnetisches Feld verursacht. Deshalb nennen wir die von der Bewegung eines Dielektrikums verursachte Stromkomponente den RÖNTGENstrom [hier handelt es sich wiederum um die in Gleichung (343) stehende Komponente $- \mathfrak{u} \operatorname{div} \dot{\mathfrak{P}}$].

Zur Demonstration der von $\dot{\mathfrak{P}}$ herrührenden Stromkomponente stellte EICHENWALD noch folgenden Versuch an: Eine Ebonitscheibe wurde zwischen zwei Metallringen gedreht, die aber jetzt in zwei halbkreisförmige Teile zerlegt waren. Die beiden einander gegenüberliegenden halbkreisförmigen Teile

erhielten eine entgegengesetzte Spannung. Ein Teil der Scheibe, der sich unter dem einen Paar der halbkreisförmig unterteilten ringförmigen Metallbelegungen bewegte, wurde vom Felde dieser Kondensatorplatten entsprechend dem Vorzeichen dieses Feldes polarisiert. Ist nun dieser Teil der Scheibe infolge der Drehbewegung zwischen die anderen zwei Halbringe gelangt, so wurde er in entgegengesetzter Richtung polarisiert. Beim Übergang muß also $\dot{\mathfrak{P}}$ im Dielektrikum einen von Null verschiedenen Wert haben.

Damit sind die von allen Gliedern auf der rechten Seite von Gleichung (343) verursachten Magnetfelder auf experimentellem Wege nachgewiesen.

DIE SUPRALEITUNG

§ 45. Experimentelle Erfahrung

Der elektrische Widerstand der Metalle nimmt bei normaler Temperatur direkt proportional der absoluten Temperatur zu. Diese experimentelle Tatsache konnte man aus der DRUDE-LORENTZschen Elektronentheorie nicht herleiten, weil danach der elektrische Widerstand nur $\sqrt{T}$ proportional wäre. Die wellenmechanische Theorie BLOCHs lieferte die richtige Temperaturabhängigkeit. Bei sehr tiefen Temperaturen ist nach den Berechnungen BLOCHs der Widerstand der fünften Potenz der absoluten Temperatur proportional und muß demnach am absoluten Nullpunkt verschwinden (abgesehen von dem von Verunreinigungen und Gitterfehlern herrührenden Anteil).

Eben deshalb war die von KAMERLINGH ONNES 1911 gemachte Entdeckung, daß der Widerstand mancher Metalle bei einigen Graden oberhalb des absoluten Nullpunktes fast plötzlich ganz verschwindet, sehr überraschend und unerwartet. Bei Quecksilber ist das bei 4,17°K der Fall. Al verliert seinen Widerstand bei 1,14°K, Zinn bei 3,69. Blei bei 7,26°K usw.

§ 46. Die theoretischen Schwierigkeiten

Die theoretische Deutung dieser Erscheinungen verursacht große Schwierigkeiten. Nach der klassischen DRUDEschen Theorie wäre es ganz unmöglich, anzunehmen, daß bei einer gewissen Temperatur die Zusammenstöße zwischen Elektronen und Gitterionen plötzlich ganz aufhören. Aber auch nach der modernen wellenmechanischen Theorie wäre der Vorgang schwer einzusehen, daß das von der thermischen Bewegung gestörte Gitter den Elektronenstrahl nicht mehr streut.

Eine für die Theorie der Supraleitung wichtige Tatsache besteht darin, daß die aus der Elektrotechnik bekannten guten Leiter überhaupt nicht supraleitend werden – nur das Al wird supraleitend, sein Sprungpunkt liegt jedoch verhältnismäßig tief –, sondern solche Metalle, die meist schlechte Leiter sind. So sind z. B. die Supraleiter, welche höhere Übergangstemperaturen besitzen,

wie z. B. Hg, Sn und Pb, ausgesprochen schlechte Leiter. Ein weiterer interessanter Umstand ist folgender: Nach den Messungen von MacDonald und Mendelsohn befolgt die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit beim Na am besten das von Bloch unter Annahme eines fast freien Elektronengases für tiefe Temperaturen hergeleitete Gesetz, nach dem der Widerstand in diesem Gebiet zu T^5 proportional ist. Demnach sind die Elektronen im Na praktisch frei. Deshalb würden wir erwarten, daß dieses Metall in erster Linie supraleitend wird. Nach experimentellen Ergebnissen wird jedoch weder das Na noch andere Alkalimetalle bei den jetzt erreichbaren tiefsten Temperaturen supraleitend.

§ 47. Der Meissner-Ochsenfeld-Effekt

Die Supraleitung könnte man nach den bisherigen Ausführungen phänomenologisch so beschreiben, daß am Sprungpunkt der Widerstand gleich Null oder die Leitfähigkeit unendlich groß wird. Wenn es auch gelingen würde, irgendeine theoretische Erklärung für diese Erfahrungen zu finden, so würde dennoch eine Erscheinung, die man nach ihren Entdeckern Meissner-Ochsenfeld-Effekt nennt, ganz unerklärt bleiben.

Wenn wir ein Stück Metall in ein magnetisches Feld bringen, so werden Wirbelströme induziert, deren magnetisches Feld nach dem Lenzschen Gesetz dem äußeren Feld entgegengesetzt ist. Dieses induzierte Gegenfeld kann jedoch nur eine kurze Zeit bestehen, weil die Wirbelströme infolge des Ohmschen Widerstandes recht bald abnehmen. Wenn wir jedoch einen Supraleiter in das magnetische Feld bringen, so verschwinden die Wirbelströme selbstverständlich nicht. Das Magnetfeld kann deshalb in den Supraleiter nicht eindringen. Diese Tatsache ist deshalb nicht überraschend, weil ja das Verhalten des Stoffes einfach aus der unendlich großen Leitfähigkeit folgt. Sehr überraschend ist folgende experimentelle Erfahrung: Wenn wir einen geometrisch einfach zusammenhängenden Supraleiter noch im normalleitenden Zustand in ein magnetisches Feld bringen und erst danach unter den Sprungpunkt abkühlen, so verdrängt der oben bezeichnete Supraleiter bei Erreichung des Sprungpunktes auch dann noch die magnetischen Kraftlinien aus sich. Diese letztere, aus den Gesetzen der Elektrotechnik nicht mehr folgende Erscheinung nennt man den Meissner-Ochsenfeld-Effekt. Machen wir jedoch das oben beschriebene Experiment mit einem ringförmigen Supraleiter, dann wird zwar bei dem Erreichen des Sprungpunktes die Materie des Ringes die magnetischen Kraftlinien ebenfalls verdrängen, in dem vom Ring umschlossenen Hohlraum bleiben sie jedoch bestehen, da sie nicht durch die Materie des Ringes hindurchdringen können. Wenn wir im supraleitenden Zustand nur das äußere magnetische Feld wieder abschalten, so müssen sich die „eingeschlossenen" Kraftlinien, da sie das Material des Ringes bei ihrer Zusammenziehung nicht schneiden können, selbständig außerhalb des Ringes schließen, d. h., der Ring verhält sich wie ein Magnet. Diese Erscheinung ist selbstverständlich nicht mehr so auffallend; denn wir können diese Erscheinung auch so beschreiben, daß das Ausschalten des äußeren Magnetfeldes im Ring einen Strom induziert.

§ 48. Die Supraleitung als absoluter Diamagnetismus

Wie schon erwähnt, verdrängt ein geometrisch einfachzusammenhängender Supraleiter die magnetischen Kraftlinien aus seinem Inneren. Andererseits wissen wir, daß der normale Diamagnetismus darin besteht, daß die magnetische Suszeptibilität negativ ist. Die Permeabilität wird also kleiner als Eins. Das bedeutet, daß ein diamagnetischer Körper teilweise (jedoch in einem nur sehr geringen Maße, weil der Diamagnetismus immer nur sehr schwach ist) die magnetischen Kraftlinien aus sich verdrängt. Diese Analogie ermöglicht eine Deutung der Vorgänge beim einfach zusammenhängenden Supraleiter insofern, als man diesen Supraleiter als einen extrem diamagnetischen Körper ansieht, dessen Permeabilität gleich Null ist. Aus dem bekannten Zusammenhang

$$\mu = 1 + 4\pi\chi \tag{344}$$

erhalten wir unter der Annahme, daß $\mu = 0$ ist (weil ja alle magnetischen Kraftlinien verdrängt werden), für den Supraleiter

$$\chi = -\frac{1}{4\pi}. \tag{345}$$

Selbstverständlich ist diese Suszeptibilität sehr groß. In der Fachliteratur wird meistens nicht die Suszeptibilität pro Kubikzentimeter, sondern die eines Grammatoms angegeben. Dann sind die Suszeptibilitäten von der Größenordnung 10^{-6}. Jedenfalls kann man den Supraleiter nicht auffassen, als ob er aus einzelnen diamagnetischen Atomen aufgebaut wäre, sondern so, als ob der ganze einfach zusammenhängende Supraleiter ein diamagnetisches Riesenatom wäre.

§ 49. Das Analogon des Barkhauseneffektes

Ein magnetisches Feld hindert das Entstehen des supraleitenden Zustandes, d.h., je stärker das Feld ist, um so tiefer muß die Temperatur sein, um den supraleitenden Zustand hervorzurufen. Justi ist es gelungen zu zeigen, daß bei Supraleitern eine dem Barkhauseneffekt ganz analoge Erscheinung auftritt, wenn man bei einem im magnetischen Felde sich befindenden Supraleiter die Feldstärke erhöht. Der Übergang in den normalleitenden Zustand verläuft nicht kontinuierlich, sondern durch sprunghafte Übergänge von jeweils kleinen, jedoch endlichen Gebieten. Diese Erscheinung kann man in einem Lautsprecher hörbar machen. Neuerdings haben aber MacDonald und Mendelsohn auch kontinuierliche Übergänge beobachtet.

§ 50. Die Theorie von London

Zur Erklärung der Supraleitung wurden schon viele verschiedene Theorien aufgestellt; jedoch können wir bis jetzt von keiner sagen, daß sie das Problem tatsächlich gelöst hat. Auf die Besprechung der Grundgedanken einiger Theorien kommen wir im letzten Abschnitt zurück. Hier wollen wir nur die

LONDONsche Theorie kurz streifen. Diese Theorie gibt zwar keine naturwissenschaftliche Erklärung für die Supraleitung – das ist auch nicht ihr Ziel –, sondern versucht, die Differentialgleichungen der Elektrodynamik unter Berücksichtigung des MEISSNER-OCHSENFELD-Effektes für Supraleiter richtig umzugestalten.

Schreiben wir zuerst die zwei MAXWELLschen Differentialgleichungen für den Fall auf, daß man die magnetische Feldstärke und die Induktion einander gleichsetzen kann (ferromagnetische Stoffe werden bekanntlich keine Supraleiter):

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{H} = 4\pi \mathfrak{J} + \varepsilon \dot{\mathfrak{E}} \tag{346}$$

und

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\dot{\mathfrak{H}} \tag{347}$$

($\mathfrak{H}$ magnetische, $\mathfrak{E}$ elektrische Feldstärke, $\mathfrak{J}$ Stromdichte und ε die Dielektrizitätskonstante). Das zweite Glied der rechten Seite von Gleichung (346) können wir weglassen, da es im Inneren eines Supraleiters, der ja eine unendlich große Leitfähigkeit besitzt, keinen Verschiebungsstrom geben kann:

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{H} = 4\pi \mathfrak{J}. \tag{348}$$

Berücksichtigen wir, daß nach unserer Annahme im Supraleiter die Elektronen (oder wenigstens die Elektronen, welche für die Supraleitung verantwortlich sind) vollständig frei sind, so folgt

$$-eE = m\dot{v}, \tag{349}$$

wo $-e$ die Ladung, m die Masse und $\dot{v}$ die Beschleunigung eines Elektrons bedeuten. Da die Stromdichte $\mathfrak{J}$ zu v proportional ist, so erhalten wir zwischen $\mathfrak{E}$ und $\dot{\mathfrak{J}}$ unter Berücksichtigung der Gleichung (349) den Zusammenhang

$$\mathfrak{E} = \lambda \dot{\mathfrak{J}}, \tag{350}$$

wobei λ eine Konstante ist. Unsere Gleichung (348) differenzieren wir jetzt nach der Zeit und setzen dann Gleichung (350) ein; wir erhalten

$$c \operatorname{rot} \dot{\mathfrak{H}} = \frac{4\pi}{\lambda} \mathfrak{E}. \tag{351}$$

Durch Bildung der Rotation folgt

$$c \operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\mathfrak{H}} = \frac{4\pi}{\lambda} \operatorname{rot} \mathfrak{E}. \tag{352}$$

Wegen $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{H} - \Delta \mathfrak{H}$ und $\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$ gilt

$$-c \Delta \dot{\mathfrak{H}} = \frac{4\pi}{\lambda} \operatorname{rot} \mathfrak{E}. \tag{353}$$

(Δ = LAPLACEoperator). Setzen wir hier Gleichung (347) ein, so resultiert

$$c^2 \frac{\lambda}{4\pi} \Delta \dot{\mathfrak{H}} = \dot{\mathfrak{H}}. \tag{354}$$

Für den speziellen Fall, daß die Oberfläche unseres Supraleiters in der YZ-Ebene liegt und die Richtung der X-Achse nach dem Inneren des Supraleiters zeigt, erhalten wir beim Anlegen eines magnetischen Feldes parallel zur Z-Achse die Gleichung

$$\frac{c^2\lambda}{4\pi}\frac{d^2\dot{H}}{dx^2} = \dot{H}. \tag{355}$$

Die Lösung dieser Gleichung wird von der Form

$$\dot{H} = \dot{H}_0 e^{-\beta x} \tag{356}$$

sein $\left(\beta^2 = \frac{4\pi}{c^2\lambda}\right)$. Bei der Integration der Differentialgleichung (356) über die Zeit wird eine Konstante auftreten, die wir gleich Null setzen können, da wir vom feldfreien Fall ausgehen (d.h., das Feld wird erst nach Eintritt der Supraleitung angelegt):

$$H = H_0 e^{-\beta x}. \tag{357}$$

Gleichung (357) beschreibt eigentlich den MEISSNER-OCHSENFELD-Effekt, weil nach diesem Zusammenhang, abgesehen von einer ganz dünnen Grenzschicht, das magnetische Feld in den Supraleiter nicht eindringen kann bzw. dort exponentiell verschwindet. LONDON läßt (hypothetisch) die Integrationskonstante immer weg, benutzt statt Gleichung (354) die Gleichung

$$c^2\frac{\lambda}{4\pi}\Delta\mathfrak{H} = \mathfrak{H}. \tag{358}$$

Damit ist der MEISSNER-OCHSENFELD-Effekt zwar nicht erklärt, jedoch in die Theorie eingearbeitet.

LONDON setzt außerdem in die Gleichung (347) unser Resultat (350) ein, schreibt also

$$c \operatorname{rot} \lambda\dot{\mathfrak{J}} = -\dot{\mathfrak{H}} \tag{359}$$

und setzt (hypothetisch) die bei der Integration über die Zeit auftretende Konstante wieder gleich Null:

$$c \operatorname{rot} \lambda\mathfrak{J} = -\mathfrak{H}. \tag{360}$$

Außerdem führt er in Gleichung (359) an Stelle von $-\dot{\mathfrak{H}}$ wieder $c \operatorname{rot}\mathfrak{E}$ aus Gleichung (347) ein, erhält also die Gleichung

$$\operatorname{rot}(\lambda\dot{\mathfrak{J}} - \mathfrak{E}) = 0 \tag{361}$$

und zieht daraus den Schluß, daß die Größe $\lambda\dot{\mathfrak{J}} - \mathfrak{E}$ als Gradient einer skalaren Funktion U darstellbar ist:

$$\lambda\dot{\mathfrak{J}} - \mathfrak{E} = \operatorname{grad} U. \tag{362}$$

Wie wir schon erwähnt haben, liefert die LONDONsche Theorie keine naturwissenschaftliche Erklärung für die Supraleitung. Und das ist auch nicht ihr Ziel. Sie versucht nur eine exakte mathematische Formulierung der experimentellen Ergebnisse zu liefern. Die LONDONsche Theorie hat LAUE erweitert,

indem er den linearen Zusammenhang zwischen Impuls und Stromdichte durch einen nichtlinearen ersetzte. Außerdem hat LAUE ebenfalls die hier besprochenen Gleichungen durch Glieder ergänzt, die vom gewöhnlichen OHMschen Leitungsmechanismus herrühren, weil dieser nach seinen Untersuchungen auch im supraleitenden Zustande ungestört weiterbesteht.

§ 51. Einige sich auf die Supraleiter beziehende physikalische Daten

Die Supraleiter kristallisieren in sehr verschiedenen Kristalltypen. Am Sprungpunkt ändert sich weder der Gittertyp noch die Gitterkonstante, wie die Messungen von KEESOM und KAMERLINGH ONNES gezeigt haben. Die spezifische Wärme besitzt am Sprungpunkt eine kleine Anomalie. Im supraleitenden Zustand ist die spezifische Wärme ein wenig größer. Die Wärmeleitfähigkeit besitzt am Sprungpunkt eine Diskontinuität. Im supraleitenden Zustand ist sie ein wenig kleiner. Es hat den Anschein, als ob ein Teil der Elektronen, welche im normalleitenden Zustand am Wärmeleitungsvorgang teilnehmen, unterhalb des Sprungpunktes von diesem Wärmeleitungsmechanismus ausgeschaltet würden. Neuerdings hat man bei einigen Supraleitern den entgegengesetzten Fall beobachtet. Die optischen Eigenschaften der Materie ändern sich nach den Messungen von HILSCH am Sprungpunkt überhaupt nicht. Dies war eine sehr überraschende Erfahrung, weil ja hier die für die unendlich große Leitfähigkeit verantwortlichen Elektronen eine sehr große Bedeutung haben müßten. Dieses Paradoxon wurde von LAUE aufgeklärt, der auf theoretischem Wege zeigte, daß schon im infraroten Gebiet der gewöhnliche OHMsche Leitungsmechanismus, welcher auch im supraleitenden Zustand neben dem Supraleitungsmechanismus unverändert weiterbesteht, allein von Bedeutung ist.

Nicht nur reine Metalle, sondern auch Legierungen werden supraleitend. Ihr Verhalten entspricht im wesentlichen dem der reinen Metalle, jedoch mit dem Unterschied, daß sie am Sprungpunkt das magnetische Feld nicht vollständig aus sich verdrängen, sondern ein Teil dieses Feldes „friert in ihnen ein“. Die Ursache dieser Erscheinung ist dadurch begründet, daß die Legierung nicht überall zur gleichen Zeit supraleitend wird und deshalb „magnetische Kraftlinien ebenso einschließt“ wie der schon erwähnte ringförmige Körper. Der Sprungpunkt einer aus einem supraleitenden und einem nichtsupraleitenden Metall bestehenden Legierung liegt im allgemeinen tiefer als die des reinen Supraleiters. Von dieser Regel bildet das Wismut eine Ausnahme, weil es in einer mit einem Supraleiter gebildeten Legierung den Sprungpunkt erhöht, ohne daß es im reinen Zustand selbst ein Supraleiter ist. Nach den neuen Messungen von CHESTER und JONES wird reines Wismut unter hohem Druck supraleitend. Bei anderen Metallen – mit Ausnahme des Vanadiums – nimmt die Übergangstemperatur mit zunehmendem Druck ab. Vom Zinn wird nur die weiße, metallische Modifikation supraleitend, das graue Zinn, das eine Diamantstruktur besitzt, dagegen nicht.

Auch einige Verbindungen werden supraleitend. Ein typisches Beispiel ist das CuS, das supraleitend ist, ohne daß weder Cu noch S diese Eigenschaft be-

sitzen. In letzter Zeit hat man sehr viele supraleitende Verbindungen gefunden, von denen einige einen sehr hohen Sprungpunkt haben.

Radioaktive β-Strahlen und künstlich beschleunigte Elektronen werden beim Durchdringen eines Supraleiters ebenso abgebremst wie beim normalleitenden Metall.

Nach den Untersuchungen von JUSTI und seinen Mitarbeitern ASCHERMANN, FRIEDRICH und KRAMER besitzt NbN einen sehr hohen Sprungpunkt, der je nach dem Reinheitsgrad 15–17° K beträgt. Nach HARDY und KULM hat V_3Si den Sprungpunkt 17° K. Nach MATTHIAS besitzt reines NbN den Sprungpunkt bei 15,6° K, $NbC_{0,3}N_{0,7}$ dagegen bei 17,8° K. Das ist die bis jetzt beobachtete höchste Übergangstemperatur in den supraleitenden Zustand.

§ 52. Einige neue Deutungsversuche der Supraleitung

Ein bemerkenswerter Gedanke zur theoretischen Deutung der Supraleitung rührt von R. DE L. KRONIG her. Der genannte Verfasser hat angenommen, daß unter dem Sprungpunkt das Elektronengas in einem Supraleiter ein festes Gitter bildet und dieses Gitter dann ohne Widerstand im Supraleiter verschoben werden kann; am Sprungpunkt „schmilzt" dann dieses Elektronengitter. Infolge der auftretenden Unordnung entsteht dann der OHMsche Widerstand. Nach unseren heutigen Kenntnissen kann diese Theorie selbstverständlich nicht mehr aufrechterhalten werden, weil ja z. B. die Auffassung des „Elektronengitters" der FERMI-DIRACschen Statistik widerspricht. Doch wurde der Gedanke von KRONIG der Ausgangspunkt einer modernen Theorie: HEISENBERG nimmt in seiner Theorie an, daß die wenigen Elektronen, die relativ große Energien besitzen und deshalb von den Einschränkungen der FERMI-DIRACschen Statistik frei sind, im Supraleiter ein Übergitter bilden, das widerstandslos verschoben werden kann. Am „Sprungpunkt" schmilzt dieses Elektronengitter. Der MEISSNER-OCHSENFELD-Effekt folgt aus der HEISENBERGschen Theorie nicht unmittelbar. HEISENBERGS Mitarbeiter haben jedoch die Theorie zur Erklärung dieses Effektes erweitert.

BORN und KAI CHIA CHENG stellten eine andere Theorie der Supraleitung auf, die im Zusammenhang mit der Theorie der BRILLOUINschen Zonen steht. MÖGLICH und ROMPE bringen das Problem der Supraleitung mit der Theorie der Plasmaschwingungen (bei Entladungen in verdünnten Gasen) in Zusammenhang.

Auf experimentellem Wege fanden besonders bei den Isotopen von Hg und Sn SERIN, REYNOLDS, WRIGHT und NESBITT und E. MAXWELL einen Zusammenhang zwischen der Masse der Atome und der Sprungtemperatur, den man ungefähr durch die Gleichung

$$T_c M^{1/2} = \text{const} \tag{363}$$

ausdrücken kann. T_c bedeutet die Übergangstemperatur und M die Masse der Atome des Isotops. Die Sprungtemperatur liegt um so tiefer, je größer die

Massenzahl des Isotops ist. Diese Beobachtung scheint für die neuesten Theorien von FRÖHLICH und BARDEEN zu sprechen, welche die Erscheinung der Supraleitung mit den Wechselwirkungen der Elektronen mit den Gitterschwingungen in Zusammenhang bringen.

Eine bezüglich der Theorie noch interessante Beobachtung stammt von MEISSNER und SCHUBERT, nach der die Supraleiter kleine „Elektronenräume“ besitzen, d. h., wenn man von dem Volumen des Metalles das der Ionen subtrahiert und den Rest durch die Zahl der Leitungselektronen teilt, so erhält man für Supraleiter immer sehr kleine Werte.

TEIL IV

OPTIK

EINLEITUNG

§ 1. Der Gegenstand und die Aufteilung der Optik

Die Optik ist ein Teil der Naturwissenschaften oder in engerem Sinne der Physik, welcher sich mit der Natur und den Eigenschaften des Lichtes und des Sehens beschäftigt. Meistens unterteilt man das Gesamtgebiet in die geometrische und die physikalische Optik. Die geometrische Optik geht von der geradlinigen Ausbreitung des Lichtes in einem isotropen Medium und von den Reflexions- und Refraktionsgesetzen des Lichtes aus. Unter Verwendung von geometrischen und mathematischen Methoden gibt sie die Grundlage für die Theorie der optischen Instrumente. Jede Frage bezüglich der Natur des Lichtes und der Zusammenhänge von Lichterscheinungen mit anderen physikalischen Erscheinungen liegt ganz außerhalb ihres Rahmens. Mit anderen Worten, die geometrische Optik ist „die Lehre des Lichtstrahls", den sie natürlich nur als geometrischen Begriff betrachtet. Die physikalische Optik beschäftigt sich dagegen mit der physikalischen Erklärung der Entstehung, der Ausbreitung und der Natur des Lichtes. In früheren Zeiten versuchte man mit Hilfe von elastischen Schwingungen die Natur des Lichtes und ihren Zusammenhang mit anderen physikalischen Erscheinungen zu erklären. Heute wissen wir, daß die Lichtschwingungen elektromagnetische Schwingungen sind, die nur bezüglich ihrer Wellenlänge von den auf elektrotechnischem Wege hergestellten elektromagnetischen Schwingungen verschieden sind. Außerdem müssen wir noch einen dritten Teil der Optik erwähnen, der sich mit Grenzfragen zwischen der Physik und der Biologie beschäftigt, die physiologische Optik. Der Gegenstand dieser Wissenschaft ist die Untersuchung des Sehens und der Lichtempfindung. Heutzutage ist dieser Wissenschaftszweig besonders im Zusammenhang mit dem Problem der Farbenempfindung in sehr lebhafter Entwicklung.

§ 2. Die Entwicklung der sich auf das Wesen des Lichtes beziehenden Kenntnisse

Die antiken Völker hatten bezüglich der Natur des Lichtes noch sehr verworrene Begriffe. Eine neue Epoche in der Entwicklung der Optik setzte im 11. Jahrhundert durch die Untersuchungen des Arabers ALHAZEN ein. Nach der Entdeckung des Fernrohres und den wichtigen Untersuchungen von SNELLIUS und DESCARTES hat NEWTON seine Theorie bezüglich der Natur des

Lichtes ausgearbeitet. Nach der Auffassung NEWTONS emittieren die leuchtenden Körper eine hypothetische Lichtmaterie, die sich in einem homogenen Medium in geradliniger Bahn fortpflanzt und dem Gesetz der Reflexion und Brechung genügt. Das ist die sogenannte Emissionstheorie des Lichtes. Zu Zeiten NEWTONS war schon bekannt, daß der Schall eine Schwingungsbewegung der Luft ist. NEWTON hielt es jedoch für unmöglich, die Lichterscheinungen als Schwingungen eines „hypothetischen“ Mediums deuten zu können. Der eigentliche Begründer der Undulationstheorie des Lichtes war HUYGENS, der seine diesbezüglichen Gedanken schon 1678 ganz klar ausdrückte. Da jedoch die „Wellentheorie“ die geradlinige Fortpflanzung des Lichtes und die Entstehung eines Schattens scheinbar nicht gut erklären konnte, so blieb die Theorie von HUYGENS neben der Emissionstheorie NEWTONS wenig beachtet. Nur die Entdeckung der Interferenzerscheinungen durch YOUNG lenkte wieder die Aufmerksamkeit der Forscher auf die Undulationstheorie, weil diese Erscheinungen mit Hilfe der Emissionstheorie nicht zwanglos erklärt werden konnten. Die Erscheinung der Polarisation des Lichtes hat zwar schon HUYGENS entdeckt, doch konnte weder er noch YOUNG diese Erscheinungen erklären, weil beide Forscher nach Analogie der Schallschwingungen auch beim Licht longitudinale Schwingungen annahmen. Nachdem FRESNEL HOOKES Hypothese der Transversalität der Lichtwellen eingeführt hatte, wurde die einwandfreie Deutung der Polarisationserscheinungen möglich.

Unter der Voraussetzung, daß das Licht aus transversalen Schwingungen besteht, konnte man die Polarisation-, Interferenz- und Diffraktionserscheinungen des Lichtes einwandfrei erklären. Doch enthielt diese Theorie noch einen großen Widerspruch. Da sich die Lichtwellen auch im Vakuum ausbreiten, war man zu der Annahme gezwungen, daß diese Erscheinungen durch die Schwingungen eines hypothetischen, alles ausfüllenden Äthers bedingt sind. Dieser „Äther“ mußte so fein sein, daß er die Bewegung der Körper nicht merkbar stört, weil im entgegengesetzten Fall, z. B. bei der Planetenbewegung, ein merkbarer Reibungswiderstand auftreten müßte. Die Planeten würden dann infolge des endlichen „Reibungswiderstandes“ in immer kleineren Ellipsen die Sonne umkreisen und müßten zuletzt in die Sonne fallen. Andererseits mußte man nach den Ergebnissen der Elastizitätstheorie annehmen, daß sich dieser hypothetische „Äther“ ähnlich wie ein fester Körper verhält.

Alle diese Widersprüche beseitigte auf einen Schlag die elektromagnetische Lichttheorie MAXWELLS, nach der die Lichtwellen keine elastischen, sondern elektromagnetische Schwingungen sind. Die theoretischen Folgerungen MAXWELLS bezüglich der tatsächlichen Existenz von elektromagnetischen Wellen hat H. HERTZ (für größere Wellenlängen) auf experimentellem Wege verifiziert. Die Frage der Transversalität war damit gleichzeitig gelöst, weil ja in den elektromagnetischen Wellen die elektrische und magnetische Feldstärke senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung oszillieren. Zu Zeiten MAXWELLS war man noch der Ansicht, daß diese Wellen durch die elektromagnetischen Schwingungen des Äthers hervorgerufen werden. Da jedoch die Hypothese des Äthers notwendigerweise zu der Annahme führte, daß es in der Natur doch ein absolut ruhendes System gibt, so war EINSTEIN im Zusammenhang mit der Aufstellung der

Relativitätstheorie gezwungen, die Hypothese des Äthers aufzugeben. Deshalb sind nach der modernen Auffassung die elektromagnetischen Wellen ohne Vermittelung jeder hypothetischen Materie einfach im Vakuum vorhanden.

§ 3. Der Werdegang unserer sich auf das Licht beziehenden modernen Kenntnisse

Lange Zeit hindurch hatte es den Anschein, daß mit der elektromagnetischen Lichttheorie MAXWELLS die Entwicklung der sich auf die Natur des Lichtes beziehenden Kenntnisse einen Abschluß erreicht hat, d.h., daß das Problem vollständig gelöst ist. Nachdem jedoch BOHR die von PLANCK bei der Herleitung seiner berühmten Strahlungsformel entdeckte „Quantentheorie" auf das Wasserstoffatom anwandte, wurde ersichtlich, daß das Atom seine Energie nicht kontinuierlich ausstrahlt, sondern in Energieteilen der Größe $h\nu$, die wir Lichtquanten (Photonen) nennen. (h ist das PLANCKsche Wirkungsquantum mit dem Wert $6{,}6251 \cdot 10^{-27}$ erg sec, ν die Frequenz der Lichtwelle.) Anfangs hat man daher angenommen, daß das Atom tatsächlich in diskreten Energiequanten der Größe $h\nu$ das Licht ausstrahlt, daß aber die Wellenpakete nach dem Verlassen des Atoms auseinanderfließen. Die Absorption des Lichtes würde nach dieser Auffassung kontinuierlich ablaufen, wie es der alten Theorie entspricht. Das war in ihren wesentlichen Zügen die Meinung von BOHR, KRAMERS und SLATER. Doch wurden später zwei experimentelle Erfahrungen bekannt, welche zu dieser Theorie in vollständigem Widerspruch stehen. Die erste Erfahrung betrifft das bei der Fluoreszenz beobachtete STOKESsche Gesetz. Danach kann die Frequenz des bei dieser Erscheinung emittierten Lichtes nicht größer sein als die des einfallenden – also die Fluoreszenz verursachenden – Lichtes. Es sind zwar Abweichungen von diesem Gesetz bekannt, die jedoch durch die thermische Energie der Materie erklärt werden konnten. Es sei die Frequenz des einfallenden Lichtes ν_0, dann ist die Energie des dazugehörenden Photons $h\nu_0$. Bei der Fluoreszenz verwandelt sich dieses Photon in ein solches der Frequenz ν_1. Dann muß $\nu_1 < \nu_0$ sein, weil es sonst ganz unerklärlich wäre, von welchem Vorgang der Energieüberschuß des bei der Fluoreszenz entstandenen größeren Photons herrührt. Diese experimentelle Erfahrung steht jedoch im vollständigen Widerspruch zur erwähnten Auffassung bezüglich der diskreten Emission und der kontinuierlich erfolgenden Absorption. Wenn die Absorption tatsächlich kontinuierlich geschehen würde, so stände dem nichts im Wege, daß das fluoreszierende Atom Photonen von größerer Frequenz als der des einfallenden Lichtes emittieren könnte. Dazu müßte man nur annehmen, daß das Atom das große Lichtquant nur dann emittiert, wenn es infolge der kontinuierlichen Absorption schon soviel Energie aufgenommen hat, daß die Energie zur Emission des erwähnten größeren Photons ausreicht. Dagegen kann man das STOKESsche Gesetz ganz ungezwungen erklären, wenn man annimmt, daß das Lichtquant nicht auseinanderfließt, sondern quasi als Geschoß den Weg vom emittierenden Atom zum fluoreszierenden zurücklegt. Dann ist es klar, daß sich das Photon bei der Erscheinung der Fluoreszenz nur

in ein Photon kleinerer Energie umwandeln kann, da man sonst mit dem Energieerhaltungssatz in Widerspruch käme.

Ähnliche Schlüsse können wir aus dem HALLWACHSeffekt ziehen. Beleuchtet man die Oberfläche eines Metalls, so treten aus diesem Elektronen aus. Ist nun dieses Metall von seiner Umgebung isoliert, so dauert der Austritt der Elektronen so lange, bis das Metall zu einem gewissen Potential aufgeladen ist. Man könnte denken, daß auch diese Erscheinung mit der Hypothese der kontinuierlichen Absorption zu erklären wäre, weil man hierbei nur annehmen müßte, daß ein kleiner Teil der Oberfläche die Energie der Strahlung so lange kontinuierlich absorbiert, bis dort so viel Energie zur Verfügung steht, daß diese zum Austritt eines Elektrons ausreicht. Diese Erklärung besitzt jedoch eine prinzipielle Schwierigkeit: Danach könnten nach dem Beginn der Beleuchtung erst nach einer gewissen Zeit Elektronen austreten. Diese Zeitdauer müßte um so größer sein, je schwächer die Beleuchtungsstärke ist. Die Erfahrung beweist jedoch das Gegenteil. Elektronen treten gleich zu Beginn der Beleuchtung aus. Wenn wir die Beleuchtungsstärke vermindern, so hat das nur die Wirkung, daß während der Zeiteinheit weniger Elektronen austreten. Eine zeitliche Verspätung der Erscheinung tritt dagegen nicht ein. Wir sehen also, daß man die letztere Erfahrung mit Hilfe der Hypothese der kontinuierlichen Absorption nicht erklären kann, weil ja dann immer eine gewisse und endliche Zeitdauer vergehen müßte, bis an einer Stelle so viel Energie aufgespeichert ist, daß sie zur Ablösung eines Elektrons ausreicht. Ganz ungezwungen wird diese Erfahrung dadurch erklärt, daß das Photon nach der Emission nicht „auseinanderfließt", sondern als ein Geschoß seinen Weg bis zur Oberfläche des Metalles zurücklegt. Nach dieser Auffassung gelangt das Photon an einen Ort der Metalloberfläche und überträgt dort seine Energie auf ein Elektron, wodurch dieses Elektron (wenn die Energie des Photons dazu ausreicht) sich aus dem Inneren des Metalles befreien kann. Eine Verspätung kann hier nicht eintreten, da ja Photonen gleich zu Beginn der Beleuchtung auf die Metalloberfläche einfallen. Wenn wir die Intensität herabsetzen, so fallen in der Zeiteinheit weniger Photonen ein, also treten auch weniger Elektronen aus.

Diese Gedankengänge führten EINSTEIN zu der Annahme, daß das Photon im Verlaufe seines Weges gar nicht „auseinanderfließt" oder, anders ausgedrückt, daß nicht nur die Emission, sondern auch die Absorption in ganzen Photonen geschieht. In gewissem Sinne scheint diese Auffassung eine Rückkehr zur Emissionstheorie NEWTONS zu sein.

Es gibt nun auch Erfahrungen aus dem Gebiet der Biologie, die für die Photonentheorie sprechen. Wir wissen, daß die Lichtempfindlichkeit unseres Auges von der Grenze des Infraroten bis zu der des Ultravioletten reicht. Es wäre jedenfalls von geringem Wert, wenn wir auch noch im Ultravioletten sehen würden, weil schon die Luft, aber besonders der Nebel das ultraviolette Licht sehr stark streuen. Demgegenüber wäre es sehr nützlich für uns und auch für andere Lebewesen, wenn das Auge noch wenigstens im nahen Ultraroten empfindlich sein würde, weil diese Strahlen auch durch Nebel hindurchdringen (d.h., daß der Nebel das infrarote Licht nur in einem geringen Grade streut). Auf Grund der Photonentheorie ist es begreiflich, daß unser Auge

infolge der geringen Energie der Quanten nicht mehr auf infrarote Strahlung anspricht.

Die Lichtempfindlichkeit der Insektenaugen ist dagegen nach kürzeren Wellenlängen verschoben. Die rote Farbe sehen sie nicht (abgesehen von den Schmetterlingen, welche ja die am höchsten entwickelten Insekten sind). Sie sehen jedoch im nahen Ultravioletten. Eine rein ultraviolette Lichtquelle, die für uns unsichtbar ist, wird z. B. noch von Fliegen angeflogen. Auf der Grundlage der Photonentheorie ist auch hier der Sachverhalt klar. Das Insektenauge ist besonders empfindlich für die relativ großen Photonen des ultravioletten Lichtes. Davon haben die Insekten auch einen Nutzen, weil es sich infolge von neuesten physikalischen Messungen herausgestellt hat, daß einige Blumen eine sehr intensive „ultraviolette Farbe“ haben (z. B. der Klatschmohn).

Auf der tatsächlichen Existenz der Photonen beruht ebenfalls die Tatsache, daß es zwar leicht ist, ultraviolettes Licht in sichtbares zu verwandeln, umgekehrt ist dies jedoch nicht unmittelbar möglich. So nimmt z. B. das Auflösungsvermögen des Mikroskopes bei Anwendung von ultraviolettem Licht zu, weil man nach der ABBEschen Theorie zwei Punkte nur dann voneinander unterscheiden kann, wenn ihre Entfernung wenigstens die Hälfte der Wellenlänge des benutzten Lichtes beträgt. Ein solches mikroskopisches Bild kann man photographieren. Man kann es auch unmittelbar sichtbar machen unter Anwendung eines fluoreszierenden Okulars.

Andererseits wäre es für das praktische Leben sehr wichtig, wenn wir infrarote Strahlen in sichtbare umwandeln könnten. Man könnte dann ein Fernrohr konstruieren, mit dem man durch Nebel hindurchsehen könnte. Leider ist das jedoch unmittelbar nicht möglich. Aus einem kleineren Photon kann selbstverständlich nicht ein größeres entstehen. Man kann sich nur so helfen, daß man mit Hilfe des „infraroten Photons“ ein Elektron auslöst und dieses dann in einem elektrischen Felde beschleunigt. Dieses Elektron löst dann beim Einfallen auf eine mit einer lumineszierenden Substanz überzogene Platte ein schon in das sichtbare Gebiet fallendes Photon aus.

Das tatsächliche Vorhandensein der Erscheinungen der Polarisation, der Interferenz und der Diffraktion kann man keinesfalls leugnen. Diese Erscheinungen sprechen ganz entschieden für die Wellennatur des Lichtes. Zwei Auffassungen stehen sich hier gegenüber. Nach der modernen Auffassung ist es tatsächlich so, daß das Licht eine sogenannte duale Natur besitzt. Bei einigen Erscheinungen verhält es sich so, als ob es eine Wellennatur, bei anderen dagegen, als ob es eine korpuskulare Natur besitzen würde. Bezüglich dieses interessanten dualen Verhaltens gibt es in der Natur noch ein anderes Beispiel. Die wirklichen materiellen Korpuskeln verhalten sich bei einigen physikalischen Vorgängen tatsächlich als diskrete Teilchen. Bei anderen Vorgängen tritt die Wellennatur in Erscheinung.

Wir bringen noch eine andere Interpretation der dualen Natur des Lichtes: Die elektromagnetische Lichttheorie ist nur eine Beschreibung der Statistik der Photonen. An der Stelle, an der nach der Theorie der Interferenzerscheinungen die maximale Intensität auftritt, ist auch die Wahrscheinlichkeit maximal, daß dort Photonen einfallen. Da es sich bei allen Lichterscheinungen um sehr viele

Photonen handelt, gehen die Wahrscheinlichkeitsaussagen in genaue numerische Zusammenhänge über.

Nach den obigen Ausführungen können wir aussagen, daß die Undulationstheorie des Lichtes trotz der Erscheinungen, welche für eine korpuskulare Natur sprechen, ihre Gültigkeit behält. Man muß nur bei solchen Erscheinungen mit der Anwendung der Wellentheorie behutsam sein, bei denen es sich nicht um sehr viele, sondern – im Gegenteil – um recht wenige Photonen handelt. Im folgenden wollen wir die klassische Wellentheorie des Lichtes behandeln.

Eine Bemerkung müssen wir noch bezüglich der in der Radiotechnik benutzten elektromagnetischen Wellen machen. Oft hört man folgende Frage: Bei den erwähnten Wellen sind die Gesetze der klassischen Elektrodynamik in vollem Umfange gültig. Im infraroten, sichtbaren und ultravioletten Teil des Spektrums werden die Erscheinungen durch die Quantentheorie beschrieben. Natürlich sind diese Erscheinungen von derselben Art. Nur ihre Wellenlänge ist verschieden. Wo liegt die Grenze, bei der die Gültigkeit der klassischen Theorie aufhört und die Quantentheorie an ihre Stelle tritt? Die Antwort ist darauf folgende: In beiden Fällen besteht unsere moderne Auffassung zu Recht, nach der die elektromagnetische Wellentheorie die Statistik der Photonen ist, nur sind beim sichtbaren Licht die Energien der Photonen verhältnismäßig groß. Deshalb gibt es hier Erscheinungen, bei denen das tatsächliche Vorhandensein der Photonen bemerkbar wird. Bei den in der Radiotechnik benutzten elektromagnetischen Wellen ist die Wellenlänge verhältnismäßig groß. Demzufolge ist (nach dem Zusammenhang $E = h\nu$) die Energie der Photonen so klein, daß man ihr Vorhandensein nicht demonstrieren kann. (Nicht einmal bei dem Empfang eines sehr entfernt gelegenen Radiosenders beobachten wir einen „Schroteffekt", der darin bestehen würde, daß unsere Antenne Photonen einzeln nachweisbar absorbiert.) In neuester Zeit ist es jedoch gelungen, unter Verwendung moderner Hilfsmittel der Hochfrequenztechnik (Ultrakurzwellentechnik) – z. B. Hohlraummagnetron und Klystron – Schwingungen so hoher Frequenz zu erzeugen, daß deren quantenhafte Absorption bemerkbar wurde. Diese neue Methode ermöglichte sehr interessante Untersuchungen über den Aufbau der Materie usw.

Trotz jeder Anstrengung ist es bis jetzt noch nicht gelungen, eine ganz widerspruchsfreie quantenmechanische Theorie aufzustellen, welche sowohl das Verhalten der Materie als auch das der Welle von einem einheitlichen Standpunkt beschreibt. Gerade in neuester Zeit hatte die Quantenelektrodynamik zwei erste große Erfolge: die genaue Berechnung der sogenannten Lambshift und die von Schwinger, Karplus und Kroll berechnete Korrektion des Landéschen g-Faktors. Vorerst ist es sehr zweckmäßig, das Verhalten der materiellen Teilchen nach der Quantenmechanik, das Verhalten des elektromagnetischen Feldes klassisch zu behandeln. Diese doppelte Methode führt zu fast keinem Widerspruch; doch ist sie theoretisch nicht ganz befriedigend.

DIE LICHTVEKTOREN

§ 4. Einige grundlegende Erfahrungen bezüglich der Lichterscheinungen und die Schlüsse, die man daraus auf die mathematische Form der Lichtvektoren ziehen kann

Zunächst müssen wir uns auf drei – sich auf Lichterscheinungen beziehende – sehr wichtige Erfahrungen berufen: Erstens breitet sich das Licht mit einer endlichen Geschwindigkeit aus. Zum Beweis dieser Behauptung und zur Messung der Ausbreitungsgeschwindigkeit verfügen wir über vielerlei Methoden. Zweitens beweisen die Interferenzerscheinungen, daß die Lichterscheinungen an einem gegebenen Orte aus zeitlich periodisch sich ändernden Prozessen bestehen und daß diese Perioden für Lichtstrahlen verschiedener Farbe verschieden sind. Drittens erzeugen die Kristalle, die nicht dem kubischen System zugehören, eine Doppelbrechung des Lichtes. Unter Anwendung einer geeigneten Anordnung können wir einen Strahl vollständig eliminieren (NIKOLsches Prisma). Untersuchen wir mit NIKOLschen Prismen die aus einem doppelbrechenden Kristall austretenden Lichtstrahlen, so stellen wir fest, daß bei einer gewissen Stellung der NIKOLs die Lichtintensität maximal ist. Bei einer Drehung des Analysators um 90° wird kein Licht mehr hindurchgelassen. Unser Auge kann das polarisierte Licht von dem natürlichen Licht – abgesehen von einer Erscheinung, die unter gewissen Bedingungen auftritt (sogenannte HAIDINGERsche Büschel) – ohne spezielle optische Hilfsmittel nicht unterscheiden. Nach den neuesten Untersuchungen des Zoologen v. FRISCH hat es sich herausgestellt, daß Bienen tatsächlich die Polarisationsrichtung des polarisierten Lichtes mit ihren Augen wahrnehmen und sich auch bei ganz bedecktem Himmel nach dem Sonnenstand orientieren können.

Wenn wir die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes in einem gegebenen Medium mit v bezeichnen, so können in dem die Lichterscheinung beschreibenden mathematischen Ausdruck die Zeit und der vom Licht zurückgelegte Weg nur in der Kombination $t - \frac{r}{v}$ auftreten. Der Lichtvektor muß die Form $F\left(t - \frac{r}{v}\right)$ besitzen, wobei F eine noch unbekannte Funktion ist.

Nach den experimentellen Erkenntnissen muß die Funktion F eine periodische Funktion sein. Vom mathematischen Standpunkt aus kann man jede Funktion (mit nur geringen Einschränkungen, die jedoch vom physikalischen Standpunkt unwesentlich sind) durch eine Reihe einfacher Schwingungsfunktionen darstellen, welche nach Vielfachen der der Funktion zugeordneten Veränderlichen fortschreiten:

$$F\left(t - \frac{r}{v}\right) = \sum_k \left[m_k \sin\alpha_k \left(t - \frac{r}{v}\right) + n_k \cos\alpha_k \left(t - \frac{r}{v}\right)\right]. \tag{1}$$

Alle in Gleichung (1) stehenden Glieder sind einfache periodische Funktionen, welche dieselben Werte annehmen, wenn

$$\alpha\left(t_1 - \frac{r_1}{v}\right) = \alpha\left(t - \frac{r}{v}\right) + 2\pi \tag{2}$$

gilt. Ist r konstant, so gilt $\alpha(t_1 - t) = 2\pi$. Diese Zeitdauer $t_1 - t$ nennen wir Schwingungsdauer und bezeichnen sie mit T:

$$T = \frac{2\pi}{\alpha}. \tag{3}$$

Dagegen wiederholen sich in einem gegebenen Zeitpunkte entlang der Strecke r die von unserer Funktion angenommenen Werte, und zwar der ganze Wertebereich in einem Intervall $\alpha \frac{r - r_1}{v} = 2\pi$. Die kleinste Entfernung zweier Punkte, in denen unsere Funktion denselben Wert annimmt und die wir mit $r - r_1$ bezeichneten, nennen wir die Wellenlänge der harmonischen Schwingung (λ):

$$\lambda = 2\pi \frac{v}{\alpha}. \tag{4}$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) folgt

$$\lambda = T \cdot v. \tag{5}$$

Wenn wir berücksichtigen, daß die Zahl der Schwingungen während einer Sekunde, die wir mit ν bezeichnen, gleich $1/T$ ist, so folgt mit Hilfe der Gleichung (5)

$$\lambda \nu = v. \tag{6}$$

Die Darstellung unserer Funktion $F\left(t - \frac{r}{v}\right)$ durch Gleichung (1) drückt nur eine ganz allgemeine mathematische Gesetzmäßigkeit aus, die Entwickelbarkeit einer Funktion in eine FOURIERsche Reihe. Es bleibt zu unterscheiden, ob den Gliedern dieser Reihe, zu denen dasselbe α gehört und die deshalb nach den Gleichungen (3), (4) und (5) eine bestimmte Frequenz und Wellenlänge besitzen, auch tatsächlich eine homogene Lichterscheinung entspricht oder, anders ausgedrückt, ob man das Verhalten eines monochromatischen (weiter nicht zerlegbaren) Lichtstrahles mit einem zu einem einzigen α gehörenden Gliede der Gleichung (1) tatsächlich beschreiben kann. Diesbezüglich kann nur die Erfahrung entscheiden. Wie wir sehen werden, ist das tatsächlich möglich.

Auf der Grundlage dieser Erkenntnis bleiben dann, wenn wir Gleichung (1) zur Beschreibung einer homogenen Lichterscheinung benutzen, nur zwei Glieder der rechten Seite übrig:

$$F\left(t - \frac{r}{v}\right) = A' \sin\alpha\left(t - \frac{r}{v}\right) + A'' \cos\alpha\left(t - \frac{r}{v}\right). \tag{7}$$

Wenn wir durch die Gleichungen (3) und (4) T und λ einführen, so erhalten wir den Ausdruck

$$F\left(t - \frac{r}{v}\right) = A' \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) + A'' \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right). \tag{8}$$

Die Summe der auf der rechten Seite von Gleichung (8) stehenden zwei harmonischen Funktionen können wir noch mit Hilfe einer einzigen harmonischen Funktion ausdrücken. Führen wir zu diesem Zweck die Bezeichnungen

$$\frac{A''}{A'} = \operatorname{tg}\delta' \quad \text{und} \quad A'^2 + A''^2 = A^2 \tag{9}$$

ein. Gleichung (8) läßt sich dann folgendermaßen schreiben:

$$F\left(t - \frac{r}{v}\right) = A\left\{\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)\cos\delta' + \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)\sin\delta'\right\} \tag{10}$$

oder, noch einfacher:

$$F\left(t - \frac{r}{v}\right) = A\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) + \delta'\right\}. \tag{11}$$

Wenn wir noch die Bezeichnung $\delta = \delta'/2\pi$ einführen, so erhalten wir schließlich für Gleichung (8):

$$F\left(t - \frac{r}{v}\right) = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta\right). \tag{12}$$

Dieser mathematische Ausdruck ist die gebräuchlichste Form zur Beschreibung einer Lichterscheinung; A nennen wir die Amplitude und $2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta\right)$ die Phase der harmonischen Schwingungserscheinung.

§ 5. Das Licht als Vektorerscheinung

Bis jetzt haben wir von den drei erwähnten sich auf das Licht beziehenden Erfahrungen nur zwei benutzt und erhielten dabei das Resultat, daß ein homogener Lichtstrahl mit Hilfe eines mathematischen Ausdrucks des Typs (12) beschrieben werden kann. Jetzt führen wir unsere dritte Erfahrung ein, nach der die aus einem doppelbrechenden Kristall austretenden Lichtstrahlen in der Ebene senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung in verschiedenen Richtungen verschiedene Eigenschaften besitzen, was wir so ausdrücken können, daß die Lichtstrahlen polarisiert sind. Wir müssen demnach einen Vektor mathematisch beschreiben, der nach der Erfahrung in der zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten Ebene liegt. Dies kann man im allgemeinsten Fall mit Hilfe zweier Komponenten erreichen. Bezeichnen wir die Komponenten mit u und v, dann müssen wir statt Gleichung (12) zwei Gleichungen aufschreiben:

$$u = A'\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) + A''\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \alpha\right) \tag{13}$$

und

$$v = B'\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) + B''\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) = B\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \beta\right), \tag{14}$$

wobei wir jetzt statt der in Gleichung (12) stehenden einen Phasenkonstante im Ausdruck der zwei Vektorkomponenten α und β geschrieben haben. Gleichungen (13) und (14) liefern die ganz allgemeine Beschreibung einer homogenen

Lichtwelle, welche auch die Polarisation berücksichtigt. Hier nennen wir jetzt $A^2 + B^2 = C^2$ das Quadrat der Amplitude und den Ausdruck $\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}$ die Phase. Die Amplitude ist zeitlich unveränderlich, kann jedoch selbstverständlich noch eine Funktion von r sein, z. B. im Falle von Kugelwellen. Die Phase ändert sich sehr schnell mit der Zeit. Daraus folgt, daß die von unserem Auge empfundene Lichtstärke nur mit dem Wert der Amplitude zusammenhängen kann, da unser Auge der sich sehr schnell ändernden Phase nicht folgen kann.

Wenn wir aus den Gleichungen (13) und (14) die Zeit eliminieren, so erhalten wir die Gleichung der Kurve, welche vom Endpunkt des Lichtvektors in der zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten Ebene beschrieben wird. Schreiben wir zu diesem Zweck die Gleichungen (13) und (14) zuerst in der Form

$$\frac{u}{A} = \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)\cos\alpha' + \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)\sin\alpha' \tag{15}$$

und

$$\frac{v}{B} = \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)\cos\beta' + \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)\sin\beta', \tag{16}$$

wobei jetzt nach Analogie des früher besprochenen Falles $\alpha' = 2\pi\alpha$ und $\beta' = 2\pi\beta$ ist.

Multiplizieren wir die Gleichung (15) mit $\sin\beta'$ und Gleichung (16) mit $-\sin\alpha'$ und addieren beide, so folgt

$$\frac{u}{A}\sin\beta' - \frac{v}{B}\sin\alpha' = -\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)\sin(\alpha' - \beta'). \tag{17}$$

Wenn wir analog die erste Gleichung mit $\cos\beta'$ und die zweite mit $-\cos\alpha'$ multiplizieren und dann addieren, so erhalten wir als Resultat:

$$\frac{u}{A}\cos\beta' - \frac{v}{B}\cos\alpha' = \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)\sin(\alpha' - \beta'). \tag{18}$$

Wenn wir die Quadrate der Gleichungen (17) und (18) addieren, so fallen die zeitabhängigen Glieder heraus:

$$\frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} - 2\frac{uv}{AB}\cos(\alpha' - \beta') = \sin^2(\alpha' - \beta'). \tag{19}$$

Dies ist die Gleichung der Kurve, welche der Endpunkt des Lichtvektors in der zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten Ebene beschreibt. Gleichung (19) ist im allgemeinen die (nicht auf Hauptachsen bezogene) Gleichung einer Ellipse. Das ist der ganz allgemeine Fall. Ist $\alpha' - \beta' = \frac{\pi}{2}$ oder gleich einem ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$, dann gilt

$$\frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} = 1. \tag{20}$$

Somit erhalten wir die auf Hauptachsen bezogene Gleichung einer Ellipse. Für $\alpha' - \beta' = n \cdot \pi$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ folgt

$$\frac{u}{A} \pm \frac{v}{B} = 0. \tag{21}$$

Das ist die Gleichung zweier Geraden, die durch den Mittelpunkt des Koordinatensystems gehen. In diesem Fall ist das Licht linear polarisiert. Ein spezieller Fall liegt ebenfalls vor, wenn $A = B$ ist:

$$u^2 + v^2 = A^2. \tag{22}$$

Der fragliche Lichtstrahl ist dann zirkular polarisiert. Zur Untersuchung der Frage, in welcher Richtung die verschiedenen Kurven vom Endpunkt des Lichtvektors beschrieben werden, müssen wir im vorliegenden u-v-Koordinatensystem untersuchen, wie sich das Vorzeichen von v nach der größten positiven Elongation entlang der u-Achse ändert. So wird z. B. beim elliptisch und beim zirkular polarisierten Licht, wenn $\alpha' - \beta' = \frac{\pi}{2}$ ist und u gerade seinen größtmöglichen positiven Wert angenommen hat, v in positiver Richtung zu wachsen beginnen. Der Lichtvektor beschreibt die Kurve entgegen dem Drehungssinn des Uhrzeigers. Ist dagegen $\alpha' - \beta' = 3\,\frac{\pi}{2}$, so wird, nachdem u seinen größten positiven Wert angenommen hat, v negativ werden. Der Umlauf erfolgt also im Sinne des Uhrzeigers usw.

Wie wir schon erwähnt haben, folgt aus der Erscheinung der Polarisation, daß der Lichtvektor in der zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten Ebene liegt. Man könnte dagegen annehmen, daß im allgemeinen bei beliebigem Winkel des Lichtvektors nur die doppelbrechende kristalline Substanz eine Komponentenzerlegung verursacht. In zwei von diesen Komponenten müßte der Lichtvektor senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung schwingen. Diese Auffassung würde dem Prinzip der Erhaltung der Energie widersprechen; die dritte Komponente, deren Lichtvektor zur Fortpflanzungsrichtung parallel wäre, müßte in dem kristallinen Medium bleiben. Irgendeine Folge dieser Erscheinung wäre dann zu beobachten (z. B. eine Erwärmung). Nach der Erfahrung ist jedoch kein derartiger Effekt vorhanden.

§ 6. Die komplexe Schreibweise der Lichtvektoren

Unsere Gleichung (12) können wir auch in der Form

$$F\left(t - \frac{r}{v}\right) = A e^{i 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta\right)} \tag{23}$$

schreiben, wenn wir vereinbaren, daß wir nur den reellen Teil der Gleichung (23) zur Beschreibung der wirklichen physikalischen Erscheinung betrachten. Bei verwickelteren Berechnungen wird diese komplexe Schreibweise oft benutzt, weil sie den Vorteil besitzt, daß man sich bei Differentiationen und Integrationen nicht darum zu kümmern braucht, ob die Kosinusfunktionen sich in Sinusfunktionen verwandeln und umgekehrt. Zur Berechnung des Quadrates eines Lichtvektors darf man jedoch nicht die komplexe Form benutzen.

Aus der EULERschen Gleichung $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ folgt, daß $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ und $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$ ist. Wenn wir den in komplexer Form geschriebenen Lichtvektor mit i multiplizieren, so bedeutet das, daß wir seine Phase um $\frac{\pi}{2}$ vergrößern. Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen, daß wir uns den Vektor des zirkular polarisierten Lichtes so vorstellen können, daß dieser die Resultierende von zwei linear polarisierten Vektoren ist, die aufeinander senkrecht stehen und zwischen denen eine Phasendifferenz $\frac{\pi}{2}$ besteht. Diesen Umstand können wir mit Hilfe der komplexen Schreibweise einfach so ausdrücken, daß wir die eine Komponente mit i multiplizieren (selbstverständlich benutzen wir dann dieselbe Phasenkonstante bei beiden Komponenten). Wie schon erwähnt, hängt die Intensität des Lichtes nur von der Amplitude ab, von der Phase dagegen nicht. Aus der Theorie der harmonischen Schwingungen wissen wir, daß die Energie eines harmonischen Oszillators proportional dem Amplitudenquadrat ist. Daraus können wir den Schluß ziehen, daß auch die Intensität des Lichtes dem Quadrat der Amplitude des Lichtvektors proportional ist. Das Quadrat der Amplitude des in komplexer Form geschriebenen Lichtvektors erhalten wir einfach dadurch, daß wir diesen Vektor mit seinem konjugiert komplexen Wert multiplizieren.

§ 7. Die Wellengleichung

Unsere Gleichung (12) schreiben wir jetzt in der Form

$$u = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta\right). \tag{24}$$

Führen wir hier den Zusammenhang (5) ein, so erhält man für Gleichung (24)

$$u = A\cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{v}\right) + \delta'\right\}. \tag{25}$$

Zur Vereinfachung der Rechnungen nehmen wir an, daß sich die Lichtwelle in Richtung der Z-Achse ausbreitet. Wir schreiben in Gleichung (25) z statt r:

$$u = A\cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{v}\right) + \delta'\right\}. \tag{26}$$

Wie am einfachsten durch unmittelbare Berechnung bewiesen werden kann, genügt u der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{27}$$

Wenn die Fortpflanzungsrichtung des Lichtes nicht gerade mit der Richtung der Z-Achse zusammenfällt, gilt für den allgemeinen Fall

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\Delta u, \tag{28}$$

wobei

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{29}$$

der LAPLACE-Operator ist.

Bis jetzt haben wir immer angenommen, daß die Amplitude A eine konstante Größe ist, wie es den ebenen Wellen entspricht. Wir können jedoch leicht zeigen, daß Gleichung (28) auch im Falle von Kugelwellen gilt. Es ist dann

$$\varphi = \frac{A}{r} \cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{v}\right) + \delta'\right\} = \frac{1}{r}\, u. \tag{30}$$

Die Amplitude muß bei Kugelwellen r umgekehrt proportional sein, weil die Intensität dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional ist. Aus Gleichung (30) folgt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial t} \tag{31}$$

und

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{v^2}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}. \tag{32}$$

Weiter ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{x}{r^2} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{x}{r^3} u \tag{33}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{r^2 - 2x^2}{r^4} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x^2}{r^3} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{r^3 - 3x^2 r}{r^6} u - \frac{x^2}{r^4} \frac{\partial u}{\partial r} \\ &= -\frac{r^2 - 3x^2}{r^5} u + \frac{r^2 - 3x^2}{r^4} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x^2}{r^3} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}. \end{aligned} \tag{34}$$

Ähnliche Ausdrücke erhalten wir für $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$. Addieren wir alle Ausdrücke, so folgt

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}. \tag{35}$$

Wenn wir dieses Resultat in Gleichung (32) einsetzen, erhalten wir

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = v^2 \Delta \varphi. \tag{36}$$

Der Vektor der Plan- und Kugelwellen genügt also einer Differentialgleichung vom Typ (28) bzw. (36), d.h. der sogenannten Wellengleichung. Da diese Differentialgleichung linear und homogen ist, genügt ihr auch eine Summe von verschiedenen partikulären Lösungen. Vom physikalischen Standpunkt bedeutet dies die Gültigkeit des Superpositionsprinzips.

§ 8. Die Deutung der erhaltenen Differentialgleichung als eine Gleichung von elastischen und von elektromagnetischen Wellen

Betrachten wir jetzt den ganz allgemeinen Fall, in dem unser Lichtvektor durch drei Komponenten (entsprechend den drei Raumrichtungen) gegeben ist, die wir der Reihe nach mit u, v und w bezeichnen und die alle durch Ausdrücke

des Typs (25) definiert sind. Es bestehen dann folgende drei Differentialgleichungen (siehe Gleichung 28):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= v^2 \Delta u, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= v^2 \Delta v \quad \text{und} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= v^2 \Delta w. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Da der Lichtvektor immer in der zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten Ebene liegt, so muß folgender Zusammenhang bestehen:

$$u\frac{x}{r} + v\frac{y}{r} + w\frac{z}{r} = 0. \tag{38}$$

Differentiation nach t ergibt

$$\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{y}{r}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{z}{r}\frac{\partial w}{\partial t} = 0. \tag{39}$$

Bei ebenen Wellen ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{1}{v}\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial q} = -\frac{1}{v}\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{40}$$

wobei wir mit q die Größe $\left(t - \frac{r}{v}\right)$ bezeichnen. Ähnliche Zusammenhänge erhalten wir auch für $\frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial w}{\partial z}$. Setzen wir diese in Gleichung (39) ein, so folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{41}$$

Führen wir noch einen neuen Vektor ein, dessen Komponenten ξ, η, ζ durch

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{und} \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{42}$$

gegeben sind, dann folgt

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \tag{43}$$

und

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{44}$$

Subtrahieren wir jetzt Gleichung (44) von der Gleichung (43), so folgt

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right). \tag{45}$$

Wenn wir Gleichung (41) nach x differenzieren, so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 0. \tag{46}$$

Aus Gleichung (45) und Gleichung (46) folgt die Beziehung

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u. \tag{47}$$

Ähnlich erhalten wir die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} = \Delta w \quad \text{und} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} = \Delta v. \tag{48}$$

Unter Berücksichtigung des Gleichungssystems (37) folgt

und

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \\ \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

In dieser Form haben unsere Differentialgleichungen dieselbe Gestalt wie die Differentialgleichungen, die bei den elastischen Schwingungen inkompressibler Körper auftreten. Hier ist auch der Grund dafür zu suchen, daß man vor der Aufstellung der elektromagnetischen Lichttheorie die Lichtschwingungen als elastische Schwingungen eines hypothetischen Stoffes, des sogenannten „Lichtäthers", deutete. Selbstverständlich sind in diesem als fest und inkompressibel angenommenen hypothetischen Medium nur transversale Schwingungen möglich. Nach der elastizitätstheoretischen Deutung würden u, v und w die Verrückungen der Ätherteilchen, ξ, η und ζ die Drehungen der Teilchen gegeneinander bedeuten.

Wenn wir in unserem Gleichungssystem (49) die dritte Gleichung nach y und die zweite nach z differenzieren, so erhalten wir die Zusammenhänge

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial y\,\partial x} \tag{50}$$

und

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}. \tag{51}$$

Unter Berücksichtigung der ersten Gleichung des Systems (42) und Subtraktion der Gleichung (51) von (50) folgt

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\,\partial z}\right). \tag{52}$$

Andererseits erhält man, wenn man die Gleichungen (42) nacheinander nach x, y und z differenziert und dann addiert

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0. \tag{53}$$

Wenn wir diese Gleichung nach x ableiten und dann das erhaltene Resultat in Gleichung (52) einsetzen, so folgt

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \Delta \xi. \tag{54}$$

Ähnliche Gleichungen können wir für η und ζ herleiten. Also genügen auch ξ, η und ζ der Wellengleichung und können zur Beschreibung des Lichtvektors ebenso benutzt werden wie u, v und w.

Nach der Besprechung der Grundgleichungen der elastischen Lichttheorie führen wir jetzt einen anderen Hilfsvektor ein:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial u}{\partial t} = a; \quad \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial t} = b \quad \text{und} \quad \frac{1}{v}\frac{\partial w}{\partial t} = c. \tag{55}$$

Wenn wir jetzt die erste Gleichung des Systems (42) nach der Zeit differenzieren, so folgt

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right). \tag{56}$$

Setzen wir die in Gleichung (55) definierten Größen ein, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \tag{57}$$

und ähnlich

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} \tag{58}$$

sowie

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}. \tag{59}$$

Wenn wir weiterhin die Gleichungen (55) nach der Zeit differenzieren und dann die erhaltenen Resultate in das Gleichungssystem (49) einsetzen, so folgen die Differentialgleichungen

$$\frac{1}{v}\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} = -\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right) \tag{60}$$

und

$$\frac{1}{v}\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} = -\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right), \tag{61}$$

$$\frac{1}{v}\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right). \tag{62}$$

In dieser Form sind unsere Gleichungen gerade die MAXWELLschen Differentialgleichungen für das Vakuum. ξ, η und ζ sind dann die Komponenten der elektrischen und a, b und c die der magnetischen Feldstärke. Unsere Gleichung (53) drückt in dieser Deutungsweise die bekannte Tatsache aus, daß im leeren Raum die Divergenz der elektrischen Feldstärke verschwindet. Diese Zusammenhänge geben den Grundstein für die moderne elektromagnetische Theorie des Lichtes, mit der wir uns im folgenden ausschließlich beschäftigen werden.

Die elastische Lichttheorie hatte trotz der erwähnten Widersprüche sowohl den Vorteil der großen Anschaulichkeit als auch den Vorteil, daß sie einen großen Teil der Lichterscheinungen nur durch ihre mathematische Form einwandfrei erklären konnte. Selbstverständlich kann man diese Erklärungen, weil sie allein auf der mathematischen Form der Wellengleichung beruhen, unverändert in die elektromagnetische Theorie übertragen. Die elektromagnetische Theorie kann außerdem die Wechselwirkungen von Lichterscheinungen mit anderen physikalischen Erscheinungen (besonders mit elektrischen und magnetischen Erscheinungen) einwandfrei erklären.

Nach der elastischen Theorie schwingt das Licht senkrecht zur Polarisationsebene. (Die Polarisationsebene ist z. B. bei der Lichtreflexion die Ebene, welche den einfallenden und den reflektierten Strahl enthält.) Nach der elektromagnetischen Theorie schwingt der elektrische Vektor senkrecht zur Polarisationsebene, der magnetische Vektor dagegen in dieser Ebene. Die in diesem Paragraphen besprochenen theoretischen Überlegungen rühren von WALDEMAR VOIGT her.

DIE THEORIE DER LICHTREFLEXION UND DER LICHTBRECHUNG

§ 9. Die Grundbegriffe der elektromagnetischen Lichttheorie

Wenn wir die MAXWELLschen Differentialgleichungen auf durchsichtige Körper anwenden, so müssen wir berücksichtigen, daß diese notwendigerweise Isolatoren sind, so daß der Vektor der Stromdichte i überall verschwindet. Da durchsichtige Körper weder ferromagnetisch noch stark paramagnetisch sind, können wir die magnetische Permeabilität überall gleich eins setzen. Die Vektoren $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ unterscheiden sich demnach nicht voneinander. Durch diese Vereinfachungen können wir die MAXWELLschen Differentialgleichungen in folgender Form schreiben:

$$\dot{\mathfrak{D}} = c \operatorname{rot} \mathfrak{H} \quad \text{und} \quad \dot{\mathfrak{H}} = -c \operatorname{rot} \mathfrak{E}. \tag{63}$$

Als Nebenbedingungen treten hinzu:

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0. \tag{64}$$

Die erste Gleichung des Systems (64) ist eine Folge davon, daß in der untersuchten Substanz keine elektrischen Ladungen vorhanden sind. Unser Gleichungssystem (63) entspricht vollkommen unseren Differentialgleichungen (57), (58), (59), (60), (61) und (62). Die erste Gleichung von (64) entspricht der Gleichung (53). Das Analogon der zweiten erhalten wir, wenn wir Gleichung (41) nach t differenzieren und dann das Resultat (55) einsetzen. Der Vektor $\mathfrak{H}$ bedeutet die magnetische Feldstärke. Seine rechtwinkligen Komponenten müssen wir mit a, b und c identifizieren und die Komponenten von $\mathfrak{D}$ mit ξ, η und ζ. c bedeutet in Gleichung (63) die im Vakuum gemessene Lichtgeschwindigkeit. Es entspricht dieser in unseren früheren Gleichungen die Geschwindigkeit v.

Der Vektor der elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ ist gleich $\varepsilon\mathfrak{E}$, wobei ε die Dielektrizitätskonstante ist.

In einem homogenen isotropen Medium können wir unsere Gleichungen (63) folgendermaßen schreiben:

$$\varepsilon\dot{\mathfrak{E}} = c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} \quad \text{und} \quad \dot{\mathfrak{H}} = -c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}. \tag{65}$$

Die einfachste Lösung dieses Differentialgleichungssystems erhalten wir im Falle einer ebenen Welle. Nehmen wir zur Vereinfachung der Rechnung an, daß sich eine Planwelle entlang der X-Achse ausbreitet. Die Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes sind dann von y und z unabhängig. Da die Schwingungen transversal sind, so ist

$$\mathfrak{E}_x = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{H}_x = 0. \tag{66}$$

Für die anderen Komponenten erhält man aus den Gleichungen (65)

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} &= -c\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}; & \varepsilon\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} &= c\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} \\ \text{und} \qquad \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} &= c\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}; & \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} &= -c\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Von den übriggebliebenen vier Komponenten hängen immer zwei paarweise miteinander zusammen, und zwar $\mathfrak{E}_y$ mit $\mathfrak{H}_z$ und $\mathfrak{E}_z$ mit $\mathfrak{H}_y$. Außerdem genügt jede Komponente der Wellengleichung, wie das z. B. für $\mathfrak{E}_y$ aus der ersten und vierten Gleichung von (67) folgt, wenn wir die erste Gleichung nach z, die vierte Gleichung nach x differenzieren und einsetzen:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon}\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial x^2}. \tag{67a}$$

Wie wir im ersten Paragraphen ausführlich besprochen haben, besitzt die Wellengleichung Lösungen vom Typ $F\left(t - \frac{r}{v}\right)$. v^2 entspricht hier [nach Gleichung (67a)] der Größe c^2/ε. Wir können also folgende Lösungen angeben:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= 0, & \mathfrak{H}_x &= 0, \\ \mathfrak{E}_y &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} f\left(t - \frac{x}{q}\right), & \mathfrak{H}_y &= -g\left(t - \frac{x}{q}\right), \\ \mathfrak{E}_z &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} g\left(t - \frac{x}{q}\right), & \mathfrak{H}_z &= f\left(t - \frac{x}{q}\right), \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

wobei wir jetzt mit q^2 den Bruch c^2/ε bezeichnen. In den Gleichungen (68) sind f und g beliebige, aber eindeutige Funktionen des einzigen Argumentes $\left(t - \frac{x}{q}\right)$, d. h., die Veränderlichen können nur in dieser Kombination vorkommen.

Wenn wir jetzt den POYNTINGschen Vektor berechnen, so erhalten wir als Resultat, daß allein die entlang der X-Achse auftretende Komponente dieses

Vektors nicht verschwindet, weil ja das die Fortpflanzungsrichtung unserer ebenen Welle ist. Die übrigbleibende Komponente ist also

$$\mathfrak{S}_x = \frac{c}{4\pi} (\mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_y) = \frac{q}{4\pi} (f^2 + g^2). \tag{69}$$

In einer isotropen Substanz fällt daher die Richtung der Energieströmung mit der Richtung der Normalen der Wellenfläche zusammen. Da wir jedoch eine Energieströmung, die sich in der Zeit sehr schnell ändert, weder mit unserem Auge beobachten, noch messen können, so interessiert uns in erster Linie der zeitliche Mittelwert von $\mathfrak{S}_x$, also die Größen

$$\frac{1}{T}\int_0^T f^2 dt = \overline{f^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{T}\int_0^T g^2 dt = \overline{g^2}, \tag{70}$$

in denen T eine genügend große Zeitdauer bedeutet. Aus Gleichung (70) folgt, daß durch eine Fläche der Größe F während der Zeiteinheit die Energie

$$\frac{q}{4\pi} \left(\overline{f^2} + \overline{g^2}\right) \cdot F \tag{71}$$

hindurchströmt.

Unsere weitere Aufgabe wäre, die Funktionen f und g oder – richtiger ausgedrückt – die Bedeutungen der vorliegenden Funktionen zu untersuchen und die genaue mathematische Form dieser Funktionen festzustellen. Was das letztere anbetrifft, können wir auf Grund der Interferenzerscheinungen sagen, daß f und g einfache harmonische Funktionen ihrer Argumente sind.

§ 10. Die Gesetze der Lichtreflexion und der Lichtbrechung

Zunächst besprechen wir die Erscheinungen, welche auftreten, wenn unsere in Gleichung (68) angegebene Welle auf die ebene Grenzfläche eines anderen isotropen Mediums einfällt. Damit die MAXWELLschen Differentialgleichungen auch im anderen Medium erfüllt sind, nehmen wir hier ebenfalls eine ebene Welle an. Wir bezeichnen den Winkel, unter dem die ursprüngliche ebene Welle auf die Grenzfläche der beiden Dielektriken einfällt mit ϑ, und den Winkel, welche die im zweiten Medium angenommene ebene Welle mit der Normalen der Grenzfläche einschließt, mit ϑ_1 (vgl. die Abb. 11). Bezeichnen wir weiter die Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke dieser zweiten Welle mit $\mathfrak{E}_{y_1}$, $\mathfrak{E}_{z_1}$, $\mathfrak{H}_{y_1}$ und $\mathfrak{H}_{z_1}$. ($\mathfrak{E}_{x_1}$ und $\mathfrak{H}_{x_1}$ verschwinden wieder, weil wir in dem zweiten Medium die X_1-Achse parallel zur Strahlrichtung wählen). Im zweiten Medium bezeichnen wir die Funktionen f und g mit f_1 und g_1 und die Dielektrizitätskonstante mit ε_1. Aus den Gesetzen der Elektrodynamik ist uns bekannt, daß an der Grenzfläche die Tangentialkomponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke kontinuierlich ineinander übergehen müssen. Diese Bedingung kann man jedoch nicht erfüllen, da wir vier Komponenten haben, in der zweiten Substanz jedoch nur f_1 und g_1 frei wählbar sind. Es ist

also – vom physikalischen Standpunkt gesehen – unmöglich, daß ein Lichtstrahl auf die Grenzfläche zweier durchsichtiger Medien fällt und dann im zweiten Medium als gebrochener Strahl seinen Weg fortsetzt, ohne daß auch noch eine andere Lichterscheinung auftreten würde. Damit wir den erwähnten Grenzbedingungen genügen, müssen wir im ursprünglichen ersten Medium einen reflektierten Strahl annehmen. Der reflektierte Strahl bildet mit der Normalen den Winkel ϑ'. Wir bezeichnen die dazugehörenden Feldstärken mit $\mathfrak{E}_{y'}$, $\mathfrak{E}_{z'}$, $\mathfrak{H}_{y'}$ und $\mathfrak{H}_{z'}$ und die der Gleichung (68) entsprechenden Wellenfunktionen

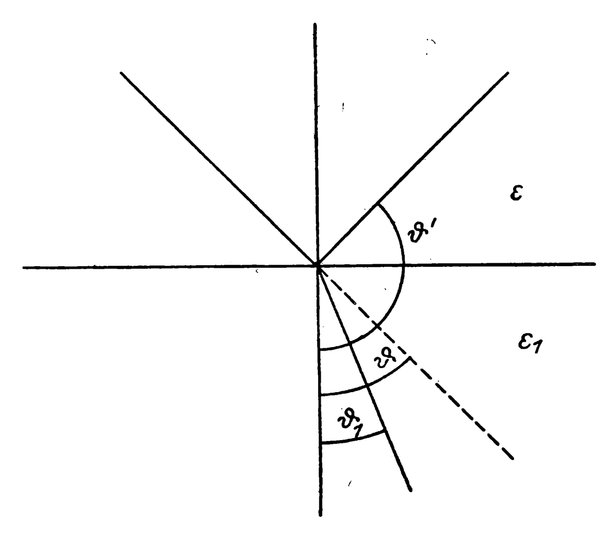


Abb. 11. Lichtreflexion und Lichtbrechung an der Grenze zweier Medien

mit f' und g'. Jetzt stehen uns vier frei wählbare Größen (f_1, g_1, f' und g') zur Verfügung. Wir können daher die Grenzbedingungen bezüglich des kontinuierlichen Überganges der Tangentialkomponenten der vier Feldstärken an der Grenze der zwei Medien erfüllen. Wenn wir in der Grenzebene der Dielektrika ein ebenes Koordinatensystem einführen, dessen ζ-Achse mit der früheren Z-Achse zusammenfällt und dessen η-Achse auf der erwähnten Richtung senkrecht steht, so sind die Tangentialkomponenten im ersten Medium

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{E}_\eta &= \mathfrak{E}_y \cos\vartheta + \mathfrak{E}_{y'} \cos\vartheta' = \frac{\cos\vartheta}{\sqrt{\varepsilon}} f + \frac{\cos\vartheta'}{\sqrt{\varepsilon}} f', \\
\mathfrak{E}_\zeta &= \mathfrak{E}_z + \mathfrak{E}_{z'} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} g + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} g', \\
\mathfrak{H}_\eta &= \mathfrak{H}_y \cos\vartheta + \mathfrak{H}_{y'} \cos\vartheta' = -\cos\vartheta \cdot g - \cos\vartheta' \cdot g' \\
\text{und} \qquad \mathfrak{H}_\zeta &= \mathfrak{H}_z + \mathfrak{H}_{z'} = f + f'.
\end{aligned}\right\} \qquad (72)$$

Analog haben wir im zweiten Dielektrikum

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_\eta &= \mathfrak{E}_{y_1}\cos\vartheta_1 = \frac{\cos\vartheta_1}{\sqrt{\varepsilon_1}}\,f_1,\\ \mathfrak{E}_\zeta &= \mathfrak{E}_{z_1} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}\,g_1,\\ \mathfrak{H}_\eta &= \mathfrak{H}_{y_1}\cos\vartheta_1 = -\cos\vartheta_1\cdot g_1\\ \text{und}\qquad \mathfrak{H}_\zeta &= \mathfrak{H}_{z_1} = f_1. \end{aligned}\right\}\tag{73}$$

Unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen müssen die auf der rechten Seite von (72) und (73) stehenden Ausdrücke paarweise einander gleich sein:

$$\left.\begin{aligned} \cos\vartheta\cdot f+\cos\vartheta'\cdot f' &= \cos\vartheta_1\cdot f_1\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}},\\ g+g' &= g_1\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}},\\ \cos\vartheta\cdot g+\cos\vartheta'\cdot g' &= \cos\vartheta_1\cdot g_1\\ \text{und}\qquad f+f' &= f_1. \end{aligned}\right\}\tag{74}$$

Da nun die Quadratwurzeln aus den Dielektrizitätskonstanten umgekehrt proportional den jeweils auftretenden Phasengeschwindigkeiten sind und der aufeinander bezogene Brechungsindex der zwei Medien gleich dem reziproken Verhältnis der Phasengeschwindigkeiten ist, so folgt

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}} = \frac{q}{q_1} = n \quad (n = \text{Brechungsindex}). \tag{75}$$

Unsere Gleichungen (74) enthalten die Gesetze der Lichtreflexion und der Lichtbrechung. Der Umstand, daß wir die Grenzbedingungen nicht allein durch Annahme eines in dem anderen Medium auftretenden gebrochenen Strahles befriedigen konnten, bedeutet physikalisch, daß der Lichtstrahl beim Erreichen der Grenzfläche nicht nur im zweiten Medium gebrochen, sondern auch im ersten Medium reflektiert wird.

Aus (74) können wir die Funktionenpaare f_1 und g_1 bzw. f' und g' als Funktionen von f und g berechnen:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \frac{n(\cos\vartheta-\cos\vartheta')}{\cos\vartheta_1-n\cos\vartheta'}\cdot f = \mu_1 f,\\ g_1 &= \frac{n(\cos\vartheta-\cos\vartheta')}{n\cos\vartheta_1-\cos\vartheta'}\cdot g = \sigma_1 g,\\ f' &= \frac{n\cos\vartheta-\cos\vartheta_1}{\cos\vartheta_1-n\cos\vartheta'}\cdot f = \mu f,\\ g' &= \frac{\cos\vartheta-n\cos\vartheta_1}{n\cos\vartheta_1-\cos\vartheta'}\cdot g = \sigma g. \end{aligned}\right\}\tag{76}$$

Die Argumente der Funktionenpaare (f, g), (f_1, g_1) und (f', g') bezeichnen wir jetzt in Analogie zu Gleichung (68) der Reihe nach mit

$$\left(t - \frac{x}{q}\right), \quad \left(t - \frac{x_1}{q_1}\right) \quad \text{und} \quad \left(t - \frac{x'}{q'}\right).$$

Die mit x, x_1 und x' bezeichneten Richtungen sind zur Ausbreitungsrichtung des Strahles immer parallel. An der Grenzfläche müssen dann folgende Zusammenhänge bestehen:

$$x = \eta \sin\vartheta, \quad x_1 = \eta \sin\vartheta_1 \quad \text{und} \quad x' = \eta \sin\vartheta'. \tag{77}$$

Die vorher erwähnten Argumente werden mit den folgenden Ausdrücken identisch sein:

$$\left(t - \frac{\eta \sin\vartheta}{q}\right), \quad \left(t - \frac{\eta \sin\vartheta_1}{q_1}\right) \quad \text{und} \quad \left(t - \frac{\eta \sin\vartheta'}{q'}\right). \tag{78}$$

Diese Argumente müssen einander gleich sein, da unser Gleichungssystem zu jedem Zeitpunkt t und außerdem an jedem Orte der Grenzfläche (also bei jedem beliebigen Wert von η) erfüllt sein muß:

$$\frac{\sin\vartheta}{q} = \frac{\sin\vartheta_1}{q_1} = \frac{\sin\vartheta'}{q'}. \tag{79}$$

q' ist jedoch gleich q, da es sich ja um dasselbe Medium handelt. Unter Berücksichtigung dieser Tatsache erhalten wir aus Gleichung (79) sofort die Gesetze der Lichtreflexion und der Lichtbrechung, weil mit Hilfe von Gleichung (75)

$$\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta_1} = \frac{q}{q_1} = n = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}} \tag{80}$$

und außerdem

$$\vartheta' = \pi - \vartheta \tag{81}$$

folgt. (Der andere aus Gleichung (79) folgende Wert für ϑ', nämlich $\vartheta' = \vartheta$, ist physikalisch nicht möglich, da sich der reflektierte Strahl im ersten Medium fortpflanzt.) Gleichung (80) stellt das SNELLIUS-DESCARTESsche Gesetz der Lichtbrechung dar. Gewöhnlich benutzt man statt des Winkels ϑ' einen Winkel der Größe $180° - \vartheta'$, den wir mit ϑ_2 bezeichnen. Dann kann unser Resultat in der Form

$$\vartheta = \vartheta_2 \tag{82}$$

geschrieben werden. Das ist die gewohnte Form des Gesetzes der Lichtreflexion.

Nach unserer Gleichung (75) ist der Brechungsindex gleich dem Verhältnis der Quadratwurzeln der Dielektrizitätskonstanten des zweiten und des ersten Mediums. Die Dielektrizitätskonstanten sind Stoffkonstanten der beiden Medien. In diesem Falle hat es den Anschein, daß die elektromagnetische Lichttheorie im Widerspruch zur Erfahrung steht, weil sich der Zusammenhang (75) oft nicht bewährt. Am bekanntesten ist das im Falle des Wassers auftretende Paradoxon. Der (auf die Luft bezogene) Brechungsindex des Wassers ist 1,3, seine Dielektrizitätskonstante beträgt dagegen 80. Wenden wir auf diesen Fall unsere Gleichung (75) an und berücksichtigen, daß die Dielektrizitätskonstante

der Luft fast gleich eins ist, so müßte der Zusammenhang $n = \sqrt{\varepsilon}$ bestehen. Die empirischen Werte zeigen jedoch eine starke Abweichung. Eine weitere, zunächst paradoxe Erscheinung muß erwähnt werden. Der Brechungsindex ist bekanntlich eine Funktion der Wellenlänge, dagegen ist ε scheinbar eine Konstante. Die Widersprüche finden ihre Erklärung dadurch, daß die Polarisierbarkeiten der Bausteine der Materie (Atome, Moleküle, Ionen) gegenüber schnell veränderlichen elektrischen Feldern keine Konstanten mehr sind, sondern Funktionen der Frequenz, wie wir das schon bei der Besprechung der Dispersionstheorie gesehen haben. Wir dürfen in Gleichung (75) nicht die im konstanten Felde gemessene Dielektrizitätskonstante einsetzen und gleichzeitig den Brechungsindex des sichtbaren Lichtes benutzen. Dann dürfte die Gleichung nicht richtig sein. Im Falle des Wassers stimmt die Gleichung (75) mit der Erfahrung gleich viel besser überein, wenn wir nicht den im sichtbaren Gebiet, sondern den im fernen ultraroten gemessenen Brechungsindex benutzen. Diese Erkenntnis bedeutet mit anderen Worten, daß die MAXWELLschen Differentialgleichungen zwar auch bei Vorhandensein einer Dispersion richtig sind, die in ihnen stehenden Konstanten werden jedoch für verschiedene Frequenzen ebenfalls verschieden sein.

Wenn wir jetzt in unser Gleichungssystem (76) den aus Gleichung (80) als Verhältnis zweier Sinusfunktionen dargestellten Brechungsindex n einsetzen, so erhalten wir für den reflektierten Strahl folgende Zusammenhänge:

$$\mu = \frac{\operatorname{tg}(\vartheta - \vartheta_1)}{\operatorname{tg}(\vartheta + \vartheta_1)} \quad \text{und} \quad \sigma = -\frac{\sin(\vartheta - \vartheta_1)}{\sin(\vartheta + \vartheta_1)} \tag{83}$$

und ähnlich für den gebrochenen

$$\mu_1 = \frac{\sin 2\vartheta}{\sin(\vartheta + \vartheta_1)\cos(\vartheta - \vartheta_1)} \quad \text{und} \quad \sigma_1 = \frac{\sin 2\vartheta}{\sin(\vartheta + \vartheta_1)}. \tag{84}$$

Dies sind die sogenannten FRESNELschen Formeln für die Lichtreflexion und die Lichtbrechung.

Da wir die Koordinate η in der durch die Koordinaten y und y' definierten Ebene angenommen haben und andererseits η in der Trennungsebene der beiden Medien liegt, also die Schnittgerade der beiden erwähnten Ebenen darstellt, so schwingt der elektrische Vektor der von unserer Funktion f beschriebenen Welle in der Ebene, welche den einfallenden und reflektierten Strahl enthält (also in der Einfalls- oder Polarisationsebene). Der dazugehörende magnetische Vektor schwingt senkrecht zu dieser Ebene. Ähnlich schwingt die zu dem mit g bezeichneten Vektor gehörende elektrische Feldstärke senkrecht zur Polarisationsebene und der magnetische Vektor in dieser Ebene [siehe Gleichungen (68)].

Das Verhältnis der Intensität des reflektierten und des einfallenden Strahles, d.h. den Reflexionskoeffizienten, können wir unter Berücksichtigung der Gleichungen (71) und (76) berechnen:

$$\frac{\overline{f'^2} + \overline{g'^2}}{\overline{f^2} + \overline{g^2}} = \varrho = \frac{\mu^2\,\overline{f^2} + \sigma^2\,\overline{g^2}}{\overline{f^2} + \overline{g^2}}. \tag{85}$$

Wenn es sich um natürliches (also nicht polarisiertes) Licht handelt, ist notwendigerweise $\overline{f^2} = \overline{g^2}$. Gleichung (85) erhält dann die Gestalt

$$\varrho = \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2}. \tag{86}$$

Diese Gleichung kann man leicht mit der Erfahrung vergleichen. Setzen wir in (86) unsere Gleichungen (83) ein, dann erhalten wir ϱ als Funktion des Einfallswinkels. Bei nahezu senkrechtem Einfall ist $\vartheta \approx 0$, $\vartheta_1 \approx 0$ und

$$\varrho = \left(\frac{\vartheta - \vartheta_1}{\vartheta + \vartheta_1}\right)^2 = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2. \tag{87}$$

Bei streifendem Einfall ist $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$. Dann erreicht ϱ nach den Gleichungen (83) und (86) seinen maximalen Wert, die Einheit. Es gibt in diesem Falle überhaupt keinen gebrochenen Strahl. Weiter können wir aus Gleichung (87) ersehen, daß der Reflexionskoeffizient um so größer ist, je größer n ist.

Für einfallendes natürliches (also nicht polarisiertes) Licht ist die Gleichung $\overline{f^2} = \overline{g^2}$ gültig. Für den reflektierten Strahl kann dann die analoge Gleichung $\overline{f'^2} = \overline{g'^2}$ nicht bestehen – abgesehen von den Fällen des senkrechten oder streifenden Einfalles. Wir erhalten aus den Gleichungen (76) und (83)

$$\frac{\overline{f'^2}}{\overline{g'^2}} = \frac{\mu^2}{\sigma^2} = \frac{\cos^2(\vartheta + \vartheta_1)}{\cos^2(\vartheta - \vartheta_1)}. \tag{88}$$

Der reflektierte Strahl ist also teilweise polarisiert, wenn der einfallende unpolarisiert (natürliches Licht) war. Aus Gleichung (88) können wir ersehen, daß im reflektierten Licht die Intensität der f-Welle, deren elektrischer Vektor in der Einfallsebene schwingt, geringer ist als die der g-Welle, deren elektrischer Vektor in der zu dieser Ebene senkrechten Richtung schwingt. Ist $\vartheta + \vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$, so wird sogar – wie wir aus Gleichung (88) ersehen können – aus der reflektierten Welle der vom Vektor f herrührende Anteil vollständig fehlen. Wenn das einfallende Licht natürliches Licht war, dann wird bei einem Einfallswinkel, bei dem der gebrochene Lichtstrahl auf dem reflektierten senkrecht steht, das reflektierte Licht vollständig (und linear) polarisiert sein. Das ist das Brewstersche Gesetz, das wir hier auf rein theoretischem Wege hergeleitet haben. Durch Anwendung des Brewsterschen Gesetzes ist es möglich, sowohl linear polarisiertes Licht herzustellen als auch die f- und g-Komponenten des Lichtstrahles zu trennen. Die reflektierende Platte muß einmal so angeordnet sein, daß der elektrische Vektor von f in die Einfallsebene fällt und das anderemal der des g-Vektors. Da wir die Koeffizienten μ und σ aus Gleichung (76) kennen, so können wir aus f' und g' die Vektoren f und g immer berechnen.

Auch für beliebige Einfallswinkel können wir die Reflexionskoeffizienten für die f- und die g-Wellen gesondert angeben. Aus den Gleichungen (76) und (83) erhalten wir folgende Formeln:

$$\varrho_{\|} = \mu^2 = \frac{\mathrm{tg}^2(\vartheta - \vartheta_1)}{\mathrm{tg}^2(\vartheta + \vartheta_1)} \tag{89}$$

und

$$\varrho_{\perp} = \sigma^2 = \frac{\sin^2(\vartheta - \vartheta_1)}{\sin^2(\vartheta + \vartheta_1)}. \tag{90}$$

Wir haben das einfallende Licht in zwei Komponenten zerlegt, deren elektrische Vektoren senkrecht zueinander schwingen. Es erhebt sich die Frage, was geschehen wird, wenn wir diesen Lichtstrahl nach zwei anderen, jedoch ebenfalls senkrechten Richtungen zerlegen. Bezeichnen wir die in den ursprünglichen Richtungen angenommenen Funktionen mit f_0 und g_0 und die neuen Komponenten einfach (ohne Indizes) mit f und g. Die zwei ebenen Koordinatensysteme seien gegeneinander um den Winkel φ verdreht, dann muß

$$\begin{aligned} f &= f_0 \cos\varphi + g_0 \sin\varphi, \\ g &= -f_0 \sin\varphi + g_0 \cos\varphi \end{aligned} \tag{91}$$

sein. Die Intensitäten sind den folgenden Größen proportional:

$$\left.\begin{aligned} \overline{f^2} &= \overline{f_0^2}\cos^2\varphi + 2\overline{f_0 g_0}\sin\varphi\cos\varphi + \overline{g_0^2}\cdot\sin^2\varphi, \\ \overline{g^2} &= \overline{f_0^2}\sin^2\varphi - 2\overline{f_0 g_0}\sin\varphi\cos\varphi + \overline{g_0^2}\cdot\cos^2\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

Addieren wir diese Gleichungen, so folgt

$$\overline{f^2} + \overline{g^2} = \overline{f_0^2} + \overline{g_0^2},$$

wie es selbstverständlich auch sein muß, weil die Gesamtintensität nicht von der Wahl des Koordinatensystems abhängen kann. Jedoch wird die Intensität einer einzigen Komponente, deren elektrischer Vektor einen gegebenen Winkel φ_k mit der Richtung des elektrischen Vektors von f_0 einschließt,

$$\overline{f^2} = \overline{f_0^2}\cos^2\varphi_k + \overline{g_0^2}\sin^2\varphi_k + 2\overline{f_0 g_0}\sin\varphi_k\cos\varphi_k. \tag{93}$$

Die Intensität des Lichtes verhält sich wie ein Tensor zweiter Ordnung, der nur drei Komponenten besitzt. Der Wert von $\overline{f_0 g_0}$ kann sich zwischen $\pm\sqrt{\overline{f_0^2}}\sqrt{\overline{g_0^2}}$ ändern. Wenn $\overline{f_0 g_0}$ einen dieser Grenzwerte erreicht, kann man Gleichung (93) folgendermaßen schreiben:

$$\overline{f^2} = \left(\sqrt{\overline{f_0^2}}\cos\varphi \pm \sqrt{\overline{g_0^2}}\sin\varphi\right)^2. \tag{94}$$

Für

$$\operatorname{tg}\varphi = \mp\sqrt{\frac{\overline{f_0^2}}{\overline{g_0^2}}} \tag{95}$$

verschwindet $\overline{f^2}$. Dann bleibt nur die g-Komponente übrig. Das Licht ist dann linear polarisiert. Aus $\overline{f^2} = 0$ folgt auch $f = 0$ und weiter aus der ersten Gleichung von (91)

$$\frac{f_0}{g_0} = -\operatorname{tg}\varphi = \pm\sqrt{\frac{\overline{f_0^2}}{\overline{g_0^2}}}. \tag{96}$$

In diesem Fall ist das Verhältnis der Komponenten f_0 und g_0 eine vom Werte ihres Argumentes unabhängige konstante Größe, d. h., daß die eine von ihnen durch die andere und durch den Winkel φ vollständig bestimmt ist. In diesem Falle sagen wir, daß die zwei Komponenten vollständig kohärent sind. Die zwei Komponenten eines linear polarisierten Lichtstrahles sind immer vollständig kohärent. Im allgemeinen ist das Licht entweder natürlich oder nur teilweise kohärent. Im letzteren Falle sind die zwei Komponenten nur teilweise kohärent.

Bei natürlichem Licht ist selbstverständlich $\overline{f_0^2} = \overline{g_0^2}$. Außerdem gilt nach den obigen Beziehungen immer

$$\overline{f_0^2} = \overline{g_0^2} = \overline{f^2} = \overline{g^2},$$

weil es für natürliches Licht keine ausgezeichnete Richtung gibt. Daraus folgt, daß auf der rechten Seite der Gleichung (93) das dritte Glied verschwinden muß. Da φ ganz willkürlich ist, muß

$$\overline{f_0 g_0} = 0 \tag{97}$$

sein. Gleichung (97) ist die Bedingung der vollständigen Inkohärenz der zwei Komponenten. Gleichung (93) geht für diesen Fall in die Beziehung

$$\overline{f^2} = \overline{f_0^2} \cos^2\varphi + \overline{g_0^2} \sin^2\varphi \tag{98}$$

über. Da die gemittelten Quadrate den Intensitäten proportional sind, können wir Gleichung (98) auch schreiben als

$$I_\varphi = I_x \cos^2\varphi + I_y \sin^2\varphi. \tag{99}$$

Mit I_φ bezeichnen wir die Intensität des linear polarisierten Lichtes, dessen elektrischer Vektor den Winkel φ mit der X-Achse einschließt. I_x und I_y sind die Intensitäten der Komponenten, deren elektrische Vektoren parallel zu der X- bzw. Y-Achse schwingen. (Die Ausbreitungsrichtung des Lichtes haben wir hier parallel zur Z-Achse angenommen.)

Da nach Gleichung (93) die Intensität eines linear polarisierten Lichtstrahles durch drei Größen bestimmt ist, so genügt es nicht, die Intensität zweier Komponenten zu messen, deren elektrische Vektoren senkrecht zueinander stehen, um über die „Natur“ des Lichtes zu entscheiden. So gibt z. B. das Verhältnis zweier Komponenten noch keine Auskunft darüber, ob der zu untersuchende Lichtstrahl elliptisch polarisiert oder eine Mischung von natürlichem und linear polarisiertem Licht ist. Dazu ist noch die Messung einer dritten Größe erforderlich. Im allgemeinen ist es zur Entscheidung solcher Fragen zweckmäßig, zwischen zwei Komponenten eine Phasendifferenz von $\pi/2$ einzuschalten. Elliptisch polarisiertes Licht kann auf diesem Wege in linear polarisiertes verwandelt werden usw.

Ganz ähnlich wie wir eben die Daten des reflektierten Strahles berechnet haben, können wir auch die Daten des gebrochenen Strahles berechnen. In Analogie zum Reflexionskoeffizienten definieren wir hier den Durchlässigkeits-

koeffizienten, der das Verhältnis der Intensitäten des gebrochenen und des einfallenden Strahles angibt. Bezeichnen wir diesen Koeffizienten mit τ, so gilt

$$\varrho + \tau = 1. \tag{100}$$

Wir können den Durchlässigkeitskoeffizienten in Analogie zu Gleichung (89) und Gleichung (90) in die Koeffizienten der einzelnen Komponenten zerlegen, deren elektrische Vektoren in der Einfallsebene und senkrecht zu dieser Einfallsebene schwingen. Aus den Gleichungen (76) und (83) folgt

$$\tau_{\|} = 1 - \varrho_{\|} = 1 - \mu^2 = \frac{\sin 2\vartheta \cdot \sin 2\vartheta_1}{\sin^2(\vartheta + \vartheta_1)\cos^2(\vartheta - \vartheta_1)} \tag{101}$$

und

$$\tau_{\perp} = 1 - \varrho_{\perp} = 1 - \sigma^2 = \frac{\sin 2\vartheta \cdot \sin 2\vartheta_1}{\sin^2(\vartheta + \vartheta_1)}. \tag{102}$$

Selbstverständlich können wir diese Koeffizienten unmittelbar aus den ersten beiden Gleichungen unseres Gleichungssystems (76) erhalten. Wir dürfen jedoch nicht einfach $\tau_{\|} = \mu_1^2$ und $\tau_{\perp} = \sigma_1^2$ setzen, weil sich im zweiten Medium die Geschwindigkeit des Lichtes und der Querschnitt des Lichtbündels ändern. Wenn wir die im ersten und zweiten Medium auftretenden Lichtgeschwindigkeiten mit q und q_1, den Querschnitt des Lichtbündels mit F und F_1 bezeichnen, so können wir für $\tau_{\|}$ und $\tau_{\perp}$ schreiben:

$$\tau_{\|} = 1 - \mu^2 = \frac{q_1}{q}\,\mu_1^2\,\frac{F_1}{F} \tag{103}$$

und analog

$$\tau_{\perp} = 1 - \sigma^2 = \frac{q_1}{q}\,\sigma_1^2\,\frac{F_1}{F}. \tag{104}$$

Weiter ist nach Gleichung (80) $\frac{q}{q_1} = \frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta_1} = n$. Aus der unmittelbaren Anschauung folgt $\frac{F_1}{F} = \frac{\cos\vartheta_1}{\cos\vartheta}$, so daß wir Gleichungen (103) und (104) etwas anders formulieren können:

$$\tau_{\|} = \frac{\sin\vartheta_1\cos\vartheta_1}{\sin\vartheta\cos\vartheta}\,\mu_1^2 \tag{105}$$

und

$$\tau_{\perp} = \frac{\sin\vartheta_1\cos\vartheta_1}{\sin\vartheta\cos\vartheta}\,\sigma_1^2. \tag{106}$$

Setzen wir in diese Gleichungen die für μ_1 und σ_1 in (76) gefundenen Werte ein, so erhalten wir tatsächlich als Resultat, daß die Gleichungen (105) und (106) mit (101) und (102) übereinstimmen.

§ 11. Die Theorie der Totalreflexion

Bis jetzt haben wir den Fall, daß das Licht aus einem optisch dichteren Medium in ein optisch dünneres Medium eindringt, ganz unberücksichtigt gelassen. Da jedoch die Sinusfunktion niemals größer als eins werden kann, so finden wir von einem bestimmten Einfallswinkel keinen Brechungswinkel mehr,

welcher dem Gesetz der Lichtbrechung entsprechen würde. Die elementare Theorie sagt dann, daß es in diesem Falle einen gebrochenen Strahl überhaupt nicht gibt. Die gesamte einfallende Energie wird demnach reflektiert (Totalreflexion). Nach dem Gesetz der Lichtbrechung müßte man für den Sinus des Brechungswinkels einen Wert größer als eins erhalten. Der Brechungswinkel muß also imaginär sein. Andererseits können wir unser Gleichungssystem (74) nur unter gleichzeitiger Annahme eines reflektierten und eines gebrochenen Strahles befriedigen, weil wir ja sonst (unter bloßer Annahme eines reflektierten Strahles) vier Gleichungen zur Berechnung von zwei Unbekannten haben würden. Daraus ist schon zu ersehen, daß die elementare Theorie nicht ganz richtig sein kann.

Weiter müssen wir bedenken, daß unsere Gleichungen für die Feldstärken homogen und von erstem Grade sind. Wenn es uns gelingt, komplexe Lösungen zu finden, so müssen auch die Realteile dieser Lösungen unsere Gleichungen befriedigen, und diese bedeuten gerade die physikalische Lösung unseres Problems. Wenn wir die komplexen Lösungen unserer Aufgabe bereits erhalten haben, so erhalten wir daraus die wirkliche physikalische Lösung einfach dadurch, daß wir die imaginären Teile der komplexen Ausdrücke weglassen.

Da der Brechungswinkel ϑ_1 jetzt imaginär ist, so werden μ und σ komplexe Werte annehmen. Vollständigkeitshalber nehmen wir an, daß auch unsere Funktionen f und g und ihre Argumente komplex sind. Da hier nur der Realteil einer physikalischen Größe von Bedeutung ist, kennzeichnen wir die Funktionen, von denen nur der Realteil zu berücksichtigen ist, durch Vorsetzen des Buchstabens R.

Für den elektrischen und magnetischen Vektor des einfallenden Lichtes erhalten wir dann statt Gleichung (68)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= 0, & \mathfrak{H}_x &= 0, \\ \mathfrak{E}_y &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\mathrm{R}f, & \mathfrak{H}_y &= -\mathrm{R}g, \\ \mathfrak{E}_z &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\mathrm{R}g \quad \text{und} & \mathfrak{H}_z &= \mathrm{R}f. \end{aligned}\right\} \tag{107}$$

Die Wellennormale des gebrochenen Strahles ist im vorliegenden Falle komplex, weil der Brechungswinkel imaginär ist. Die hier auftretenden Feldstärken beziehen wir auf das reelle Koordinatensystem, dessen ξ-Achse die Normale der die beiden Medien trennenden Ebene ist und dessen η- und ζ-Achsen in dieser Ebene liegen. Für die komplexen Feldstärken des gebrochenen Strahles erhalten wir in Achsenrichtung des obigen Koordinatensystems die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_\xi &= \mathfrak{E}_{x_1}\cos\vartheta_1 - \mathfrak{E}_{y_1}\sin\vartheta_1, \\ \mathfrak{E}_\eta &= \mathfrak{E}_{x_1}\sin\vartheta_1 + \mathfrak{E}_{y_1}\cos\vartheta_1 \end{aligned}\right\} \tag{108}$$

und ein analoges System zur Transformation der magnetischen Feldstärken. Die Feldstärken $\mathfrak{E}_{x_1}$, $\mathfrak{E}_{y_1}$ und $\mathfrak{E}_{z_1}$ drücken wir jetzt in Analogie zu Gleichung (68) durch die Funktionen f_1 und g_1 aus. Durch Einführung der Koeffizienten μ_1

und σ_1 nach Gleichung (76) können wir die Feldstärken $\mathfrak{E}_{x_1}$, $\mathfrak{E}_{y_1}$ und $\mathfrak{E}_{z_1}$ durch die Funktionen f und g beschreiben. Für die elektrischen und magnetischen Feldstärken erhalten wir im zweiten Medium (in dem nach der elementaren Theorie wegen der Totalreflexion der Lichtstrahl überhaupt nicht eindringen kann) das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_\xi &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}\,\mathrm{R}\mu_1 f\sin\vartheta_1, & \mathfrak{H}_\xi &= \mathrm{R}\sigma_1 g\sin\vartheta_1,\\ \mathfrak{E}_\eta &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}\,\mathrm{R}\mu_1 f\cos\vartheta_1, & \mathfrak{H}_\eta &= -\,\mathrm{R}\sigma_1 g\cos\vartheta_1,\\ \mathfrak{E}_\zeta &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}\,\mathrm{R}\sigma_1 g \quad \text{und} & \mathfrak{H}_\zeta &= \mathrm{R}\mu_1 f. \end{aligned}\right\} \qquad (109)$$

Für den reflektierten Strahl, dessen Wellennormale x' reell ist, erhalten wir aus Gleichung (68) und den letzten zwei Gleichungen des Systems (76) folgende Resultate:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_{x'} &= 0, & \mathfrak{H}_{x'} &= 0,\\ \mathfrak{E}_{y'} &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\mathrm{R}\mu f, & \mathfrak{H}_{y'} &= -\,\mathrm{R}\sigma g,\\ \mathfrak{E}_{z'} &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\mathrm{R}\sigma g \quad \text{und} & \mathfrak{H}_{z'} &= \mathrm{R}\mu f. \end{aligned}\right\} \qquad (110)$$

Das Argument der in den Gleichungen (107) eingeführten Funktionen ist $t - \frac{x}{q}$, das der in (109) eingeführten $t - \frac{x_1}{q_1}$ und das der Gleichungen (110) $t - \frac{x'}{q'}$. Wir benutzen dieselben Bezeichnungen wie bei der Betrachtung der gewöhnlichen Lichtbrechung und Reflexion. x ist in unserem Gleichungssystem (109) analog zu der in (108) eingeführten Transformation gleich $\xi\cos\vartheta_1 + \eta\sin\vartheta_1$.

Zunächst führen wir die empirisch ermittelte Tatsache ein, daß einfache (monochromatische) Lichterscheinungen mathematisch durch harmonische Funktionen darstellbar sind. Da außerdem in unserem vorliegenden Beispiel die Wellenfunktionen komplex sein müssen, so hat die Funktion f die Form

$$f(t, x) = Ae^{i\omega} = A(\cos\omega + i\sin\omega), \qquad (111)$$

wobei

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{q}\right) \qquad (112)$$

ist.

Nehmen wir an, daß der elektrische Vektor des einfallenden Lichtes in der Einfallsebene schwingt, d.h., daß das Licht in der auf dieser Ebene senkrecht stehenden Richtung polarisiert ist, dann bleibt nur f übrig, dagegen ist

$$g = 0. \qquad (113)$$

Setzen wir die Gleichungen (111) und (112) in Gleichung (107) ein, so folgt

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{E}_x = 0, & \mathfrak{H}_x = 0, \\ \mathfrak{E}_y = \frac{A}{\sqrt{\varepsilon}} \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{q}\right), & \mathfrak{H}_y = 0, \\ \mathfrak{E}_z = 0, & \mathfrak{H}_z = A \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{q}\right). \end{array}\right\} \tag{114}$$

Nach unseren Gleichungen (4), (5) und (6) ist die Frequenz

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{115}$$

und die Wellenlänge

$$\lambda = Tq, \tag{116}$$

wobei q die Phasengeschwindigkeit der Lichtwelle bedeutet.

Zur Berechnung der Daten des gebrochenen Strahles aus den in Gleichung (114) angegebenen reellen Größen müssen wir den jetzt imaginären Wert von $\cos\vartheta_1$ (ϑ_1 ist der Brechungswinkel, der hier im Falle der Totalreflexion imaginär ist) und außerdem den komplexen Wert der Größe μ_1 bestimmen. Den ersten Wert erhalten wir aus dem Gesetz der Lichtbrechung. Aus Gleichung (80) folgt nämlich

$$\sqrt{1 - \frac{\sin^2\vartheta}{n^2}} = \cos\vartheta_1. \tag{117}$$

Um die Rechnungen anschaulicher zu gestalten, führen wir folgende Bezeichnungsweise ein:

$$\cos\vartheta_1 = \pm i\varphi; \tag{118}$$

φ ist hier eine reelle Größe. Gleichung (118) setzen wir in die sich auf μ_1 beziehende Gleichung (84) ein und trennen danach Real- und Imaginärteil:

$$\mu_1 = \frac{2\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sin\vartheta\cos\vartheta + \sin\vartheta_1\cos\vartheta_1} = \frac{2\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta \mp i\,2\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\vartheta_1\cdot\varphi}{\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta + \varphi^2\sin^2\vartheta_1}. \tag{119}$$

Durch Einführung der Bezeichnung

$$\frac{\varphi\sin\vartheta_1}{\sin\vartheta\cos\vartheta} = \operatorname{tg}\frac{\delta}{2} \tag{120}$$

folgt

$$\mu_1 = 2\cos^2\frac{\delta}{2} \mp i\,2\sin\frac{\delta}{2}\cos\frac{\delta}{2} = 2\cos\frac{\delta}{2}\cdot e^{\mp i\frac{\delta}{2}}. \tag{121}$$

Die für das zweite Medium in Gleichung (109) angegebenen Feldstärken hängen alle – da nach unserer Annahme $g = 0$ ist – nur von der Funktion f ab. Wenn wir im Exponenten der Gleichung (111) unter Berücksichtigung der Gleichung (112) x_1 einsetzen, die Koordinate x_1 in Analogie zu Gleichung (108) mit Hilfe von ξ und η ausdrücken, also

$$x_1 = \xi\cos\vartheta_1 + \eta\sin\vartheta_1 \tag{122}$$

schreiben, und außerdem Gleichung (118) einsetzen, also die Gleichung

$$x_1 = \pm i\xi\varphi + \eta \sin\vartheta_1 \tag{123}$$

benutzen, so folgt schließlich für Gleichung (111)

$$f(x,t) = A e^{i\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\pm i\xi\varphi + \eta\sin\vartheta_1}{q_1}\right)}. \tag{124}$$

Diese Gleichung können wir, wenn man im Exponenten die Multiplikation mit i tatsächlich durchführt, etwas anders schreiben:

$$f(x,t) = A e^{\pm\frac{2\pi\xi\varphi}{T q_1}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{T}\left(t - \eta\frac{\sin\vartheta_1}{q_1}\right)}. \tag{125}$$

In Gleichung (125) ist der Exponent des ersten nach der Amplitude stehenden Faktors reell. Wäre dieser Faktor positiv, so würden die im zweiten Medium auftretenden Lichtintensitäten bei zunehmender Entfernung von der Trennungsebene mit zunehmendem ξ über alle Grenzen wachsen. Wir können im bezeichneten Exponenten nur das negative Vorzeichen benutzen. Die Intensität nimmt dann bei Entfernung von der Trennungsfläche exponentiell ab.

Die obigen Ausführungen zeigen, daß wir bei den weiteren Berechnungen die Beziehung

$$\cos\vartheta_1 = -i\varphi \tag{126}$$

anwenden müssen. Dementsprechend geht Gleichung (121) in folgenden Zusammenhang über:

$$\mu_1 = 2\cos\frac{\delta}{2} \cdot e^{i\frac{\delta}{2}}. \tag{127}$$

Für die in den Gleichungen (109) angegebenen, im gebrochenen Strahl auftretenden Feldstärken folgt dann unter Berücksichtigung der Gleichungen (113), (125) und (127)

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{E}_\xi &= -A\frac{\sin\vartheta_1}{\sqrt{\varepsilon_1}} 2\cos\frac{\delta}{2}\, e^{-\frac{2\pi\varphi\xi}{T q_1}} \cdot \cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\eta\sin\vartheta_1}{q_1}\right) + \frac{\delta}{2}\right\};\ \mathfrak{H}_\xi = 0,\\
\mathfrak{E}_\eta &= \frac{A\varphi}{\sqrt{\varepsilon_1}} 2\cos\frac{\delta}{2}\, e^{-\frac{2\pi\varphi\xi}{T q_1}} \cdot \sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\eta\sin\vartheta_1}{q_1}\right) + \frac{\delta}{2}\right\};\ \mathfrak{H}_\eta = 0,\\
\mathfrak{E}_\zeta &= 0;\quad \mathfrak{H}_\zeta = 2A\cos\frac{\delta}{2}\, e^{-\frac{2\pi\varphi\xi}{T q_1}} \cdot \cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\eta\sin\vartheta_1}{q_1}\right) + \frac{\delta}{2}\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{128}$$

Wir sehen, daß bei der Totalreflexion auch im zweiten, dünneren Medium – in das nach der elementaren Theorie der Lichtstrahl überhaupt nicht eindringt – endliche Feldstärken auftreten. Diese sind entlang der Koordinate η – also parallel zu der Schnittgeraden der Trennungsebene der zwei Medien – und der Einfallsebene periodisch wie der Lichtstrahl im ersten Medium. Dagegen nehmen die Intensitäten in senkrechter Richtung zu der Trennungsebene exponentiell ab. Aus den Gleichungen (128) können wir ersehen, daß in einer Ent-

fernung von einigen Wellenlängen von der Trennungsfläche praktisch überhaupt keine Lichtintensität auftritt. Das Licht dringt zwar in das zweite, optisch dünnere Medium tatsächlich ein, aber nur bis zu der einige λ_1 betragenden Tiefe, und breitet sich dort parallel zur Trennungsebene aus. Nach der elementaren Theorie der Totalreflexion tritt dieser Strahl überhaupt nicht auf. Aus den Gleichungen (128) können wir die Gesetzmäßigkeit ablesen, daß der Lichtstrahl um so weniger tief in das optisch dünnere Medium eindringt, je größer der Einfallswinkel ϑ ist.

Sehr interessante Erscheinungen entstehen dann, wenn das optisch dünnere Medium nur als eine sehr dünne Schicht in der Größenordnung λ vorhanden ist und darauf wieder ein optisch dichteres Medium folgt, dessen Brechungsindex ebenso groß oder noch größer als der des ersten Mediums ist. Wenn das optisch dünnere Medium überhaupt nicht vorhanden wäre, so würde ein Teil des einfallenden Strahles als gebrochener Strahl im letztgenannten Medium seinen Weg fortsetzen. Wenn jedoch eine Schicht sehr geringer Dicke eines optisch dünneren Mediums dazwischen liegt, dann könnte nach der elementaren Theorie das Licht in das dritte Medium überhaupt nicht eindringen. Nach dem besprochenen theoretischen Gedankengang können dagegen, wenn die Dicke der dazwischenliegenden Schicht nur von der Größenordnung der Wellenlänge des Lichtes ist, die in dieser optisch dünneren Schicht exponentiell abnehmenden Feldstärken noch mit einer bemerkbaren Größe das dritte Medium erreichen, wo sie sich in eine normale periodische Erscheinung umwandeln, wie ja das aus der Umkehrung unseres eben besprochenen theoretischen Gedankenganges unmittelbar folgt. Anders ausgedrückt, kann das Licht, wenn das optisch dünnere Medium nur als eine Schicht von sehr geringer Dicke vorhanden ist, auf der Grundlage der Wellentheorie teilweise doch durch diese Schicht hindurchdringen.

Ohne ausführliche Besprechung wollen wir hier ähnliche Erscheinungen anführen, die bei der Bewegung von materiellen Teilchen auftreten. Nach der klassischen Mechanik könnte ein materielles Teilchen einen „Potentialberg" überhaupt nicht überwinden, wenn seine Energie zur Erreichung des „Gipfels des Potentialberges" nicht ausreicht. Nach der DE BROGLIE-SCHRÖDINGERschen Wellenmechanik tritt unter Voraussetzung eines hinreichend schmalen Potentialberges eine endliche Wahrscheinlichkeit dafür auf, daß das Teilchen den „Potentialberg" überwinden kann, auch wenn es nach der klassischen Mechanik prinzipiell unmöglich wäre. Diese Tatsache erklärt viele interessante Erscheinungen (z. B. den radioaktiven Zerfall nach der Theorie von GAMOW usw.).

Unsere bisherigen Betrachtungen haben sich hauptsächlich auf die Funktion f bezogen. Ganz analoge Resultate können wir für eine in der Einfallsebene polarisierten Welle, deren elektrischer Vektor senkrecht zu dieser Ebene schwingt und deren Vektor mit g bezeichnet wurde, herleiten. Wenn wir in den Gleichungen (107) annehmen, daß nur $g \neq 0$ ist, und analog zu Gleichung (111) die Funktion

$$g(t, x) = B e^{i\omega} = B(\cos\omega + i\sin\omega) \tag{129}$$

einführen, in welche wir den Wert von ω aus Gleichung (112) einsetzen, so erhalten wir im ersten Medium folgendes Gleichungssystem:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{E}_x = 0, & \mathfrak{H}_x = 0, \\ \mathfrak{E}_y = 0, & \mathfrak{H}_y = -B\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{q}\right), \\ \mathfrak{E}_z = \frac{B}{\sqrt{\varepsilon}}\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{q}\right), & \mathfrak{H}_z = 0. \end{array}\right\} \quad (130)$$

Analog zu Gleichung (120) führen wir den Ausdruck

$$\frac{\varphi\sin\vartheta}{\cos\vartheta\,\sin\vartheta_1} = \operatorname{tg}\frac{\tau}{2} \quad (131)$$

ein. τ kann selbstverständlich nur die Werte zwischen Null und π annehmen. Setzen wir in Gleichung (84) für σ_1 Gleichung (118) ein, so folgt analog zu Gleichung (121)

$$\sigma_1 = 2n\cos\frac{\tau}{2}\,e^{i\frac{\tau}{2}}. \quad (132)$$

Die Komponenten der Feldstärken des gebrochenen Lichtes werden dann unter Berücksichtigung der Gleichungen (129), (132) und (112)

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{E}_\xi = 0, \quad \mathfrak{H}_\xi = B\sin\vartheta\cdot 2\cos\frac{\tau}{2}\,e^{-\frac{2\pi\varphi\xi}{Tq_1}}\cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{\eta\sin\vartheta_1}{q_1}\right)+\frac{\tau}{2}\right\}, \\ \mathfrak{E}_\eta = 0, \quad \mathfrak{H}_\eta = -Bn\varphi\,2\cos\frac{\tau}{2}\,e^{-\frac{2\pi\varphi\xi}{Tq_1}}\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{\eta\sin\vartheta_1}{q_1}\right)+\frac{\tau}{2}\right\}, \\ \mathfrak{E}_\zeta = \frac{B}{\sqrt{\varepsilon}}\,2\cos\frac{\tau}{2}\,e^{-\frac{2\pi\varphi\xi}{Tq_1}}\cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{\eta\sin\vartheta_1}{q_1}\right)+\frac{\tau}{2}\right\}, \quad \mathfrak{H}_\zeta = 0. \end{array}\right\} \quad (133)$$

Die Untersuchung unseres Gleichungssystems (133) führt zu ganz ähnlichen Resultaten wie die Besprechung des von der Funktion f herrührenden Gleichungssystems (128), nur wird der bei der Brechung auftretende Phasensprung verschieden sein, und zwar ist nach den Gleichungen (120) und (131) im allgemeinen $\delta > \tau$.

Unsere Gleichungen (114) und (130) enthalten eigentlich den allgemeinsten Fall. Da der Anfang der Zeitrechnung ganz willkürlich ist, können wir bei beiden Lösungen eine beliebige Phasendifferenz einschalten. Unsere Differentialgleichungen sind linear, so daß wir für eine Summe von Funktionen, die alle vom Typ unserer Funktionen f und g sind und die beliebige Amplituden, Frequenzen und Phasen besitzen, die Lösung unmittelbar angeben können. Damit ist das Problem auch für den ganz allgemeinen Fall gelöst, weil wir ja jede in der Zeit periodische Funktion nach der Fourierschen Methode als eine Summe elementarer periodischer Funktionen darstellen können.

Für den Fall der Totalreflexion können wir noch die Gleichung des reflektierten Strahles herleiten. Die Gleichung der Wellennormale

$$x' = -\xi\cos\vartheta + \eta\sin\vartheta \quad (134)$$

ist in diesem Fall wieder reell. Für μ erhalten wir aus den Gleichungen (83), (117) und (118) einen komplexen Wert:

$$\mu = e^{i\delta}. \tag{135}$$

Auf diesem Wege bekommen wir aus den Gleichungen (110) für die Feldstärken im reflektierten Strahl, wenn der einfallende Strahl nur die Wellenfunktion f enthält:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{E}_{x'} = 0, && \mathfrak{H}_{x'} = 0, \\ &\mathfrak{E}_{y'} = A\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x'}{q}\right) + \delta\right\}, && \mathfrak{H}_{y'} = 0, \\ &\mathfrak{E}_{z'} = 0, && \mathfrak{H}_{z'} = A\cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x'}{q}\right) + \delta\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{136}$$

Für das reflektierte Licht ist charakteristisch, daß es dieselbe Amplitude wie das einfallende Licht besitzt. Seine Phase ist im Gegensatz zur gewöhnlichen Lichtreflexion um den Winkel δ verschoben. Dieser Phasenwinkel verschwindet nach Gleichung (117) bei dem Grenzwinkel der Totalreflexion, da dann $\sin\vartheta = n$ ist. $\cos\vartheta_1$ und φ werden Null, μ ist also reell. Mit zunehmendem Einfallswinkel nimmt δ zu, bis es bei streifendem Einfall $\left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$ den Wert π erreicht.

Der von der Funktion g herrührende Anteil des einfallenden Lichtes verursacht folgende reflektierte Welle:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{E}_{x'} = 0, && \mathfrak{H}_{x'} = 0, \\ &\mathfrak{E}_{y'} = 0, && \mathfrak{H}_{y'} = -B\cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x'}{q}\right) + \tau\right\}, \\ &\mathfrak{E}_{z'} = \frac{B}{\sqrt{\varepsilon}}\cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x'}{q}\right) + \tau\right\}, && \mathfrak{H}_{z'} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{137}$$

Alle diese Gleichungen erhalten wir aus den Gleichungen (110), wenn wir dort die Werte von g und σ einsetzen.

INTERFERENZ UND POLARISATION

§ 12. Die bei einer planparallelen Platte auftretenden Interferenzerscheinungen

In unseren sich auf die elektromagnetische Lichttheorie beziehenden bisherigen Besprechungen haben wir bezüglich der tatsächlichen mathematischen Form unserer Funktionen f und g keine Annahmen einführen müssen. Nur die Tatsache war zu berücksichtigen, daß f und g Funktionen des Argumentes $t - \frac{x}{q}$ sind. Daran ändert die bei der Besprechung der Totalreflexion angewandte Methode nichts, weil man jede Funktion – wenn auch mit Einschränkungen – in eine Fouriersche Reihe entwickeln kann. Daß man eine Funktion als eine

Summe von einfachen harmonischen Funktionen darstellen kann, gibt noch keinen Anhalt für die eigentliche Natur der Funktion. Im § 4 haben wir erwähnt, daß eine homogene Lichterscheinung durch eine einfache harmonische Funktion beschrieben werden kann. Es ist jetzt unser Ziel, diese Folgerung in eine mathematisch strengere Form zu bringen. Zu diesem Zwecke betrachten wir eine durchsichtige planparallele Platte, die vom Licht durchdrungen wird. Wegen der auftretenden Lichtbrechung wird der einfallende Strahl verschoben (vgl. Abb. 12). Der gebrochene Strahl wird bei Erreichen der hinteren Grenzfläche nicht nur gebrochen, sondern auch partiell reflektiert. Dieser reflektierte Teil wird dann bei Erreichen der vorderen Grenzfläche von neuem reflektiert usw., so daß ein zu dem ursprünglich durchgelassenen Lichtbündel paralleles, jedoch im Verhältnis zu ihm verschobenes Lichtbündel entsteht. Alle diese Strahlen werden miteinander interferieren. Nehmen wir zuerst an, daß der Vektor der einfallenden Welle die Form

$$F(t, x) = F\left(t - \frac{x}{q}\right) \tag{138}$$

besitzt und daß in der noch unbekannten Funktion die Veränderlichen nur in der Kombination $t - \frac{x}{q}$ vorkommen. Diese Welle soll in einem mit A bezeichneten Punkt der planparallelen Platte einfallen, wo sie teilweise, multipliziert mit dem Faktor μ_1, in die Platte eindringt und teilweise (multipliziert mit dem Faktor μ) als reflektierte Welle in die Luft zurückkehrt. Der gebrochene Strahl wird an der gegenüberliegenden Seite der Platte bei Erreichen des mit B bezeichneten Punktes wieder in zwei Teile aufspalten: Der eine Teil, den wir durch Multiplikation mit μ_1' erhalten, tritt in die Luft hinaus, der andere (Multiplikation mit dem Faktor μ') wird in das Material der Platte reflektiert. Diese Erscheinung geht so weiter, bis die gesamte Energie des Strahles aufgebraucht ist. Im Endresultat rührt der auf der einen wie der auf der anderen Seite der Platte erscheinende Lichtstrahl von unendlich vielen Komponenten her. Berechnen wir zunächst die Intensität des an der gegenüberliegenden Seite der Platte austretenden Lichtstrahles. Wir bezeichnen mit d die Strecke, welche der Lichtstrahl in der Platte von der einen Grenzfläche bis zur gegenüberliegenden zurückgelegt hat, und mit r_1 den Weg, den der Strahl nach seinem Austritt aus der Platte in der Luft bis zu einer willkürlichen, jedoch zu seiner Richtung senkrecht stehenden Ebene zurücklegt. Dann wird nach den obigen Bezeichnungen der Vektor des Lichtstrahles bei Erreichen der Ebene durch folgenden Ausdruck gegeben sein:

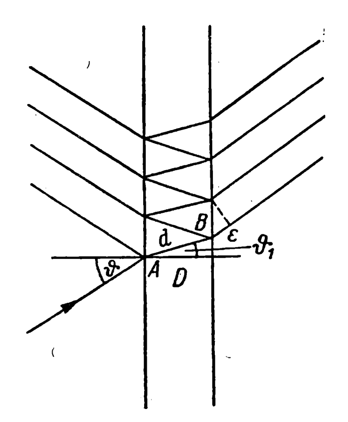


Abb. 12. Entstehung der „Kurven gleicher Neigung“ genannten Interferenzerscheinung

$$\mu_1 \mu_1' F\left(t - \frac{x}{v} - \frac{d}{v_1} - \frac{r_1}{v}\right), \tag{139}$$

wobei v die Lichtgeschwindigkeit in der Luft und v_1 die im Material der Platte bedeuten. Für den Vektor der zweiten Komponente, die innerhalb der Platte zweimal reflektiert wurde, erhalten wir

$$\mu_1 \mu'^2 \mu_1' F\left(t - \frac{x}{v} - \frac{3d}{v_1} - \frac{r_2}{v}\right). \tag{140}$$

Ebenso erhalten wir die Wellenfunktionen aller anderen innerhalb der Platte noch öfter reflektierten Komponenten. Die Wellenfunktion des ganzen von der Platte durchgelassenen Lichtstrahles ist dann

$$F_s = \sum_{p=0}^{\infty} \mu_1 (\mu')^{2p} \mu_1' F\left(t - \frac{x}{v} - \frac{(2p+1)d}{v_1} - \frac{r_{p+1}}{v}\right). \tag{141}$$

Da nach den Gleichungen (83) und (84)

$$\mu_1 = 1 + \mu, \quad \text{also} \quad \mu_1' = 1 - \mu \tag{142}$$

ist, weil selbstverständlich

$$\mu' = -\mu \tag{143}$$

sein muß, so können wir durch Einsetzen dieser Zusammenhänge in Gleichung (141) alle dort auftretenden Koeffizienten auf einen einzigen reduzieren. Die Einführung des Brechungsindex in Gleichung (141) ergibt im Argument einen gemeinsamen Nenner. Wir können den Ausdruck

$$-\frac{x + (2p+1)d \cdot n + r_{p+1}}{v} \tag{144}$$

in Gleichung (141) statt der dort stehenden Summe der einzelnen Brüche einsetzen. Weiter lassen sich die Größen r_{p+1} alle auf die erste zurückführen, weil der Unterschied der aufeinanderfolgenden Längen (vgl. die Abb. 12) immer derselbe ist:

$$\left.\begin{aligned} r_1 - r_2 &= \varepsilon, \\ r_1 - r_3 &= 2\varepsilon, \\ &\vdots \\ r_1 - r_{p+1} &= p\varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{145}$$

Außerdem müssen, wie das aus unserer Abbildung leicht ersichtlich ist, folgende Zusammenhänge bestehen:

$$d = \frac{D}{\cos\vartheta_1}, \tag{146}$$

wobei D die Dicke der Platte bedeutet, und

$$\varepsilon = 2d \sin\vartheta_1 \sin\vartheta, \tag{147}$$

wobei ϑ der Einfallswinkel und ϑ_1 der Brechungswinkel sind. Aus den Gleichungen (146) und (147) folgt

$$\varepsilon = 2D \operatorname{tg}\vartheta_1 \sin\vartheta. \tag{148}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise bezeichnen wir jetzt im Argument von F die von p unabhängigen Glieder mit a und die mit p multiplizierten mit b:

$$a = t - \frac{x + d \cdot n + r_1}{v} \tag{149}$$

und

$$b \cdot p = \frac{2d \cdot n - \varepsilon}{v} p. \tag{150}$$

Gleichung (141) läßt sich dann unter Berücksichtigung der Gleichungen (142), (143), (149) und (150) schreiben:

$$F_s = \sum_{p=0}^{\infty} (1 - \mu^2)\, \mu^{2p} F\,(a - pb). \tag{151}$$

Die Summation ist nur dann tatsächlich durchführbar, wenn die mathematische Form der Funktion F bekannt ist. Wir wissen, daß man mit nur ganz geringen Einschränkungen, welche bezüglich eines physikalischen Problems ganz uninteressant sind, jede Funktion in eine FOURIERsche Reihe entwickeln kann; wir wollen hier jedoch einstweilen nur ein Glied dieser Reihe berücksichtigen und untersuchen, ob man mittels eines Gliedes die bei einem monochromatischen Strahl beobachteten Interferenzerscheinungen vollständig beschreiben kann. Es ist zweckmäßig, die einfache harmonische Funktion in der komplexen Form zu schreiben, da das Rechnen mit exponentiellen Funktionen meist leichter ist:

$$F\left(t - \frac{x}{v}\right) = A\, e^{i\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)}. \tag{152}$$

Gleichung (151) geht dann in den folgenden Ausdruck über:

$$F_s = A \sum_{p=0}^{\infty} (1 - \mu^2)\, \mu^{2p} e^{i\omega(a - pb)}. \tag{153}$$

Dies ist eine unendliche geometrische Reihe, deren erstes Glied

$$(1 - \mu^2)\, e^{i\omega a} \tag{154}$$

und deren konstanter Faktor

$$\mu^2 e^{-i\omega b} \tag{155}$$

sind. Die Summe dieser Reihe ist

$$F_s = A\, \frac{(1 - \mu^2)\, e^{i\omega a}}{1 - \mu^2\, e^{-i\omega b}}. \tag{156}$$

Auf Grund der Ausführungen bei der Besprechung der Lehre der Lichtvektoren erhält man aus Gleichung (156) das Quadrat der Amplitude einfach dadurch, daß man Gleichung (156) mit seinem konjugiert komplexen Wert multipliziert. Wenn wir die gesuchte Amplitude mit A_s bezeichnen, so folgt

$$A_s^2 = A^2\, \frac{(1 - \mu^2)\, e^{i\omega a}}{1 - \mu^2\, e^{-i\omega b}} \cdot \frac{(1 - \mu^2)\, e^{-i\omega a}}{1 - \mu^2\, e^{i\omega b}}, \tag{157}$$

also

$$A_s^2 = A^2 \frac{(1-\mu^2)^2}{1 - 2\mu^2 \cos \omega b + \mu^4}. \tag{158}$$

Da die Intensität des Lichtes dem Quadrat der Amplitude proportional ist, so ergibt sich für die Intensität des an der gegenüberliegenden Seite austretenden Lichtstrahles

$$I_s = I \frac{(1-\mu^2)^2}{1 - 2\mu^2 \cos \omega b + \mu^4}. \tag{159}$$

I ist die Intensität des einfallenden Lichtstrahles. Da nach den Gleichungen (150), (147), (146) und dem Gesetz der Lichtbrechung

$$b = \frac{2nD\cos\vartheta_1}{v} = \frac{2D}{v_1}\cos\vartheta_1, \tag{160}$$

also auch

$$\omega b = \frac{4\pi D}{\lambda_1}\cos\vartheta_1 \tag{161}$$

ist, läßt sich Gleichung (159) umschreiben:

$$I_s = I \frac{(1-\mu^2)^2}{1 - 2\mu^2 \cos\left(\frac{4\pi D}{\lambda_1}\cos\vartheta_1\right) + \mu^4}, \tag{162}$$

wobei λ_1 die Wellenlänge des Lichtes im Material der Platte bedeutet. Maxima treten dann auf, wenn das Argument der Kosinusfunktion ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist:

$$\frac{4\pi D}{\lambda_1}\cos\vartheta_1 = 2\pi l \tag{163}$$

oder

$$\frac{2D}{\lambda_1}\cos\vartheta_1 = l \quad (l = \text{ganze Zahl}). \tag{164}$$

Dann ist $I_s = I$. Zwischen diesen Maxima liegen Minima der Intensität, welche auftreten, wenn im Nenner das Argument des Kosinus ein ungeradzahliges Vielfaches von π ist:

$$\frac{4\pi D}{\lambda_1}\cos\vartheta_1 = \left(l + \frac{1}{2}\right) 2\pi. \tag{165}$$

Die Intensität beträgt dann nur

$$I_s = I\left(\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}\right)^2. \tag{166}$$

Der Unterschied zwischen den Maxima und Minima der Intensität wird um so deutlicher sein, je mehr sich der Wert von μ dem Wert Eins nähert, d.h. nach Gleichung (83), je größer der Einfallswinkel ist.

Ebenso können wir die Intensität des auf die Seite des einfallenden Strahles zurückreflektierten Lichtes berechnen. Es ist jedoch einfacher, unter Berück-

sichtigung der Annahme, daß die Platte das Licht nicht absorbiert, zu diesem Zweck die Differenz von I und I_s zu bilden:

$$I_r = I - I_s = I \frac{4\mu^2 \sin^2\left(\frac{2\pi D}{\lambda_1}\cos\vartheta_1\right)}{1 - 2\mu^2\cos\left(\frac{4\pi D}{\lambda_1}\cos\vartheta_1\right) + \mu^4}. \tag{167}$$

Bis jetzt haben wir nur den Fall besprochen, in dem der elektrische Vektor des einfallenden Lichtes in der Einfallsebene liegt. Die Rechnungen erfolgen ganz analog, wenn der elektrische Vektor des einfallenden Lichtes senkrecht zur Einfallsebene orientiert ist. In die Gleichungen (162), (166) und (167) müssen wir dann statt μ den Koeffizienten σ einsetzen:

$$I_s' = I' \frac{(1-\sigma^2)^2}{1 - 2\sigma^2\cos\left(\frac{4\pi D}{\lambda_1}\cos\vartheta_1\right) + \sigma^4} \tag{168}$$

und

$$I_r' = I' \frac{4\sigma^2 \sin^2\left(\frac{2\pi D}{\lambda_1}\cos\vartheta_1\right)}{1 - 2\sigma^2\cos\left(\frac{4\pi D}{\lambda_1}\cos\vartheta_1\right) + \sigma^4}. \tag{169}$$

Diese Formeln hat zuerst Airy im Jahre 1833 hergeleitet. Wir fügen hinzu, daß es nicht möglich ist, diese Gleichungen für natürliches Licht auf analogem Wege herzuleiten, weil sich dessen Zusammensetzung bei jeder Brechung und Reflexion ändert. Das Licht wird nicht einmal mehr nach der ersten Brechung natürlich sein. Deshalb kann man unsere Formeln nur für die zwei Komponenten gesondert angeben. Demgegenüber können wir den für natürliches Licht gemessenen Reflexionskoeffizienten nicht einfach in unsere Formeln (162) und (167) bzw. (168) und (169) für μ^2 bzw. σ^2 einsetzen. Dies Verfahren wäre theoretisch nicht ganz einwandfrei.

Es ist von Bedeutung, daß die hier auftretenden Maxima sehr scharf sind. Dies läßt sich leicht einsehen, wenn wir bedenken, daß z. B. in Gleichung (162) im mittleren Glied des Nenners das Argument des Kosinus und demzufolge auch l in Gleichung (164) eine sehr große Zahl ist, da D eine makroskopische Länge ist, λ dagegen nur eine Wellenlänge. Die Lichtintensität ändert sich deshalb mit dem Winkel ϑ_1 oder ϑ außerordentlich schnell. Da das Licht selbstverständlich nicht aus streng parallelen Strahlen oder, anders ausgedrückt, aus einem einzigen System von vollkommen parallelen Wellennormalen bestehen kann, sondern immer eine kleine Streuung um den Winkel ϑ auftreten wird, so werden auf dem Schirm zahlreiche Maxima und Minima von I_s nebeneinander sichtbar sein. Selbstverständlich beziehen sich diese Betrachtungen nur auf den unendlich entfernten Schirm. Wir müssen die Erscheinung mit einem auf Unendlich eingestellten Fernrohr betrachten.

Die hier besprochenen Interferenzerscheinungen nannte Lummer Streifen gleicher Neigung. Bei sehr dünnen Plättchen beobachten wir noch eine andere Art von Interferenzerscheinungen. In diesem Falle verursacht die Ände-

rung der Plattendicke helle und dunkle Streifen. Dies sind nach der Bezeichnung von LUMMER Streifen gleicher Dicke. Diese Interferenzerscheinungen entstehen ganz analog wie die vorher besprochenen, jedoch im Endlichen und nur im Falle von sehr dünnen Plättchen, weil bei dickeren Platten die auf diesem Wege entstandenen Interferenzerscheinungen sich so stark superponieren, daß sie nicht erkennbar werden. Ein sehr schönes Beispiel für die Kurven gleicher Dicke sind die NEWTONschen Farbenringe. Wenn wir eine plankonvexe Linse

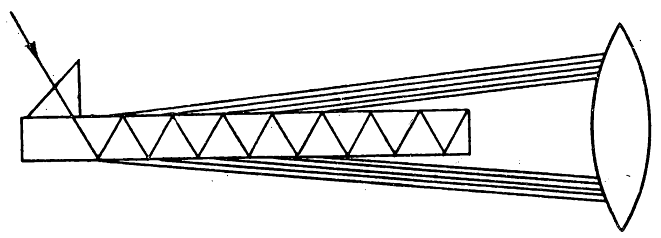


Abb. 13. LUMMER-GEHRCKE-Platte

von sehr großem Krümmungsradius mit ihrer konvexen Seite auf eine Glasplatte legen, so entsteht zwischen ihr und der Glasplatte eine sehr dünne und in ihrer Dicke nur langsam zunehmende Luftschicht. Fällt jetzt von oben ein paralleles Lichtbündel ein, so sehen wir im durchgehenden Licht dunkle und helle ringförmige Streifen mit einer hellen Mitte. Im reflektierten Licht sehen wir die komplementäre Erscheinung mit dunkler Mitte. Wenn wir nicht monochromatisches, sondern weißes Licht benutzen, so werden die Ringe farbig sein, weil die Maxima und Minima bei verschiedenen Wellenlängen nicht an denselben Stellen auftreten werden. Allgemein beruhen die Interferenzfarben der dünnen Plättchen (wie z. B. die der Seifenblasen) auf dem Prinzip der Kurven gleicher Dicke.

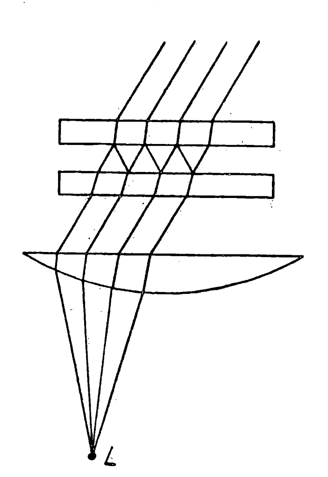


Abb. 14. Prinzip des Interferometers von PEROT und FABRY

Kurven gleicher Neigung entstehen auch bei der LUMMER-GEHRCKE-Platte (Abb. 13). Im wesentlichen ist diese Platte eine planparallele Glasplatte, auf die das Licht nahezu streifend einfällt, um möglichst viele innere Reflexionen zu erhalten. Da die erste Reflexion an der Grenzfläche der Platte mit einem sehr großen Lichtverlust verbunden wäre, so ist am Orte des Eintritts des Lichtstrahles ein kleines Glasprisma angekittet, auf dessen Hypotenusengrenzfläche das Licht dann nahezu senkrecht einfällt.

Das PEROT-FABRYsche Interferometer beruht auf demselben Prinzip. Zwischen zwei dünnen planparallelen Glasplatten befindet sich eine Luftschicht (Abb. 14). Die einander

zugekehrten Seiten der Platten sind durchscheinend versilbert, damit sie das Licht stärker reflektieren und das Licht erst nach vielen Reflexionen die Luftschicht verläßt. Bei beiden Interferometern können wir die auftretenden parallelen Strahlenbündel mit Hilfe einer Linse auf einem Schirm konzentrieren.

Demgegenüber interferieren im Interferenzrefraktor von JAMIN und im MICHELSON-MORLEYschen Interferometer nur zwei Strahlen.

§ 13. Die Kohärenz

Es seien zwei Lichtstrahlen gleicher Frequenz gegeben, deren elektrische Vektoren in derselben Richtung schwingen und deren Wellennormalen ebenfalls zueinander parallel sind. Wir kennzeichnen diese Lichtstrahlen durch die Funktionen $f_1\left(t - \frac{x}{v}\right)$ und $f_2\left(t - \frac{x}{v}\right)$. Beide Vektoren setzen sich zu einem Vektor der Größe

$$F = f_1 + f_2 \tag{170}$$

zusammen. Daraus folgt, daß die Intensität des resultierenden Lichtstrahls

$$I = \overline{F^2} = \overline{f_1^2} + \overline{f_2^2} + 2\overline{f_1 f_2} \tag{171}$$

ist. Wenn wir die zu den einzelnen Vektorkomponenten gehörenden Intensitäten einführen, gilt

$$I = I_1 + I_2 + 2\overline{f_1 f_2}. \tag{172}$$

Die Intensität des resultierenden Lichtstrahls ist im allgemeinen nicht die algebraische Summe der Intensitäten der zwei Komponenten. Eigentlich nennen wir diese Erscheinung „Interferenz". In gewissen Fällen kommt jedoch diese Interferenz nicht zustande, z. B. dann, wenn die zwei Komponenten von zwei verschiedenen Lichtquellen herrühren; dann ist

$$\overline{f_1 f_2} = 0. \tag{173}$$

Wir sagen, daß die zwei Lichtstrahlen inkohärent sind. Die Intensitäten dieser Lichtstrahlen addieren sich also einfach. Interferenz gibt es zwischen ihnen nicht. Wenn die zwei Lichtstrahlen kohärent sind – also von derselben Lichtquelle herrühren – und außerdem zwischen ihnen kein allzu großer Wegunterschied auftritt, dann kann der Mittelwert $\overline{f_1 f_2}$ sehr verschiedene Werte annehmen, je nach dem, wie groß der Gangunterschied der Lichtstrahlen ist. Im nächsten Paragraphen wird es unser Ziel sein, diese Werte zu berechnen.

Auch im Falle von kohärentem Licht gibt es dafür Beispiele, daß man die Intensitäten nur einfach zu addieren hat. Scheinbar ist also keine Interferenz vorhanden. Dieser Fall entsteht z. B. dann, wenn Gasatome das Licht streuen. Die gewöhnliche Lichtstreuung liefert kohärentes Licht (die RAMANstreuung nicht mehr). Da jedoch die Gasatome ganz regellos verteilt sind, so werden sich die Mittelwerte $\overline{f_1 f_2}$, wenn wir diese für alle auftretenden Paare addieren, gerade

herausmitteln, weil das positive und negative Vorzeichen mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten wird. Deshalb liefert die gestreute Intensität die Summe der von allen Gasatomen gestreuten Intensitäten (und nicht das Quadrat der Summe der Vektoren), ungeachtet dessen, daß diese Strahlen kohärent sind. Bei der Lichtstreuung eines Kristallgitters, in dem die Atome ein geordnetes Gitter aufbauen, treten gerade die entgegengesetzten Verhältnisse auf.

§ 14. Interferenz von zwei parallelen und kohärenten Lichtstrahlen

Es seien die Vektoren der zwei Lichtstrahlen, welche dieselbe Frequenz besitzen

$$F_1 = a_1 \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right) + \delta_1\right] \tag{174}$$

und

$$F_2 = a_2 \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right) + \delta_2\right]. \tag{175}$$

Da der Anfangspunkt der Zeit wie der Nullpunkt der Koordinate x ganz willkürlich sind, können wir von den zwei in Gleichung (174) und Gleichung (175) stehenden Phasenkonstanten eine eliminieren. Ohne jede Beschränkung der Allgemeinheit genügt es, nur eine der Gleichungen (174) und (175) mit einer Phasenkonstante zu versehen.

Wir nehmen an, daß wir die Summe F_1 und F_2 folgendermaßen darstellen können:

$$F_1 + F_2 = F = a \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right) + \delta\right]. \tag{176}$$

Zur Rechtfertigung unserer Behauptung zerlegen wir die Kosinusfunktionen in allen drei Fällen nach der elementaren Regel des Kosinus der Summe zweier Winkel:

$$\begin{aligned} &a_1 \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right)\cos\delta_1 - a_1 \sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right)\sin\delta_1 \\ &+ a_2 \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right)\cos\delta_2 - a_2 \sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right)\sin\delta_2 \\ &= a \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right)\cos\delta - a \sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right)\sin\delta. \end{aligned} \tag{177}$$

Da sich die Werte der zeitabhängigen Sinus- und Kosinusfunktionen ständig ändern, kann die obige Gleichung nur dann bestehen, wenn die Koeffizienten von $\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right)$ und $\sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right)$ einzeln verschwinden:

$$\left.\begin{aligned} a\cos\delta &= a_1\cos\delta_1 + a_2\cos\delta_2, \\ a\sin\delta &= a_1\sin\delta_1 + a_2\sin\delta_2. \end{aligned}\right\} \tag{178}$$

Addieren wir die Quadrate dieser Gleichungen, so erhalten wir die Amplitude des resultierenden Lichtvektors:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2\,a_1 a_2 \cos(\delta_1 - \delta_2). \tag{179}$$

Da wir jetzt a kennen, können wir den Winkel δ aus einer der Gleichungen (178) berechnen. Häufig kommt es vor, daß die Interferenz zweier Strahlen zu berechnen ist, wenn die einzelnen Strahlen verschiedene Strecken zurückgelegt haben. Statt der Gleichung (174) und (175) erhalten wir die analytischen Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= a_1 \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x+d}{v}\right), \\ F_2 &= a_2 \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right). \end{aligned}\right\} \tag{180}$$

In diesem Fall wird die Größe $\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{d}{v} = \frac{2\pi d}{\lambda}$ gleich δ_1, und δ_2 ist gleich Null. Setzen wir diese Werte in die Gleichungen (178) und (179) ein, so ist damit das Problem gelöst. Bei dispergierenden Medien müssen wir bedenken, daß dort λ nicht die Vakuumwellenlänge, sondern die Wellenlänge im Medium bedeutet.

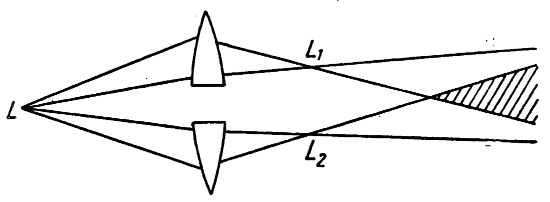


Abb. 15. Halblinsen von BILETT

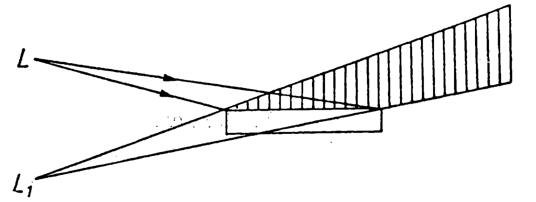


Abb. 16. LLOYDscher Spiegelversuch

Das bekannte FRESNELsche Biprisma, der FRESNELsche Doppelspiegel, die Halblinsen von BILETT, der LLOYDsche Spiegelversuch, das MICHELSON-MORLEYsche Interferometer, der JAMINsche Interferenzrefraktor usw. beruhen ihrem Wesen nach alle auf den in diesem Paragraphen besprochenen Interferenzerscheinungen.

Bei der Anordnung von BILETT ist eine Sammellinse in zwei gleich große Teile zerlegt. Diese zwei Teile werden voneinander ein wenig verschoben (vgl. Abb. 15). Diese beiden Halblinsen bilden die Lichtquelle in zwei Bildpunkte (L_1 und L_2) ab und verursachen im schraffierten Teil der Abbildung Interferenzerscheinungen.

Bei dem LLOYDschen Spiegelversuch fällt der von einer Lichtquelle kommende Strahl fast streifend auf eine Spiegelfläche. Der reflektierte und der ursprüngliche Strahl interferieren dann miteinander (Abb. 16).

Beim MICHELSON-MORLEYschen Interferometer wird der einfallende Strahl durch eine versilberte Glasplatte, die einen Winkel von 45° mit dem einfallen-

den Lichtstrahl bildet, in zwei Teilstrahlen zerlegt (Abb. 17). Der durch die Platte hindurchgehende Strahl gelangt nach der senkrechten Reflexion am Spiegel S_2 und der Reflexion an der Glasplatte in das Fernrohr T. Der an dem spiegelnden Überzug der hinteren Grenzfläche der Platte reflektierte andere Strahl erreicht den Spiegel S_1, wird dort reflektiert und erreicht nach dem Durchgang durch die Platte ebenfalls das Fernrohr T. Die Strahlen interferieren miteinander im Fernrohr T. Ein großer Vorteil des Interferometers von MICHELSON und MORLEY besteht darin, daß man durch Änderung der Abstände der Spiegel be-

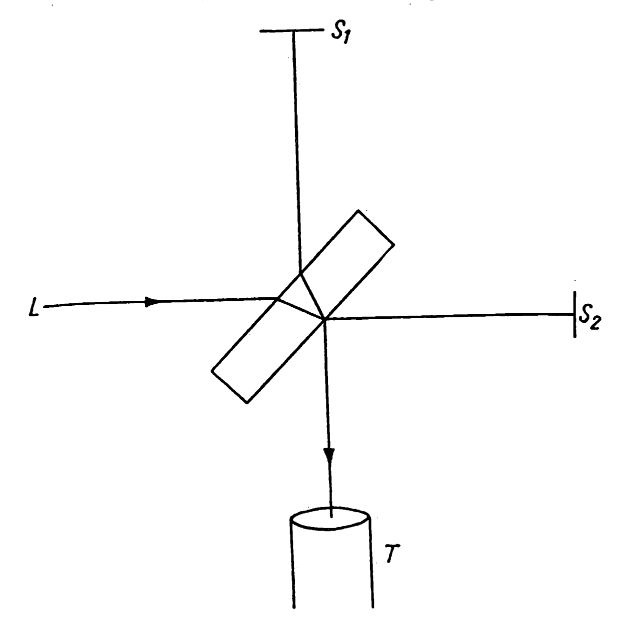


Abb. 17. MICHELSONscher Interferometer

liebige und recht große Wegunterschiede einschalten kann. Oft schaltet man noch zwischen Spiegel S_2 und Platte eine kompensierende Glasplatte ein, um den Unterschied auszugleichen, da der am Spiegel S_2 reflektierte Strahl nur einmal durch die um 45° geneigte mittlere Platte gegangen ist, der am Spiegel S_1 reflektierte dagegen dreimal.

Im JAMINschen Interferenzrefraktor sind zwei dicke planparallele Platten parallel zueinander angeordnet (Abb. 18). Der einfallende Strahl wird von der ersten Platte durch Reflexion und Brechung in zwei Teilstrahlen zerlegt, von denen sich der erste unmittelbar in Richtung der zweiten Platte ausbreitet. Der gebrochene Strahl breitet sich nach Reflexion an der hinteren Grenzfläche der Platte ebenfalls in dieser Richtung aus. Die zweite Platte vereinigt die zwei Teilstrahlen wieder in einen Strahl, wobei Interferenzerscheinungen auftreten. Im Interferenzrefraktor von JAMIN breiten sich die Teilstrahlen – weil dicke

Glasplatten benutzt werden – in einer größeren Entfernung voneinander aus. Man kann deshalb in den Weg des einen Strahles eine Substanz von unbekanntem Brechungsindex einschalten. Die Interferenzstreifen verschieben sich dann. Daraus kann man den Brechungsindex der Substanz nach bekannten Methoden berechnen. Wir müssen noch die Frage beantworten, weshalb keine Interferenzerscheinungen auftreten, wenn beide Strahlen nicht von derselben Lichtquelle herrühren, da ja das Theorem der Addition der Vektoren auch in diesem Fall in jedem Zeitpunkte richtig sein muß. Das ist auch tatsächlich der Fall. Ein wesentlicher Unterschied liegt jedoch im folgenden: Eine Lichtquelle wird im allgemeinen eine Serie von Wellen nicht so emittieren, daß δ_1 konstant sein wird. Diese Serie wird bald abreißen, und an ihre Stelle tritt eine andere, die jedoch einen ganz anderen, mit dem früheren nicht zusammenhängenden Wert von δ besitzen wird. Wenn beide Strahlen von derselben Lichtquelle herrühren,

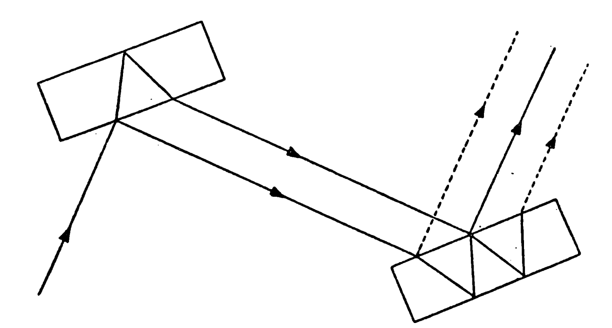


Abb. 18. JAMINscher Interferenzrefraktor

so verursacht das keine Störung der Interferenzerscheinungen, weil in Gleichung (179) nur die Differenz $\delta_1 - \delta_2$ steht. Die Differenz $\delta_1 - \delta_2$ ist davon unabhängig, ob die Lichtquelle eine neue Wellenserie emittiert, da ja diese Differenz nur von dem Unterschied der zurückgelegten Lichtwege abhängt, wie das z. B. aus Gleichung (180), nach der $\delta_1 - \delta_2 = 2\pi d/\lambda$ ist, klar erkannt werden kann. Wenn die zwei Lichtstrahlen von zwei verschiedenen Lichtquellen herrühren, dann ändern sich δ_1 und δ_2 in den Gleichungen (174) und (175) im Verhältnis zueinander ganz regellos, ihre Differenz nimmt während einer sehr kurzen Zeit alle möglichen Werte an. Das bedeutet, daß sich das dritte Glied auf der rechten Seite von Gleichung (179) herausmittelt, d. h., daß die Intensität des resultierenden Strahles (die dem Quadrat der Amplitude proportional ist) die algebraische Summe der Intensitäten der zusammensetzenden Strahlen ist. Es tritt also keine Interferenz auf. Aus demselben Grunde gibt es keine Interferenz bei sehr großen Gangunterschieden, auch dann nicht, wenn beide Strahlen von derselben Strahlungsquelle herrühren. In diesem Falle muß man nämlich Vektoren von Wellenserien addieren, die von der Lichtquelle in verschiedenen Zeitpunkten emittiert wurden, so daß kaum noch ein Zusammenhang zwischen den Phasenkonstanten bestehen könnte. Im allgemeinen gelingt es

noch, bei einem Wegunterschied von 1 oder $1^1/_2$ m Interferenzen zu erzeugen. Wenn wir annehmen, daß nach der klassischen Theorie eine Lichtquelle tatsächlich kohärente Wellenzüge von dieser Länge emittiert, so können wir einsehen, daß unser Auge tatsächlich imstande wäre, die Interferenz zweier Strahlen, die von verschiedenen Lichtquellen herrühren, zu beobachten, wenn es fähig wäre, das zu sehen, was während der Zeit geschieht, in der eine Lichtquelle einen Wellenzug von der Länge von etwa 1 m emittiert. Selbstverständlich ist dies ganz unmöglich, da ja während einer Sekunde ein Wellenzug von 300000 km Länge entsteht. Die Quantenmechanik stellte das Problem der Kohärenz in ein ganz neues Licht, doch wollen wir hier auf diese Frage nicht näher eingehen.

§ 15. Die Interferenz von zwei zueinander senkrecht schwingenden kohärenten Lichtstrahlen

Dieses Problem haben wir bei der Besprechung der Grundlagen der Theorie der Lichtvektoren im § 5 ausführlich dargestellt [siehe dort Gleichungen (13) und (14)]. Solche Probleme entstehen z. B. dann, wenn wir einen linear polarisierten Vektor in einem ebenen Koordinatensystem, dessen Achsen mit ihm schiefe Winkel einschließen, in zwei Komponenten zerlegen. Nachdem die eine Komponente einen größeren Lichtweg zurückgelegt hat, läßt man beide Komponenten interferieren. In der Natur entsteht z. B. diese Erscheinung dann, wenn linear polarisiertes Licht auf eine doppelbrechende Kristallplatte einfällt. Hierbei wird das einfallende linear polarisierte Licht in einen ordentlichen und einen außerordentlichen Strahl aufgespalten, deren Ausbreitungsgeschwindigkeiten in der Platte verschieden sind. Diese Strahlen erreichen mit einer gewissen Phasendifferenz, welche einem Wegunterschied gleichwertig ist, die gegenüberliegende Grenzfläche der Kristallplatte. Auf diesem Wege können wir ganz nach Belieben zirkular oder elliptisch polarisiertes Licht herstellen. Einige Kristalle drehen ebenfalls die Polarisationsebene des Lichtes, wenn sich der Lichtstrahl parallel zur optischen Achse des Kristalls ausbreitet. Das bekannteste Beispiel ist der Quarz. Auch einige Lösungen, in denen der gelöste Stoff ein sogenanntes asymmetrisches Kohlenstoffatom enthält, zeigen optische Aktivität. Wie wir am Ende des Paragraphen 12 gesehen haben, verursacht auch die Totalreflexion eine Phasendifferenz.

So erhalten wir z. B. aus den Gleichungen (120) und (131) für die bei der Totalreflexion auftretenden Phasendifferenzen der zwei zueinander senkrecht schwingenden Komponenten die Formel

$$\operatorname{tg}\frac{\Delta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\delta - \tau}{2} = \frac{\varphi \cos\vartheta}{\sin\vartheta \sin\vartheta_1}, \tag{181}$$

wobei $\delta - \tau$ die Phasendifferenz ist. Diese Phasendifferenz ist immer positiv und verschwindet nur bei dem Grenzwinkel der Totalreflexion ($\varphi = 0$) und im Falle des streifenden Einfalles.

§ 16. Stehende Lichtwellen. Die Farbenphotographie von LIPPMANN. Die Interferenzfarben der Schmetterlinge

Die bis jetzt besprochenen Interferenzerscheinungen rühren alle von der gegenseitigen Einwirkung von fortschreitenden Lichtwellen her. WIENER war der erste, dem es gelungen ist, das Vorhandensein stehender Lichtwellen zu zeigen. Er ließ Licht auf einen Spiegel senkrecht einfallen. Das reflektierte Licht interferierte mit dem aus entgegengesetzter Richtung einfallenden Licht. Auf diesem Wege entstanden stehende Wellen. Zur Demonstration der letzteren Erscheinung benutzte WIENER ein sehr dünnes durchsichtiges, mit Silberchlorid getränktes Kollodiumhäutchen, das er so vor den Spiegel stellte, daß die Ebene des Plättchens mit der des Spiegels nur einen ganz kleinen Winkel bildete. Das Plättchen war außerdem so dünn und durchsichtig, daß es das Entstehen der Interferenzerscheinung vor dem Spiegel nicht merkbar beeinflußte. In diesem Falle sind sowohl die Knotenflächen als auch die Flächen maximaler Amplituden der Spiegelfläche parallel. Ihre Entfernung voneinander sind jeweils ganzzahlige Vielfache von $\lambda/2$. Entlang jeder Geraden, in der das Plättchen eine Ebene maximaler Amplitude schnitt, war das Silberchlorid zerfallen. Das Plättchen wurde deshalb dort schwarz. In den Knotenebenen blieb es dagegen unverändert. Der Winkel, den das Plättchen mit der Spiegeloberfläche bildete, mußte recht klein gewählt werden, damit die aufeinanderfolgenden dunklen Streifen voneinander genügend weit lagen und deshalb unterscheidbar wurden. Aus dem Neigungswinkel des Plättchens und der Distanz der dunklen Streifen konnte WIENER die Wellenlänge des Lichtes berechnen und mit den Ergebnissen anderer Methoden der Bestimmung der Wellenlänge vergleichen.

LIPPMANN hat eine auf diesem Prinzip beruhende Methode der Farbenphotographie entwickelt. Die vor einem Spiegel sich bildenden stehenden Wellen scheiden in der lichtempfindlichen Schicht einer photographischen Platte Silber in den Ebenen der maximalen Amplituden aus. Nach entsprechender Behandlung wird die Platte von dem einfallenden weißen Licht die Farbe durch Interferenz verstärkt selektiv reflektieren, deren halbe Wellenlänge gerade gleich der Entfernung der fraglichen Ebenen ist, in denen sich Silber ausgeschieden hat. Ein auf die Platte projiziertes farbiges Bild wird nach entsprechender Behandlung der Platte und darauffolgender Beleuchtung mit weißem Licht in seinen ursprünglichen Farben erscheinen. Nebenbei sei bemerkt, daß die heutzutage benutzten Methoden der Farbenphotographie auf einem ganz anderen Prinzip beruhen.

Nach einem ähnlichen Prinzip wie die LIPPMANNschen Farbenphotographien entstehen die leuchtend blauen und grünen Farben der Schmetterlinge. Bei den Schmetterlingen sind die gelben und roten Farben Pigmentfarben, die leuchtend blauen, violetten und grünen Farben – letztere kommen hauptsächlich bei Tropenfaltern vor – sind Interferenzfarben, die davon herrühren, daß in den einzelnen Schuppen dieser Schmetterlinge, den Farben entsprechend, in der Entfernung einer halben Wellenlänge parallele Lamellen vorhanden sind,

die die Lichtstrahlen der ausgezeichneten Farbe durch Interferenz verstärkt selektiv reflektieren. Einer der größten Anfangserfolge der Elektronenmikroskopie war die Sichtbarmachung dieser Lamellen, die zuerst KINDER und seinen Mitarbeitern im Forschungslaboratorium der AEG geglückt ist. Mit dem optischen Mikroskop wäre es prinzipiell unmöglich gewesen, weil dessen Auflösungsvermögen (nach der ABBÉschen Theorie) nicht größer als $\lambda/2$ sein kann. Am bekanntesten sind unter den blauen Faltern die großen Morphos der südamerikanischen Tropen. Diese Falter wurden auch tatsächlich von KINDER zuerst untersucht. Doch gibt es auch solche Falter bei uns. In unseren Mittelgebirgen sind der große und der kleine Schillerfalter (Apatura iris und ilia) gar nicht selten und durch ihr lebhaftes violettes Farbenspiel für jeden Naturfreund auffallend. KINDER hat den Interferenzapparat der Schuppen dieser Schillerfalter mit dem der Morphos als übereinstimmend gefunden. Interferenzfarben haben auch die bei uns lebenden kleinen Bläulinge (Lycaeniden). Auf den hinterindischen Inseln leben außerdem sehr große, lebhaft grün gefärbte Vogelfalter (Ornithopteren, die man neuerdings zu den Papilios rechnet), die ein typisches Beispiel für grüne Interferenzfarben sind. Ein interessanter Fall ist die Art Ornithoptera (Papilio) priamus, die auf Neuguinea grün, auf den Salomoninseln blau und auf Batjan goldrot ist. Bemerkenswert ist, daß es in den Tropen spannerartige Falter gibt, die bei Tag im Sonnenschein fliegen und deshalb lebhaft gefärbt sind (sogenannte Urania-Arten). Nach den Untersuchungen der erwähnten Forscher ist der Interferenzapparat der Schillerschuppen dieser Urania-Arten von dem der Morphos verschieden, d. h. also, daß die Entwicklung der Interferenzeinrichtungen zur Farbenerzeugung bei den Faltern parallel auf zwei verschiedenen Wegen erfolgt ist.

Bei den Vögeln gibt es Interferenzfarben nur bei den Kolibris (Trochilidae). Ihre Entstehung beruht auf einem etwas anderen Prinzip als bei den Schmetterlingen. Die in den außeramerikanischen Tropen lebenden Honigvögel (Nectariniae) sind auch sehr bunt gefärbt, besitzen aber nur Pigmentfarben.

Bei allen bisherigen auf die Lichtinterferenz sich beziehenden Betrachtungen können wir sehen, daß wir es im allgemeinen nicht notwendig haben, uns auf die elektromagnetische Lichttheorie zu berufen. Die elastische Lichttheorie erklärte die Interferenzerscheinungen ebenso gut. Eben deshalb war die Theorie der Interferenzerscheinungen zu den Zeiten der elastischen Theorie schon sehr weitgehend ausgearbeitet.

DAS PRINZIP VON FERMAT

§ 17. Die geometrische Optik

Die einfachen Gesetze der Lichtreflexion und der Lichtbrechung sind streng genommen nur für unendlich ausgedehnte Trennungsflächen gültig oder wenigstens in guter Annäherung für solche Flächen, deren Dimensionen im Verhältnis zur Wellenlänge des Lichtes sehr groß sind. Von unserem menschlichen Standpunkt aus als sehr klein erscheinende Flächen sind jedoch immer noch

sehr groß im Verhältnis zur Wellenlänge des sichtbaren Lichtes. Wenn wir annehmen, daß auch für sehr kleine Flächenstücke die Gesetze der Lichtreflexion und Lichtbrechung zu Recht bestehen und wir außerdem die nur unter speziellen Verhältnissen auftretenden Erscheinungen der Interferenz und der Diffraktion vernachlässigen, so erhalten wir eine stark vereinfachte, jedoch sehr brauchbare Theorie der Ausbreitung des Lichtes, die geometrische Optik. Ihre große Bedeutung besteht darin, daß die Konstruktion der optischen Instrumente (Fernrohre, Mikroskope usw.) auf der geometrischen Optik beruht. Dieser Teil der geometrischen Optik hat sich wegen seiner praktischen Bedeutung zu einem ganz selbständigen Wissenschaftszweig, der Optotechnik, entwickelt. Die Besprechung der geometrischen Optik liegt jedoch außerhalb des Rahmens dieses Werkes. Wir beschränken uns deshalb nur auf die Besprechung eines Variationsprinzips, des FERMATschen Prinzips, aus dem man die gesamte geometrische Optik herleiten kann. Ferner hat das FERMATsche Prinzip bei der Entwicklung der modernen Physik eine wesentliche Rolle gespielt.

§ 18. Das FERMATsche Prinzip

Wir setzen voraus, daß sich das Licht in einem isotropen Medium ausbreitet, in dem sich jedoch der Brechungsindex beliebig ändern kann, also eine Funktion der drei Raumkoordinaten ist: $n = n(x, y, z)$. In diesem ganz allgemeinen Fall sind alle speziellen Fälle enthalten. Betrachten wir in diesem Medium zwei Punkte, die wir mit P_1 und P_2 bezeichnen, so nennen wir das entlang einer beliebigen Verbindungslinie dieser zwei Punkte genommene Integral

$$S = \int_{P_1}^{P_2} n\,ds \tag{182}$$

die optische Länge entlang dieser Kurve. Mit s bezeichnen wir die (geometrische) Länge des zurückgelegten Weges.

Das Prinzip von FERMAT sagt aus, daß sich das Licht zwischen den erwähnten Punkten immer so ausbreitet, daß der Wert des in Gleichung (182) stehenden Integrals ein Extremum wird (meist ist es ein Minimum). Die Variation der Gleichung (182) wird also Null:

$$\delta S = \delta \int_{P_1}^{P_2} n\,ds = 0. \tag{183}$$

Nach der Definition des Brechungsindex

$$n = \frac{c}{v} \tag{184}$$

(c = Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, v = Phasengeschwindigkeit des Lichtes in dem Punkte des Mediums, in dem wir den Brechungsindex suchen) und der Beziehung

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{185}$$

können wir das FERMATsche Prinzip etwas anders schreiben:

$$\delta S = \delta \int c dt = c \delta \int dt = 0. \tag{186}$$

In dieser Form ist das Prinzip von FERMAT als das Prinzip der kürzesten Zeit bekannt und sagt aus, daß das Licht sich zwischen den unendlich vielen, die zwei Punkte verbindenden Wegen den aussucht, welchen es in kürzester Zeit zurücklegen kann.

Bei einer an der Grenzfläche zweier homogener Medien erfolgenden Lichtbrechung können wir zeigen, daß das Prinzip von FERMAT erfüllt ist oder, anders ausgedrückt, daß dieses Prinzip zu richtigen Folgerungen führt. Wir be-

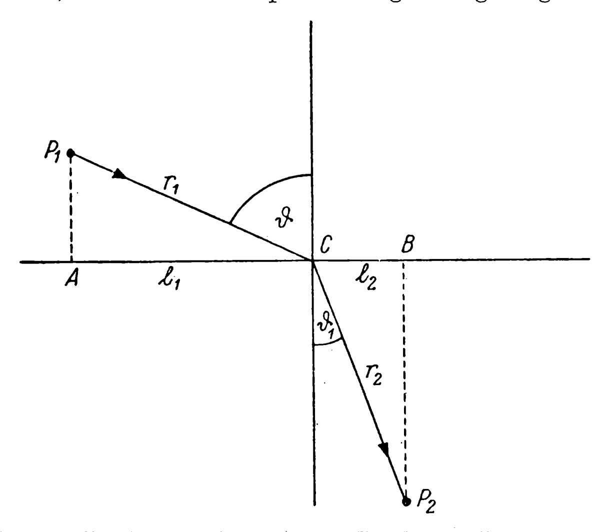


Abb. 19. Das Prinzip der kürzesten Zeit bei der Lichtbrechung

zeichnen den Einfallswinkel mit ϑ und den Brechungswinkel mit ϑ_1. P_1 sei der Anfangspunkt des Lichtstrahles und P_2 der Punkt, den das Licht nach erfolgter Brechung erreicht (vgl. Abb. 19). Ferner nennen wir A die Projektion des Punktes P_1 auf die Schnittgerade, die von der Trennungsfläche der beiden Medien und der Einfallsebene gebildet wird, und ähnlich B die Projektion des Punktes P_2 auf diese Gerade. Der Schnittpunkt des Lichtstrahles mit der erwähnten Schnittgeraden sei Punkt C. Die Zeit, die der Lichtstrahl braucht, um vom Punkt P_1 den Punkt P_2 zu erreichen, ist dann

$$t = \frac{\overline{P_1 C}}{v_1} + \frac{\overline{C P_2}}{v_2}, \tag{187}$$

wobei v_1 und v_2 die Lichtgeschwindigkeiten im ersten und zweiten Medium bedeuten. Andererseits ist

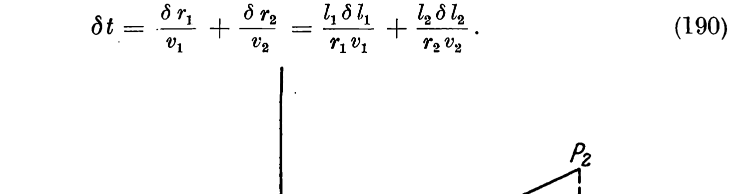
$$\overline{P_1 C^2} = \overline{A P_1^2} + \overline{A C^2} \quad \text{und} \quad \overline{C P_2^2} = \overline{P_2 B^2} + \overline{B C^2}. \tag{188}$$

Wenn wir jetzt die Lage des Punktes C ändern (d.h. diesen Punkt entlang der erwähnten Schnittgeraden verschieben), so bleiben die Entfernungen $\overline{AP_1}$, $\overline{BP_2}$ und $\overline{AB}$ konstant. Die Entfernungen $\overline{AC} = l_1$ und $\overline{CB} = l_2$ ändern sich dagegen jedoch so, daß

$$\delta l_1 + \delta l_2 = 0 \tag{189}$$

ist. Bezeichnen wir noch die Entfernung $\overline{P_1C}$ mit r_1 und $\overline{CP_2}$ mit r_2, dann können wir mittels Gleichung (188) die Variation der Gleichung (187) folgendermaßen schreiben:

$$\delta t = \frac{\delta r_1}{v_1} + \frac{\delta r_2}{v_2} = \frac{l_1 \delta l_1}{r_1 v_1} + \frac{l_2 \delta l_2}{r_2 v_2}. \tag{190}$$



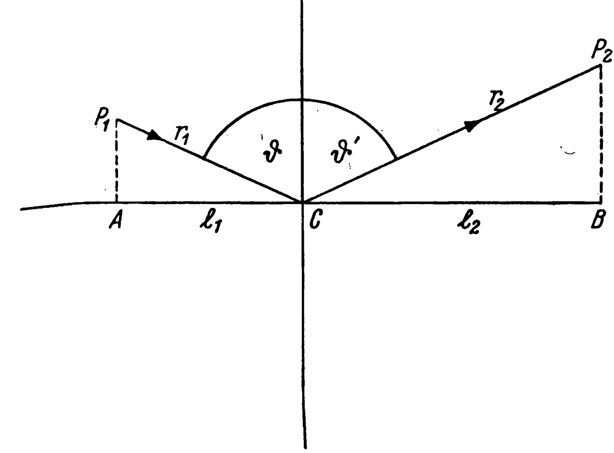


Abb. 20. Das Prinzip der kürzesten Zeit bei der Lichtreflexion

Setzen wir diese Variation gleich null, so erhalten wir aus den Gleichungen (189) und (190)

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{l_1/r_1}{l_2/r_2} = \frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta_1}, \tag{191}$$

also tatsächlich das bekannte Gesetz der Lichtbrechung.

Ganz ähnlich können wir auch das Gesetz der Lichtreflexion aus dem FERMATschen Prinzip herleiten (vgl. die Abb. 20). Analog zu Gleichung (187) haben wir hier

$$t = \frac{\overline{P_1 C}}{v} + \frac{\overline{P_2 C}}{v} = \frac{r_1}{v} + \frac{r_2}{v} = \frac{r_1 + r_2}{v}, \tag{192}$$

wobei jetzt v die Lichtgeschwindigkeit im ersten Medium bedeutet. Weiter folgt aus der Abbildung:

$$r_1^2 = \overline{P_1 A}^2 + \overline{AC}^2 \quad \text{und} \quad r_2^2 = \overline{P_2 B}^2 + \overline{BC}^2. \tag{193}$$

Bei Verschiebung des Punktes C erhalten wir

$$\delta l_1 + \delta l_2 = 0. \tag{194}$$

Zeitliche Variation ergibt

$$\delta t = \frac{\delta r_1 + \delta r_2}{v} = \left(\frac{l_1 \delta l_1}{r_1} + \frac{l_2 \delta l_2}{r_2}\right)\frac{1}{v}, \tag{195}$$

aus der für $\delta t = 0$ und unter Berücksichtigung der Gleichung (194)

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2} \tag{196}$$

oder

$$\sin\vartheta = \sin\vartheta' \tag{197}$$

folgt. Das ist das bekannte Gesetz der Lichtreflexion.

Da wir jetzt bewiesen haben, daß die Gesetze der Lichtreflexion und der Lichtbrechung aus dem FERMATschen Prinzip folgen und der gesamte Lichtweg sich aus Lichtbrechungen und Lichtreflexion zusammensetzt, so ist damit die Richtigkeit des FERMATschen Prinzips auch für den allgemeinsten Fall bewiesen.

Eine andere Rechtfertigung dieses Prinzips ist folgende: Das Licht möge sich vom Punkte P_1 in jeder Richtung ausbreiten. Wir konstruieren in Gedanken zu jedem Zeitpunkt die Wellenfläche des sich ausbreitenden Lichtes. Zu einem gewissen Zeitpunkt t wird das Licht, also die sich ausbreitende Wellenfläche, den Punkt P_2 erreichen. Nach unserer Behauptung ist der Weg, auf dem der Lichtstrahl vom Punkt P_1 den Punkt P_2 erreicht, der Weg, auf dem sich das Licht in kürzester Zeit von P_1 bis P_2 ausbreitet. Würden wir entgegen unserer Behauptung annehmen, daß es einen benachbarten Weg gäbe, auf dem das Licht in einer noch kürzeren Zeit von P_1 nach P_2 gelangt, dann müßte zur Zeit t dieser Strahl noch weiter als zum Punkt P_2 gekommen sein, was jedoch ganz unmöglich ist, weil ja erst im Zeitpunkt t die Wellenfläche den Punkt P_2 erreicht. Die erwähnte Annahme widerspricht der Definition der Wellenfläche.

Das FERMATsche Prinzip beantwortet noch eine wichtige Frage, die wir folgendermaßen stellen können: Wenn wir, wie das ja in der optischen Technik überall vorkommt, die von einem leuchtenden Punkt ausgehenden Strahlen mit Hilfe von Linsen und konkaven Spiegeln wieder in einem Punkt vereinigen, wie ist es dann möglich, daß die Strahlen dorthin ohne jeden Phasenunterschied gelangen, also sich gegenseitig niemals abschwächen, wie es die Erfahrung tatsächlich lehrt? Daß dies tatsächlich so sein muß, können wir gleich einsehen, wenn wir das Prinzip von FERMAT anwenden. Im vorliegenden Fall ist jeder Lichtweg zwischen den zwei Punkten, welchen z.B. die Größe der Linse (der Öffnungswinkel des durchgelassenen Lichtstrahles) erlaubt, auch tatsächlich der wirkliche Weg eines Teils des Lichtes. Nach dem Prinzip von FERMAT muß das Licht alle diese Wege in derselben Zeit zurücklegen, da ja im entgegengesetzten Fall sich das Licht nur einen dieser Verbindungswege aussuchen würde, nämlich den, welchen es in kürzester Zeit zurücklegen könnte. Da die Frequenz des Lichtes unabhängig von dem Brechungsindex des Mediums ist,

den es eben durchdringt (die Wellenlänge dagegen nicht), so vollführt es während derselben Zeit selbstverständlich auch dieselbe Zahl von Schwingungen. Eine Phasendifferenz kann also auf diesem Wege nicht entstehen.

§ 19. Das Analogon des FERMATschen Prinzips in der Mechanik

In der Mechanik muß nach dem Prinzip von MAUPERTIUS, das auch das Prinzip der kleinsten Wirkung genannt wird, die Variation des Ausdruckes $\int T dt$ verschwinden:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = 0, \tag{198}$$

wobei T die kinetische Energie ist. Im skleronomen Fall sind die Nebenbedingungen recht einfach, die Variation von t ist an den Endpunkten beliebig. Die Koordinaten variieren wir auch, jedoch nicht an den Endpunkten und außerdem nur so, daß die Energie dabei konstant bleibt. Wir bemerken sofort, daß Gleichung (198) dem Prinzip von FERMAT analog ist, wenn wir dieses Prinzip in der in Gleichung (186) angegebenen Form schreiben. Diese Analogie wird noch offensichtlicher, wenn wir für T in Gleichung (198) die bekannten Ausdrücke

$$\sqrt{T} = \sqrt{E - U} \tag{198a}$$

und

$$\sqrt{2T} = \sqrt{m} \frac{ds}{dt} \tag{198b}$$

einsetzen. Dann folgt

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{\frac{1}{2} m(E - U)}\, ds = 0. \tag{199}$$

Das Prinzip von MAUPERTUIS ist in dieser Form der in Gleichung (183) stehenden Ausdrucksweise des FERMATschen Prinzips vollständig analog. Die Rolle des Brechungsindex $n(x, y, z)$ übernimmt im Prinzip von MAUPERTUIS der Ausdruck $\sqrt{\frac{1}{2} m(E - U)}$.

DIE THEORIE DER DIFFRAKTIONSERSCHEINUNGEN

§ 20. Einleitung

Die größte Schwierigkeit der Wellentheorie des Lichtes war anfangs die scheinbar ganz allgemein gültige Erfahrung bezüglich der geradlinigen Ausbreitung des Lichtes. Dadurch wurde verursacht, daß die Emissionstheorie damals so viele Anhänger hatte, zumal selbstverständlich auch das persönliche Ansehen NEWTONS dazu beigetragen hat. Später stellte es sich heraus, daß auch das Licht in einem gewissen Maße gebeugt wird. Die Beugung ist jedoch, weil die Wellenlänge des Lichtes sehr klein ist, nur sehr gering oder, anders aus-

gedrückt, die Intensität des Lichtes nimmt im geometrischen Schatten, angefangen von dessen Rand, sehr schnell bis zum Werte null ab. Bei den Schallerscheinungen liegen die Verhältnisse gerade umgekehrt. Wegen der dort auftretenden relativ großen Wellenlängen ist das Vorhandensein eines Schallschattens nur hinter Bergen oder großen Gebäuden wahrnehmbar.

Die Ablenkung des Lichtes beobachtete zuerst GRIMALDI (ungefähr um das Jahr 1550). Er ließ durch eine kleine Öffnung einen Lichtstrahl in ein verdunkeltes Zimmer einfallen und beobachtete dabei, daß der Schatten eines Gegenstandes dann viel größer wurde als es nach geometrischen Erwägungen sein müßte, wenn er einen kleinen undurchsichtigen Körper in den Strahlengang brachte. Bei näherer Betrachtung des Schattens beobachtete GRIMALDI, daß sowohl innerhalb wie außerhalb der Grenze des geometrischen Schattens helle und dunkle Streifen auftreten, die parallel zu der Grenze des Schattens verlaufen und mit zunehmender Entfernung von dieser Grenze bald unbeobachtbar werden. Mit der Theorie der Lichtbeugungserscheinungen befaßten sich dann weiter HOOKE und NEWTON. Zur Erklärung der Beugungserscheinungen (der Diffraktionserscheinungen) mit Hilfe der Wellenhypothese des Lichtes machte YOUNG den ersten Versuch. Nach seiner Meinung sollte die Interferenz des von der Kante des kleinen undurchsichtigen Körper streifend reflektierten Lichtes und des direkten Lichtstrahls die Diffraktionserscheinungen verursachen. Daß diese Annahme nicht richtig ist, beweist schon die Tatsache, daß die Erscheinung nicht von der Schärfe oder vom Reflexionsvermögen der Kante des kleinen Körpers abhängt. Die Lösung des Problems gelang endlich FRESNEL, der zeigte, daß die Diffraktionserscheinungen eine Folge der Interferenz der von der Wellenfront ausgehenden Sekundärwellen sind oder, mit anderen Worten, daß die Diffraktionserscheinungen nach dem Prinzip von HUYGENS entstehen, und zwar in allen den Fällen, in denen die Wellenfläche nicht unendlich ausgedehnt, sondern unterbrochen (z. B. durch Schirme oder kleine Öffnungen) ist.

Gegenüber den Interferenzerscheinungen kann die Theorie der Diffraktionserscheinungen streng nur auf der Grundlage der elektromagnetischen Lichttheorie aufgestellt werden. Da man hier bei den angewandten Schirmen immer Grenzbedingungen berücksichtigen muß, so werden diese Bedingungen ganz verschieden sein, je nachdem, ob der Schirm z. B. ein guter Leiter ist, in dem jede elektrische Feldstärke verschwindet, der also eine absolut spiegelnde Oberfläche besitzt, oder dieser Schirm ein absolut schwarzer Körper ist, der jede Strahlung absorbiert.

§ 21. Die Wellenfunktion als harmonische Funktion

Der Vektor einer Kugelwelle kann in der folgenden Form dargestellt werden:

$$f = \frac{A}{r} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta'\right), \tag{200}$$

wobei $\lambda \nu = c$ ist und δ' die Phasenkonstante bedeutet. Da das Licht eine Vektorerscheinung ist, müßten wir eigentlich drei Ausdrücke vom Typ (200) ein-

führen, die wir mit u, v und w bezeichnen könnten und bei denen die in Gleichung (200) stehende harmonische Funktion der Reihe nach mit den Konstanten A, B und C multipliziert sein müßte. Wenn jedoch von natürlichem Licht die Rede ist, so kann niemals die Frage bezüglich der Größe der einzelnen Komponenten, sondern nur die Frage nach der absoluten Größe des Lichtvektors in jedem Zeitpunkt auftreten. Der Absolutwert des Lichtvektors ist natürlich dann $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$. Zur Angabe der Intensität des natürlichen Lichtes genügt vollständig die in Gleichung (200) stehende Funktion, die wir jetzt als eine skalare Funktion betrachten wollen. Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir noch folgende Bezeichnungen ein:

$$\frac{2\pi}{T} = n \quad \text{und} \quad \frac{2\pi}{\lambda} = k. \tag{201}$$

Gleichung (200) lautet dann:

$$f = \frac{A}{r} \sin(nt + \delta - kr), \tag{202}$$

wobei $\delta = 2\pi\delta'$ ist. Gleichung (202) können wir folgendermaßen aufspalten:

$$f = \frac{A}{r} \{\sin(nt + \delta) \cos kr - \cos(nt + \delta) \sin kr\}. \tag{203}$$

Die Wellenfunktion kann also immer als eine Summe solcher Glieder dargestellt werden, welche die Zeit nur als Faktoren der Form $\sin(nt + \delta)$ und $\cos(nt + \delta)$ enthalten. Diese werden mit Faktoren der Form $\frac{\cos kr}{r}$ und $\frac{\sin kr}{r}$ multipliziert. Bei der Ableitung der Wellenfunktion nach den Koordinaten kommen nur die letzteren Faktoren in Betracht. Da $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist, erhalten wir z. B.

$$\frac{\partial\left(\frac{\cos kr}{r}\right)}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial\left(\frac{\cos kr}{r}\right)}{\partial r} = -\frac{kx}{r^2} \sin kr - \frac{x}{r^3} \cos kr \tag{204}$$

und weiter

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2\left(\frac{\cos kr}{r}\right)}{\partial x^2} &= -\frac{kr^2 - 2kx^2}{r^4} \sin kr - \frac{k^2 x^2}{r^3} \cos kr \\ &\quad - \frac{r^3 - 3rx^2}{r^6} \cos kr + \frac{kx^2}{r^4} \sin kr \\ &= -\frac{r^2 - 3x^2}{r^5} \cos kr - \frac{k(r^2 - 3x^2)}{r^4} \sin kr - \frac{k^2 x^2}{r^3} \cos kr. \end{aligned}\right\} \tag{205}$$

Ähnlich erhalten wir die zweiten Ableitungen nach y und z:

$$\frac{\partial^2\left(\frac{\cos kr}{r}\right)}{\partial y^2} = -\frac{r^2 - 3y^2}{r^5} \cos kr - \frac{k(r^2 - 3y^2)}{r^4} \sin kr - \frac{k^2 y^2}{r^3} \cos kr \tag{206}$$

und

$$\frac{\partial^2\left(\frac{\cos k r}{r}\right)}{\partial z^2} = -\frac{r^2-3z^2}{r^5}\cos kr - \frac{k(r^2-3z^2)}{r^4}\sin kr - \frac{k^2 z^2}{r^3}\cos kr. \tag{207}$$

Addieren wir alle Gleichungen, so folgt

$$\Delta\frac{\cos k r}{r} = -\frac{k^2}{r}\cos kr, \tag{208}$$

wobei Δ den LAPLACE-Operator bedeutet. Bezeichnen wir den Ausdruck $\frac{\cos k r}{r}$ mit φ, so genügt φ der Differentialgleichung

$$\Delta\varphi = -k^2\varphi. \tag{209}$$

Ähnlich genügt dieser Gleichung auch die Funktion $\frac{\sin k r}{r}$. Da in der Wellenfunktion (203) nur die Faktoren $\frac{\cos k r}{r}$ und $\frac{\sin k r}{r}$ von den Koordinaten abhängen, so muß der Differentialgleichung (209) auch die ganze Wellenfunktion genügen:

$$\Delta f = -k^2 f. \tag{210}$$

Es wurde bereits gezeigt, daß die Wellenfunktion $u = F\left(t-\frac{r}{v}\right)$ der Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{211}$$

genügt. Ist u eine harmonische Funktion, so gilt ebenfalls $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -n^2 u$. Wenn wir dieses Resultat in Gleichung (211) einsetzen und berücksichtigen, daß nach Gleichung (201) $\frac{n^2}{v^2} = \left(\frac{2\pi}{Tv}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = k^2$ ist, so geht die Gleichung (211) in Gleichung (210) über.

§ 22. Die Anwendung des GREENschen Satzes zur Berechnung der Wellenfunktion

Wenn U und V zwei beliebige skalare Funktionen des Ortes sind, die in einem gewissen Teile des Raumes kontinuierlich und eindeutig sind, dann gilt nach dem GREENschen Satz:

$$\int_\tau (U\Delta V - V\Delta U)\,d\tau = \int_\sigma \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma. \tag{212}$$

Nehmen wir an, daß sowohl V als auch U harmonische Funktionen sind, die der Differentialgleichung (210) genügen, und addieren wir zu der Gleichung (212) den Ausdruck $\pm\int k^2 U V d\tau$, so wird nach (210) die linke Seite der Gleichung (212) gleich null:

$$\int\left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma = 0. \tag{213}$$

Diese Gleichung ist ebenfalls gültig, wenn wir an Stelle von U und V allgemeine Wellenfunktionen einsetzen, und selbstverständlich auch dann, wenn wir für U oder V die in § 21 definierten speziellen Funktionen $\frac{\cos k r}{r}$ oder $\frac{\sin k r}{r}$ benutzen. Als Bedingung bleibt bestehen, daß weder diese Funktionen selbst, noch ihre ersten Ableitungen im fraglichen Volumen, welches von der erwähnten Fläche umschlossen wird, über die wir in Gleichung (213) integrieren, unendlich werden. Bei der Funktion $\frac{\sin k r}{r}$ kann solch ein Unendlichwerden nicht auftreten, weil der Wert dieser Funktion an der Stelle $r = 0$ gleich k ist und ihr erster Differentialquotient dort verschwindet, wie man durch Reihenentwicklung von $\sin kr$ und Ableitung leicht einsehen kann. Dagegen ist der Wert von $\frac{\cos k r}{r}$ in der Nähe des Ortes $r = 0$ gleich

$$\frac{1}{r} - \frac{k^2 r}{1 \cdot 2} + \frac{k^4 r^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdots .$$

Diese Reihe wird für $r = 0$ unendlich.

Damit wir unsere Gleichung (213) auch für den Fall anwenden können, daß der Ort $r = 0$ innerhalb des Integrationsgebietes liegt, müssen wir diesen Punkt mit einer kleinen Kugelfläche umgeben. Diese Fläche ist dann zu dem Integrationsgebiet in Gleichung (213) hinzuzunehmen oder, anders ausgedrückt, wir müssen die Stelle $r = 0$ mit Hilfe einer kleinen Kugelfläche aus dem Gebiet des Volumenintegrals ausschließen. Es sei

$$V = \frac{\cos k r}{r}. \tag{214}$$

Wir berechnen jetzt das Integral $\int_s U \frac{\partial V}{\partial N} d\sigma$ bezüglich der erwähnten kleinen Kugelfläche. Da deren Mittelpunkt der Ort $r = 0$ ist, so wird $\frac{\partial V}{\partial N} = \frac{\partial V}{\partial r}$, da die Normale der Kugelfläche nach außen gerichtet ist. Differenzieren wir Gleichung (214) nach r, so folgt

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} \cos kr - \frac{k \sin k r}{r}. \tag{215}$$

Bezeichnen wir ein Flächenelement der Kugel vom Einheitsradius mit $d\,\omega$, dann gilt $r^2 d\,\omega = d\,\sigma$, also

$$\frac{\partial V}{\partial r} d\sigma = -(\cos kr + kr \sin kr)\, d\omega \tag{216}$$

und

$$\int U \frac{\partial V}{\partial N} d\sigma = -\int U(\cos kr + kr \sin kr)\, d\omega. \tag{217}$$

Statt U setzen wir explizit die Wellenfunktion φ ein:

$$\int \varphi \frac{\partial V}{\partial N} d\sigma = -\int \varphi(\cos kr + kr \sin kr)\, d\omega. \tag{218}$$

Da φ innerhalb einer Kugelfläche, die wir beliebig klein wählen können, als konstant betrachtet und überall dem von φ im Mittelpunkt angenommenen Wert φ_0 gleichgesetzt werden kann, so haben wir im Grenzfall

$$\int \varphi \frac{\partial V}{\partial N} d\sigma = -\varphi_0 \int d\omega = -4\pi\varphi_0. \tag{219}$$

Das in Gleichung (213) stehende zweite Integral

$$\int V \frac{\partial \varphi}{\partial N} d\sigma = \int \frac{\cos k r}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial N} d\sigma \tag{220}$$

verschwindet, wenn wir es über die Oberfläche der Kugelfläche erstrecken und dann den Grenzübergang machen, weil es den Faktor

$$\frac{d\sigma}{r} = r\, d\omega \tag{221}$$

enthält.

Berücksichtigen wir jetzt die gefundenen Werte des Integrals über die kleine Kugelfläche, so folgt für den Fall $V = \frac{\cos k r}{r}$ aus Gleichung (213)

$$4\pi\varphi_0 = \int \varphi \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{\cos k r}{r}\right) d\sigma - \int \frac{\cos k r}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial N} d\sigma. \tag{222}$$

Die beiden auf der rechten Seite stehenden Integrale sind nur auf die äußere Fläche des Integrationsgebietes zu erstrecken.

Setzen wir demgegenüber in Gleichung (213) die Funktion $V = \frac{\sin k r}{r}$ ein, so erhalten wir ganz analog das Resultat

$$0 = \int \varphi \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{\sin k r}{r}\right) d\sigma - \int \frac{\sin k r}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial N} d\sigma. \tag{223}$$

Hier verschwindet die linke Seite deshalb, weil das Integral über die kleine Kugelfläche gleich null ist.

Wir setzen an Stelle von φ explizit die Wellenfunktion (202)

$$\varphi = \frac{A}{r_1} \sin(n t + \delta - k r_1) \tag{224}$$

ein, in welcher die Werte von r_1 von einem Punkt $r_1 = 0$ gerechnet werden, der außerhalb des Integrationsgebietes liegt. Zur Veranschaulichung dieser Tatsache haben wir den Index 1 eingeführt. Ähnlich bezeichnen wir jetzt die vorher benutzte Größe r, bei der der Punkt $r = 0$ innerhalb des Integrationsgebietes liegt – um eventuelle Irrtümer zu vermeiden – mit r_0. Setzen wir Gleichung (224) in Gleichung (222) ein, so folgt mit Hilfe der neuen Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\varphi_0 = A \int \Big[& \frac{\cos k r_0}{r_0} \frac{\partial r_1}{\partial N} \left\{ \frac{k \cos(n t + \delta - k r_1)}{r_1} + \frac{\sin(n t + \delta - k r_1)}{r_1^2} \right\} \\ & - \frac{\sin(n t + \delta - k r_1)}{r_1} \cdot \frac{\partial r_0}{\partial N} \left\{ \frac{k \sin k r_0}{r_0} + \frac{\cos k r_0}{r_0^2} \right\} \Big] d\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{225}$$

Wenn wir ähnlich die Funktion

$$\varphi = \frac{A}{r_1} \cos(nt + \delta - kr_1) \tag{226}$$

in die Gleichung (223) einsetzen, so folgt

$$\left.\begin{aligned} 0 = A \int \Bigg[& \frac{\sin k r_0}{r_0} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial N} \left\{ - \frac{k \sin(n t + \delta - k r_1)}{r_1} + \frac{\cos(n t + \delta - k r_1)}{r_1^2} \right\} \\ & - \frac{\cos(n t + \delta - k r_1)}{r_1} \cdot \frac{\partial r_0}{\partial N} \left\{ - \frac{k \cos k r_0}{r_0} + \frac{\sin k r_0}{r_0^2} \right\} \Bigg] d\sigma. \end{aligned} \right\} \tag{227}$$

§ 23. Das HUYGENSsche Prinzip in allgemeinster Form

Wenn wir die Gleichung (227) von der Gleichung (225) subtrahieren und die Zusammenhänge

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

und

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

berücksichtigen, so folgt

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\varphi_0 = & A \int \left[\frac{k}{r_0 r_1} \left(\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N} \right) \cos\{kr_0 - (nt + \delta - kr_1)\} \right] d\sigma \\ & - A \int \left[\frac{1}{r_0 r_1} \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial N} \right) \sin\{kr_0 - (n t + \delta - kr_1)\} \right] d\sigma. \end{aligned} \right\} \tag{228}$$

Die Gleichung (228) liefert den Wert der allgemeinen Wellenfunktion φ in einem beliebigen innerhalb des Integrationsgebietes gelegenen Punkt, den wir in unseren Berechnungen mit $r_0 = 0$ bezeichnet haben. Der Ausgangspunkt $(r_1 = 0)$ des Lichtstrahles liegt dagegen außerhalb des Integrationsgebietes.

Wenn wir berücksichtigen, daß Gleichung (228) in r_1 und r_0 symmetrisch ist, so folgt daraus, daß der Ort der Lichtquelle $r_1 = 0$ und der fragliche Ort $r_0 = 0$, an dem wir den Wert der Wellenfunktion suchen, miteinander vertauschbar sind. Gleichung (228) ermöglicht die Berechnung des Wertes der Funktion φ auch für jeden Punkt, der außerhalb des von der Fläche σ umschlossenen Raumes liegt, in dem sich jetzt die Lichtquelle befindet. Da wir den Wert φ_0 nur deshalb auf die linke Seite von Gleichung (228) geschrieben haben, weil der Punkt r_0 innerhalb der fraglichen Fläche liegt, so verschwindet notwendigerweise die rechte Seite von Gleichung (228), wenn beide Punkte (der Ort der Lichtquelle und der Punkt, in dem wir den Wert der Funktion φ suchen) außerhalb des umschlossenen Volumens liegen, und sogar auch dann, wenn beide innerhalb des umschlossenen Volumens liegen, weil Gleichung (228) in r_0 und r_1 symmetrisch ist.

Da $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ meist sehr groß im Verhältnis zu $1/r_1$ und $1/r_0$ ist, können wir das zweite Glied der rechten Seite der Gleichung (228) vernachlässigen. Führen wir die Bezeichnungen

$$A \frac{1}{r_1}\left(\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N}\right) = c_1 \tag{229}$$

und

$$\delta - k r_1 = \delta_1 - \frac{\pi}{2} \tag{230}$$

ein, so kann Gleichung (228) folgendermaßen geschrieben werden:

$$\varphi_0 = \frac{k}{4\pi}\int \frac{c_1}{r_0}\sin(nt + \delta_1 - k r_0)\, d\sigma. \tag{231}$$

Der in Gleichung (231) unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck hat dieselbe Form wie die allgemeine Wellenfunktion. Im Punkt $r_0 = 0$ erhalten wir die Lichtwirkung dadurch, daß wir alle Wellen, welche von den Punkten einer geschlossenen Fläche σ ausgehen, hinsichtlich Amplitude und Phase addieren.

Da in unserer Gleichung (231) die Fläche σ ganz beliebig ist, muß der erwähnte Zusammenhang auch dann bestehen, wenn σ eine Wellenfläche ist. In diesem Falle drückt Gleichung (231) eben das HUYGENSsche Prinzip aus, welches aussagt, daß man die in einem gegebenen Punkte beobachtete Lichtwirkung auch nach dem Verfahren berechnen kann, daß man jeden Punkt einer Wellenfläche als leuchtend betrachtet und die Wirkungen aller dieser leuchtenden Punkte in dem Punkt, in dem man die Lichtwirkung sucht, addiert. Selbstverständlich muß man die Regeln der Interferenz kohärenter Wellen berücksichtigen. Gleichung (231) verallgemeinert eigentlich das Prinzip von HUYGENS für den Fall, daß die Fläche σ keine Wellenfläche, sondern nur eine beliebige geschlossene Fläche ist.

Eine exakte Formulierung der allgemeinsten Form des HUYGENSschen Prinzips ist 1882 G. KIRCHOFF geglückt und stellt eigentlich eine Anwendung des GREENschen Satzes dar.

§ 24. Die bei der Berechnung der Diffraktionserscheinungen in Anwendung kommende allgemeine Methode

Das hier auftretende allgemeine Problem lautet folgendermaßen: Gegeben ist eine Lichtquelle und ihr gegenüber ein Schirm, in dem sich eine oder mehrere Ausschnitte verschiedener Form und Lage befinden. Es erhebt sich die Frage, wie groß die Lichtintensität in einem hinter dem Schirm gelegenen Punkt A sein wird.

Auf dieses Problem wenden wir das verallgemeinerte HUYGENSsche Prinzip an. Wir wählen die Hüllfläche so, daß sie den Punkt A von der Lichtquelle vollständig abschließt, und andererseits so, daß sie die ganze Fläche des Schirmes mit den darin angebrachten Ausschnitten enthält. Wenn wir dann das auf der

rechten Seite von Gleichung (231) stehende Integral über die ganze erwähnte Fläche ausdehnen, so ist das Problem seinem Wesen nach gelöst.

Diese Methode enthält jedoch eine theoretische Schwierigkeit. Zur Berechnung benötigen wir die Wellenfunktion der von der Lichtquelle herrührenden Strahlung an den verschiedenen Stellen des Schirmes. Die Gegenwart des Schirmes beeinflußt aber diese Wellenfunktion. Wir müßten eigentlich schon die Resultate der Berechnung der Diffraktionserscheinungen kennen, bevor wir unsere Rechnungen anfangen könnten. Trotzdem ist die Berechnung in guter Näherung unmittelbar durchführbar. Wenn wir in das Integral (231) die Werte der Wellenfunktion an den Stellen der Öffnungen einsetzen, welche tatsächlich auftreten würden, wenn der Schirm überhaupt nicht vorhanden wäre, so erhalten wir auch dann mit der Erfahrung übereinstimmende Resultate. Die gemachte Vernachlässigung ist im allgemeinen unwesentlich. Wir wollen hier nur erwähnen, daß die strenge Lösung eines Diffraktionsproblems zuerst A. SOMMERFELD 1895 geglückt ist.

Das auf der rechten Seite der Gleichung (231) stehende Integral muß selbstverständlich in so viele Teilintegrale aufgespalten werden, als Öffnungen im Schirm vorhanden sind. Außerdem wird immer der Rand der Öffnung ausschlaggebend sein, da wir durch diesen die HUYGENSsche Fläche legen müssen. Innerhalb der Öffnung kann die HUYGENSsche Fläche beliebig sein. Die Fläche braucht z. B. nicht eben zu sein. Bedingung ist nur, daß sie überall durch die erwähnte Randlinie geht. Der Wert des Integrals kann jedenfalls nicht davon abhängen, wie die HUYGENSsche Fläche innerhalb der Öffnung gestaltet ist.

Einfachheitshalber schreiben wir die Wellenfunktion in ihrer komplexen Form:

$$\varphi = \frac{A}{r_1} e^{in\left(t - \frac{r_1}{c}\right)}, \tag{232}$$

wobei wir die Definition von n und k aus Gleichung (201) entnehmen; danach ist

$$\frac{k}{n} = \frac{T}{\lambda} = \frac{1}{c}, \tag{233}$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bedeutet, da wir die Diffraktionserscheinungen ausschließlich im leeren Raum untersuchen. Außerdem haben wir in unsere Wellenfunktion den Ausdruck (230) wieder eingesetzt. Zur weiteren Vereinfachung der Schreibweise ist der Anfangspunkt der Zeit so gewählt, daß keine Phasenkonstante auftritt. Setzen wir in Gleichung (231) den Ausdruck (229) ein und berücksichtigen die in Gleichung (201) gegebene Definition von k, so folgt

$$\varphi_0 = \frac{iA}{2\lambda} \int \frac{1}{r_1 r_0} \left(\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N}\right) e^{in\left(t - \frac{r_1 + r_0}{c}\right)} d\sigma. \tag{234}$$

Weitere Vereinfachungen entstehen erstens dadurch, daß wir annehmen, daß der Schirm eben ist, und zweitens dadurch, daß das Licht senkrecht einfällt. r_1 besitzt also in jedem Punkt des Schirmes denselben Wert. Dieser Wert sei außerdem sehr groß im Verhältnis zu den Größen jedes Ausschnittes des

Schirmes und deren gegenseitiger Entfernung. Dann ist $\frac{\partial r_1}{\partial N}$ gleich eins. $\frac{\partial r_0}{\partial N}$ wird unter Berücksichtigung des Umstandes, daß die Flächennormale mit der Richtung der zunehmenden r einen stumpfen Winkel einschließt, gleich $-\cos\vartheta$ sein, wobei ϑ der „Ablenkungswinkel" ist. Das ist der Winkel, welcher angibt, wie stark der Lichtstrahl von seiner ursprünglichen Richtung abgebeugt werden muß, damit er in den Punkt A gelangt. Damit geht Gleichung (234) in den folgenden Ausdruck über:

$$\varphi_0 = \frac{iA}{r_1} e^{in\left(t-\frac{r_1}{c}\right)} \int \frac{1}{\lambda r_0} \cos^2\frac{\vartheta}{2} e^{-\frac{2\pi i r_0}{\lambda}} d\sigma. \tag{235}$$

Gleichung (235) können wir noch folgendermaßen schreiben:

$$\varphi_0 = \frac{iA}{r_1} e^{in\left(t-\frac{r_1}{c}\right)} (C - iS), \tag{236}$$

wobei

$$C = \frac{1}{\lambda}\int \frac{1}{r_0} \cos^2\frac{\vartheta}{2} \cos\frac{2\pi r_0}{\lambda} d\sigma \tag{237}$$

und

$$S = \frac{1}{\lambda}\int \frac{1}{r_0} \cos^2\frac{\vartheta}{2} \sin\frac{2\pi r_0}{\lambda} d\sigma \tag{238}$$

bedeuten.

Der Realteil von (236) bedeutet eine zeitlich periodische Schwingung, für deren Intensität wir ein Maß erhalten (nämlich das Quadrat der Amplitude), wenn wir Gleichung (236) mit dem konjugiert komplexen Wert multiplizieren. Da uns nicht die absolute Größe der Lichtintensität, sondern das Verhältnis der Intensität des gebeugten Lichtes und des auf den Schirm fallenden Lichtes interessiert, das wir hier mit I bezeichnen, so erhalten wir für den Wert von I im Punkte A den Ausdruck

$$I = C^2 + S^2. \tag{239}$$

Damit haben wir das ganze Beugungsproblem auf die Berechnung der Integrale C und S zurückgeführt.

§ 25. Die Fresnelschen Diffraktionserscheinungen

Bei dieser Gruppe der Beugungserscheinungen befindet sich der Punkt A, in dem wir die Lichtintensität berechnen wollen, im Endlichen. Wir können diese Erscheinung ohne optische Hilfsgeräte (Linse, Fernrohr) unmittelbar z. B. an einem weißen Schirm, der den Punkt A enthält und an dem wir die ganze Diffraktionserscheinung auffangen können, beobachten. Die Theorie ist jedoch recht verwickelt, weil die Längen der Geraden, die den Punkt A mit den Ausschnitten des Schirmes verbinden, für alle Punkte des Schirmes verschieden sein werden.

Betrachten wir zunächst die Integrale (237) und (238). r_0 und ϑ werden sich im Gebiet der Integration im allgemeinen nur langsam verändern (wie die un-

mittelbare geometrische Anschauung zeigt). Dagegen verändern sich die Größen $\cos \frac{2\pi r_0}{\lambda}$ und $\sin \frac{2\pi r_0}{\lambda}$ sehr schnell, da wegen der Kleinheit der Wellenlänge des Lichtes kleine Änderungen von r_0 die Größe von mehreren Lichtwellenlängen besitzen und innerhalb jeder Änderung von r_0 um eine Wellenlänge die erwähnten trigonometrischen Funktionen ihren ganzen Wertbereich durchlaufen. Von dieser Behauptung gibt es jedoch eine Ausnahme: Errichten wir die Senkrechte auf dem die Beugung verursachenden Schirm durch den gegebenen Punkt A (die wir zentrale Linie nennen), so wird sich r_0 in deren Umgebung kaum ändern. Die erwähnten trigonometrischen Funktionen werden sich ebenfalls nur sehr langsam ändern. Aus diesem Grunde nennen wir in den folgenden Ausführungen diese Gerade die zentrale Gerade.

Wir betrachten zunächst die Erscheinungen, die bei Verwendung eines ebenen Schirmes mit geradliniger Begrenzung auftreten. Die Lösung dieses Problems ist auch gleichzeitig die Lösung des allgemeinen Problems, bei dem der Schirm einen beliebigen krummlinigen Rand besitzt, weil wir ja jeden kleinen Teil dieser Randlinie als einen kleinen Teil eines unendlich ausgedehnten und von einer geraden Linie begrenzten Schirmes betrachten können. Natürlich darf die Krümmung der Randlinie nicht so groß sein, daß der Krümmungsradius schon die Größenordnung der Wellenlänge des Lichtes besitzt. Durch den Punkt A legen wir eine Ebene, die auf der geradlinigen Begrenzung des Schirmes senkrecht steht (vgl. Abb. 21). Außerdem führen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, dessen X-Achse die Schnittgerade der eingeführten Ebene und des die Diffraktion verursachenden Schirmes ist und dessen Anfangspunkt am Rande des Schirmes liegt. Die Y-Achse identifizieren wir mit dem Rand des Schirmes, und die Z-Achse steht darauf senkrecht und liegt in unserer angenommenen Ebene. Die Koordinaten des Punktes A bezeichnen wir mit x_0, y_0 und z_0. Die Koordinaten eines Punktes des Schirmes seien x, y und $z = 0$. Liegt die Öffnung des Schirmes in der positiven Richtung der X-Achse, so müssen wir in der (X, Y)-Ebene über $d\sigma = dx\,dy$ integrieren, und zwar so, daß sich x von 0 bis $+\infty$ und y von $-\infty$ bis $+\infty$ ändern. Zur tatsächlichen Berechnung der Integrale (237) und (238) konstruieren wir zuerst die zentrale Linie, welche im Punkt P den Schirm erreicht. Die entsprechenden Integrale spalten wir in zwei Teile auf. Die ersten Teile enthalten die Umgebung des Punktes P, in der sich die trigonometrischen Funktionen nur langsam ändern. Die zweiten Teile erstrecken sich über das ganze übriggebliebene Gebiet der

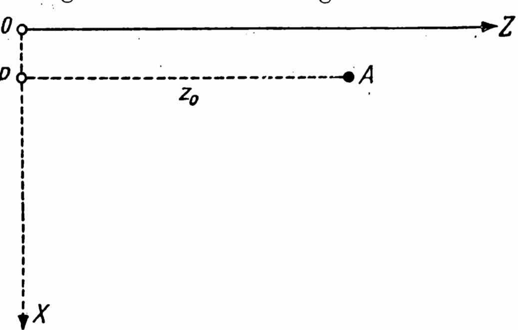


Abb. 21. Das zur Besprechung der FRESNELschen Diffraktionserscheinungen eingeführte Koordinatensystem

Integration. Im erwähnten ersten Gebiet ist in sehr guter Näherung $r_0 = z_0$ und $\vartheta = 0$, also folgt

$$C = \frac{1}{\lambda z_0} \iint d x d y \cos \frac{2\pi r_0}{\lambda} + \cdots \tag{240}$$

und

$$S = \frac{1}{\lambda z_0} \iint d x d y \sin \frac{2\pi r_0}{\lambda} + \cdots. \tag{241}$$

Die Punkte bedeuten hier die erwähnten zweiten Teile der Integrale, in deren Integrationsgebiet sich die trigonometrischen Funktionen schon recht schnell ändern. Es sei weiter

$$r_0^2 = \varrho^2 + y^2, \tag{242}$$

wobei

$$\varrho^2 = (x - x_0)^2 + z_0^2 \tag{243}$$

ist und x_0 die x-Koordinate des Punktes P (in der Ebene des Schirmes) bedeutet. Die Gleichungen (240) und (241) wollen wir jetzt zwischen den Grenzen $-\eta$ und $+\eta$ über y integrieren, ϱ bleibt dabei konstant. Wir nehmen an, daß η sehr klein im Verhältnis zu z_0, also auch zu ϱ ist. Das bedeutet, daß wir unter Berücksichtigung von Gleichung (242) r_0 in eine Reihe entwickeln können:

$$r_0 = \varrho + \frac{1}{2} \frac{y^2}{\varrho} + \cdots. \tag{244}$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die Gleichungen (240) und (241) ein, dann können wir die trigonometrischen Funktionen folgendermaßen schreiben:

$$\cos \frac{2\pi r_0}{\lambda} = \cos \frac{2\pi\varrho}{\lambda} \cos \frac{\pi y^2}{\lambda\varrho} - \sin \frac{2\pi\varrho}{\lambda} \sin \frac{\pi y^2}{\lambda\varrho} \tag{245}$$

und ähnlich

$$\sin \frac{2\pi r_0}{\lambda} = \sin \frac{2\pi\varrho}{\lambda} \cos \frac{\pi y^2}{\lambda\varrho} + \cos \frac{2\pi\varrho}{\lambda} \sin \frac{\pi y^2}{\lambda\varrho}. \tag{246}$$

Das Problem reduziert sich auf die Berechnung der folgenden zwei Integrale:

$$\int_{-\eta}^{+\eta} d y \cos \frac{\pi y^2}{\lambda\varrho} \quad \text{und} \quad \int_{-\eta}^{+\eta} d y \sin \frac{\pi y^2}{\lambda\varrho}, \tag{247}$$

oder wenn wir die Bezeichnung

$$y \sqrt{\frac{\pi}{\lambda\varrho}} = u \tag{248}$$

einführen, auf die Berechnung der Integrale

$$\sqrt{\frac{\lambda\varrho}{\pi}} \int_{-u_0}^{+u_0} \cos u^2 d u \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{\lambda\varrho}{\pi}} \int_{-u_0}^{+u_0} \sin u^2 d u. \tag{249}$$

Wir können annehmen, daß die Größe

$$u_0 = \eta \sqrt{\frac{\pi}{\lambda\varrho}} \tag{250}$$

sehr groß im Verhältnis zur Einheit ist, obwohl wir η als sehr klein im Verhältnis zu z_0 angenommen haben, da ϱ zwar relativ groß ist, aber mit λ multipliziert wird. Unter den gemachten Voraussetzungen ist sicher

$$\eta \gg \sqrt{\lambda z_0}. \tag{251}$$

Damit haben wir das Wesentliche bezüglich der Grenzen der ersten Teile der in den Gleichungen (240) und (241) angegebenen Integrale C und S gesagt. Dann können wir fernerhin die Grenzen der Integration für die in Gleichung (249) angegebenen Integrale bis ins Unendliche ausdehnen. Das Problem reduziert sich auf die Berechnung der Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos u^2 du \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin u^2 du. \tag{252}$$

Diese zwei Integrale nennen wir FRESNELsche Integrale. Zur Berechnung dieser Integrale gehen wir von dem Integral

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx \tag{253}$$

aus, das eigentlich das Integral der GAUSSschen Fehlerfunktion ist (das sogenannte LAPLACEsche Integral). Ähnlich können wir selbstverständlich auch schreiben, daß

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha y^2} dy \tag{254}$$

ist. Multiplizieren wir die Gleichungen (253) und (254) miteinander, so folgt

$$K^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dx\, dy. \tag{255}$$

Durch Einführung von ebenen Polarkoordinaten geht dieses Integral in die Form

$$K^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \varrho\, e^{-\alpha \varrho^2} d\varrho\, d\varphi \tag{256}$$

über, das man unmittelbar berechnen kann und wofür man

$$K^2 = \frac{\pi}{\alpha}, \quad \text{also} \quad K = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{257}$$

erhält.

Aus dem LAPLACE-Integral erhält man die FRESNELschen Integrale dadurch, daß man in das erstere Integral i statt α einsetzt. Streng genommen müßte man selbstverständlich noch beweisen, daß Gleichung (257) auch in diesem Falle

richtig bleibt. Diese Behauptung kann man tatsächlich verifizieren. Aus Gleichung (253) folgt in diesem Falle

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos x^2 - i \sin x^2)\, d\, x \tag{258}$$

und aus Gleichung (257)

$$K = \sqrt{\frac{\pi}{i}} = (1 - i) \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{259}$$

Wenn wir in den Gleichungen (258) und (259) die reellen und imaginären Teile gleichsetzen, so erhalten wir tatsächlich die Werte der FESNELschen Integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos u^2 d\, u = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{260}$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin u^2 d\, u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{261}$$

Da weiter $(+u)^2 = (-u)^2$ ist, so folgt

$$\int_{-\infty}^{0} \cos u^2 d\, u = \int_{0}^{+\infty} \cos u^2 d\, u = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{262}$$

und

$$\int_{-\infty}^{0} \sin u^2 d\, u = \int_{0}^{+\infty} \sin u^2 d\, u = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{263}$$

Setzen wir jetzt unsere Resultate (260) und (261) in Gleichung (249) ein, so erhalten wir für beide Ausdrücke den Wert

$$\sqrt{\frac{\lambda \varrho}{2}}.$$

Wenn wir berücksichtigen, daß $\eta \ll z_0$ ist, so können wir auch $\sqrt{\frac{\lambda z_0}{2}}$ schreiben. Mit Hilfe dieses Ausdruckes erhalten wir für die Gleichungen (240) und (241), wenn wir die Gleichungen (245) und (246) berücksichtigen, die Formeln

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} (c - s) \quad \text{und} \quad S = \frac{1}{\sqrt{2}} (c + s), \tag{264}$$

mit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\lambda z_0}} \int \cos \frac{2 \pi \varrho}{\lambda}\, d\, x \tag{265}$$

und

$$s = \frac{1}{\sqrt{\lambda z_0}} \int \sin \frac{2 \pi \varrho}{\lambda}\, d\, x. \tag{266}$$

Endlich folgt aus Gleichung (239)

$$I = c^2 + s^2 + \cdots. \tag{267}$$

Damit haben wir das ganze Problem auf die Berechnung der Integrale (265) und (266) zurückgeführt.

Bei den FRESNELschen Integralen ist es auffallend, daß sie endliche Werte besitzen, ungeachtet dessen, daß das Integrationsgebiet sich von $+\infty$ bis $-\infty$ erstreckt und der Integrand im Unendlichen nicht verschwindet, sondern zwischen $+1$ und -1 oszilliert. Daß die erwähnten Integrale trotzdem endliche Werte haben, rührt davon her, daß die Maxima und Minima mit zunehmendem u immer näher zusammenrücken (weil nicht u, sondern u^2 das Argument des Kosinus bzw. Sinus ist), so daß die Schwankung des ganzen Wertes des Integrales bei zunehmender Verschiebung der Integrationsgrenze für u immer kleiner wird. Physikalisch bedeutet dies, daß die Amplitude des von einem kleinen Streifen der Breite dy (der sich auf der HUYGENSschen Fläche befindet) in den Punkt A abgelenkten Lichtes seine Größenordnung mit zunehmendem y behält. Sein Vorzeichen ändert sich jedoch um so schneller, je mehr sich sein Ort von der zentralen Linie entfernt. Was wir bis jetzt von den Flächenelementen $d\sigma$ gesagt haben, deren y-Koordinaten von der Größenordnung η sind, das wird noch viel mehr für solche Werte von y richtig sein, die noch weiter von der zentralen Linie entfernt sind, also für solche Werte von y, die größer als η sind. Daraus folgt weiter, daß die zweiten, von $y = \eta$ bis $y = \infty$ reichenden Teile der Integrale (237) und (238) keine wesentlichen Beträge zu diesen Integralen liefern. Die in diesem Integrationsgebiet schon bemerkbare Änderung von r und ϑ hat keine Bedeutung, da sich die Kosinus- und Sinusfunktionen viel schneller ändern, so daß in einem Intervall, in dem die trigonometrischen Funktionen ihre Maxima und Minima schon sehr oft erreichen, r und ϑ noch als konstant betrachtet werden können. Nach den obigen Ausführungen können wir in den Gleichungen (240), (241) und (267) die das zweite Glied bezeichnenden Punkte überall weglassen. Wir können statt Gleichung (267) einfach

$$I = c^2 + s^2 \tag{268}$$

schreiben.

Unser einzig übriggebliebenes Problem ist jetzt die Berechnung der Integrale (265) und (266). Dazu stellen wir zunächst nach Gleichung (243) ϱ als Funktion von x dar. Da wir nach den obigen Ausführungen unsere Berechnungen auf die Teile der HUYGENSschen Fläche reduzieren können, die die zentrale Linie umgeben, so können wir die Differenz $x - x_0$ als klein im Verhältnis zu z_0 annehmen:

$$\varrho = z_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2 z_0}, \tag{269}$$

und erhalten daraus

$$\cos\frac{2\pi\varrho}{\lambda} = \cos\frac{2\pi z_0}{\lambda}\cos\frac{\pi(x - x_0)^2}{\lambda z_0} - \sin\frac{2\pi z_0}{\lambda}\sin\frac{\pi(x - x_0)^2}{\lambda z_0}. \tag{270}$$

Setzen wir diesen Ausdruck in Gleichung (265) ein, so treten in der Gleichung (265) für c folgende zwei Integrale auf:

$$\int_{x=0}^{\infty} \cos \frac{\pi (x - x_0)^2}{\lambda z_0} \, dx \tag{271}$$

und

$$\int_{x=0}^{\infty} \sin \frac{\pi (x - x_0)^2}{\lambda z_0} \, dx. \tag{272}$$

Durch Einführung neuer Veränderlicher

$$u = (x_0 - x) \sqrt{\frac{\pi}{\lambda z_0}} \tag{273}$$

gehen diese Integrale in die Form

$$\sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}} \int_{-\infty}^{u_0} \cos u^2 du \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}} \int_{-\infty}^{u_0} \sin u^2 du \tag{274}$$

über. Die obere Grenze für u erhalten wir aus Gleichung (273), wenn wir in diese Formel $x = 0$ einsetzen:

$$u_0 = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda z_0}} \cdot x_0. \tag{275}$$

Gleichung (265) geht dadurch in die folgende Form über:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\cos \frac{2 \pi z_0}{\lambda} C_{u_0} - \sin \frac{2 \pi z_0}{\lambda} S_{u_0} \right), \tag{276}$$

wobei wir die Bezeichnungen

$$C_{u_0} = \int_{-\infty}^{u_0} \cos u^2 du \quad \text{und} \quad S_{u_0} = \int_{-\infty}^{u_0} \sin u^2 du \tag{277}$$

eingeführt haben. Ähnlich erhalten wir für Gleichung (266) den Ausdruck

$$s = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sin \frac{2 \pi z_0}{\lambda} C_{u_0} + \cos \frac{2 \pi z_0}{\lambda} S_{u_0} \right). \tag{278}$$

Aus Gleichung (267) erhalten wir für die gesuchte Lichtintensität

$$I = \frac{1}{\pi} (C_{u_0}^2 + S_{u_0}^2). \tag{279}$$

Das Problem ist damit auf die Berechnung der FRESNELschen Integrale C_{u_0} und S_{u_0} zurückgeführt. Der Unterschied gegenüber den Gleichungen (260) und (261) besteht darin, daß in Gleichung (277) die Grenze der Integration nicht im Unendlichen liegt, sondern u_0 ist. Da die Lichtintensität nach den Gleichungen (279) und (277) nur von u_0 abhängt, also von y vollständig unabhängig

ist, so können wir unseren Gedankengang auf die in der Abb. 21 dargestellte Bildebene (deren Gleichung $y = 0$ ist) beschränken. Außerdem ist auf jeder Kurve, die der Gleichung

$$\frac{x_0}{\sqrt{z_0}} = \text{const} \tag{280}$$

genügt, die Lichtintensität konstant, weil nach Gleichung (275) zu allen zusammengehörenden Werten von x_0 und z_0 derselbe Wert von u_0 gehört. Gleichung (280) ist die Gleichung einer Parabel, die in ihrem Scheitelpunkt durch den Anfangspunkt unseres Koordinatensystems geht und dort die X-Achse berührt. Wenn die in Gleichung (280) stehende Konstante ihren ganzen Wertbereich von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, dann erhält man unter Berücksichtigung des Umstandes, daß $\sqrt{z_0}$ nur positiv, x_0 sowohl positiv als auch negativ sein kann, zuerst die zusammengehörenden Werte $z_0 \approx 0$, $x_0 < 0$, also unmittelbar hinter dem Schirm liegende Punkte, dann an der dunklen Seite des Schirmes (im undurchsichtigen Teil) liegenden Parabeläste, für den Wert const $= 0$ die positive Z-Achse und danach die an der Seite der Öffnung des Schirmes (an der vom Schirm nicht bedeckten Seite) liegenden Parabeläste bis zur positiven X-Achse, der $z_0 = 0$ und $x_0 > 0$ entsprechen.

Um über die Verteilung der Lichtintensität einen Überblick zu gewinnen, genügt es, den Punkt A entlang der X-Achse bei konstantgehaltenem z_0 zu verschieben. u_0 ist dann unmittelbar eine Funktion der Koordinate x_0. Wenn sich der Punkt A entlang der X-Achse bewegt, so können wir zu jedem Wert der Koordinate x_0 den dazugehörenden Wert von u_0 aus Gleichung (275) berechnen und damit die in jedem Punkt x_0 auftretende Lichtintensität aus den Gleichungen (277) und (279).

Bei sehr großen positiven Werten von u_0, also tief in dem Gebiet, das von dem Schirm nicht mehr bedeckt ist, können wir in Gleichung (277) die Grenzen der Integrale gleich $+\infty$ setzen. Demzufolge wird deren Wert nach den Gleichungen (260) und (261) gleich $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ sein. Wenn wir diese Werte in Gleichung (279) einsetzen, so erhalten wir das Resultat $I = 1$. Die Intensität wird also dieselbe sein, als wäre der Schirm überhaupt nicht vorhanden. Dieses Ergebnis wird ja durch die unmittelbare physikalische Anschauung bestätigt.

Wenn u_0 nicht allzu große positive Werte annimmt, dann müssen wir die Werte der in Gleichung (277) stehenden Integrale tatsächlich berechnen, da deren obere Grenze jetzt nicht $+\infty$, sondern ein gegebener Zahlenwert ist. Die Werte dieser Integrale können nicht so einfach angegeben werden wie in Gleichung (260) und Gleichung (261). Wir müssen uns mit einer Reihenentwicklung begnügen (im Falle eines willkürlichen u_0 können die vorliegenden Integrale in einer geschlossenen Form nicht dargestellt werden). Durch Umformung der Integrale durch partielle Integration erhalten wir folgende Formeln (in denen wir jetzt statt u_0 einfachheitshalber u schreiben):

$$\int_0^u \cos u^2 du = u \cos u^2 + 2 \int_0^u u^2 \sin u^2 du \tag{281}$$

und

$$\int_0^u \sin u^2\,du = u \sin u^2 - 2\int_0^u u^2 \cos u^2\,du. \tag{282}$$

Wenn wir in den zweiten Gliedern der rechten Seiten die partielle Integration fortsetzen, so erhalten wir die Resultate

$$\int_0^u \cos u^2 du = \cos u^2 \cdot K + \sin u^2 \cdot L \tag{283}$$

und

$$\int_0^u \sin u^2 du = \sin u^2 \cdot K - \cos u^2 L, \tag{284}$$

wobei

$$K = u - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\,u^5 + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{9}\,u^9 - \cdots \tag{285}$$

und

$$L = \frac{2}{3}\,u^3 - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{7}\,u^7 + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{11}\,u^{11} - \cdots \tag{286}$$

ist. Diese Reihen konvergieren für jeden positiven und negativen Wert von u, weil das Verhältnis von zwei aufeinanderfolgenden Gliedern über alle Grenzen abnimmt. Doch sind diese Reihen für größere Werte von u zur tatsächlichen Berechnung ungeeignet, weil die numerischen Werte der Potenzen zu schnell zunehmen.

Bei größeren Werten von u kann man deshalb gewisse Reihen, welche nach abnehmenden Potenzen von u fortschreiten, viel besser benutzen. Leider divergieren diese Reihen für größere Werte von u. Doch können die Reihen, wenn wir bei einem gewissen Gliede abbrechen, sehr gut verwendet werden. Es ist hier zweckmäßig, von dem Integral auszugehen, bei dem $+\infty$ die konstante Grenze ist. Wir erhalten durch partielle Integration die Formeln

$$\int_{u>0}^{\infty} \cos u^2\,du = \int_u^{\infty} u\cos u^2\cdot\frac{1}{u}\,du = -\frac{\sin u^2}{2u} + \int_u^{\infty}\frac{\sin u^2}{2u^2}\,du \tag{287}$$

und

$$\int_{u>0}^{\infty} \sin u^2\,du = \int_u^{\infty} u\sin u^2\cdot\frac{1}{u}\,du = \frac{\cos u^2}{2u} - \int_u^{\infty}\frac{\cos u^2}{2u^2}\,du. \tag{288}$$

Wenn wir dieses Verfahren fortsetzen, so folgen die Reihen

$$\int_u^{\infty} \cos u^2 du = \cos u^2 \cdot M_n - \sin u^2 \cdot N_n + R_c \tag{289}$$

und

$$\int_u^{\infty} \sin u^2 du = \sin u^2 \cdot M_n + \cos u^2 \cdot N_n + R_s, \tag{290}$$

wobei

$$2N_n = \frac{1}{u} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{u^5} + \cdots (-1)^{(n-1)}\frac{1\cdot 3\cdots(4n-5)}{2\cdot 2\cdots 2}\frac{1}{u^{4n-3}} \tag{291}$$

und

$$2M_n = \frac{1}{2}\frac{1}{u^3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\frac{1}{u^7} + \cdots (-1)^{(n-1)}\frac{1\cdot 3\cdots(4n-3)}{2\cdot 2\cdots 2}\frac{1}{u^{4n-1}} \tag{292}$$

ist. Diese Reihen divergieren und müssen deshalb bei einer gewissen Laufzahl n abgebrochen werden. Die Restglieder sind

$$R_c = (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(4n-1)}{2\cdot 2\cdots 2}\int_u^\infty \frac{\cos u^2\,du}{u^{4n}} \tag{293}$$

und

$$R_s = (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(4n-1)}{2\cdot 2\cdots 2}\int_u^\infty \frac{\sin u^2\,du}{u^{4n}}. \tag{294}$$

Mit zunehmendem n nehmen R_c und R_s über alle Grenzen zu. Wir können aber trotzdem in sehr vielen Fällen die Reihen (289) und (290) benutzen, weil bei einer gewissen Laufzahl n die Restglieder (293) und (294) sehr klein werden. Erstens ist sowohl R_c als auch R_s offensichtlich kleiner als der Ausdruck

$$R_n = \frac{1\cdot 3\cdots(4n-1)}{2\cdot 2\cdots 2}\int_u^\infty \frac{du}{u^{4n}} = \frac{1\cdot 3\cdots(4n-3)}{2\cdot 2\cdots 2}\frac{1}{2}\frac{1}{u^{4n-1}}. \tag{295}$$

Das ist jedoch das letzte Glied der Reihe M_n, wie wir aus Gleichung (292) ersehen können. Außerdem ist das Restglied besonders dann, wenn u groß ist, unter gewissen Umständen eine sehr kleine Zahl. Wenn u, von eins angefangen, wächst, so nimmt R_n wegen der im Nenner stehenden Potenz u^{4n-1} anfangs ab. Später nimmt jedoch R_n über alle Grenzen zu, weil der im Zähler stehende Ausdruck für große n sehr schnell wächst. Es ist also das Minimum von R_n zu bestimmen. In dessen Umgebung wird sich R_n jedenfalls sehr langsam ändern. Dort muß deshalb

$$\frac{R_{n+1}}{R_n} = \frac{(4n-1)\cdot(4n+1)}{2\cdot 2}\cdot\frac{1}{u^4} \approx 1 \tag{296}$$

also

$$n \approx \frac{u^2}{2} \tag{297}$$

sein.

Je größer u ist, desto weiter müssen wir in der Reihe von N_n bzw. von M_n gehen, damit die Restglieder möglichst klein werden. Wenn wir die Restglieder dann vernachlässigen, so erhalten wir Näherungswerte für die FRESNELschen Integrale. Vergessen wir jedoch nicht, daß diese Reihen nicht konvergent, sondern nur halbkonvergent sind. Sie nähern sich dem richtigen Werte des Integrals, aber nicht über alle Grenzen. Von einem gewissen Gliede angefangen, entfernen sie sich wieder von dem richtigen Wert des Integrals. Trotzdem kann man die hier hergeleiteten Formeln zur Berechnung der in der Praxis auftretenden Diffraktionserscheinungen im allgemeinen sehr gut benutzen.

Mit der Einführung dieser halbkonvergenten Reihen ist eigentlich das Problem der Berechnung der bei der Diffraktion des Lichtes auftretenden Intensitäten auch im Falle von mittleren positiven Werten von u gelöst. Unsere Reihen liefern übrigens eine so gute Näherung, daß sie im allgemeinen bis $u = 1{,}5$ brauchbar sind. Die Abschätzung der Größenordnung des Restgliedes zeigt, daß dieses Glied auch dann noch sehr klein ist.

Um unsere Formeln (289) und (290) tatsächlich anwenden zu können, schreiben wir die Ausdrücke (277) in folgender Form:

$$C_u = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos u^2 du - \int_{u}^{+\infty} \cos u^2 du \tag{298}$$

und

$$S_u = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin u^2 du - \int_{u}^{+\infty} \sin u^2 du. \tag{299}$$

Durch Einsetzen unserer Resultate (260), (261), (289) und (290) erhalten wir dann

$$C_u = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - M_n \cos u^2 + N_n \sin u^2 \tag{300}$$

und

$$S_u = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - M_n \sin u^2 - N_n \cos u^2. \tag{301}$$

Wenn wir diese Resultate in Gleichung (279) einsetzen, so folgt für die Intensität:

$$I = \frac{1}{\pi}\left\{\pi - 2\sqrt{\pi}\, M_n \cos\left(u^2 - \frac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{\pi}\, N_n \sin\left(u^2 - \frac{\pi}{4}\right) + M_n^2 + N_n^2\right\}. \tag{302}$$

Es bleibt die Frage zu beantworten, ob die Intensität tatsächlich Maxima und Minima besitzt und wo sich die Stellen maximaler und minimaler Intensität befinden. Dort muß selbstverständlich der erste Differentialquotient nach u [siehe Gleichung (279)] verschwinden:

$$\frac{dI}{du} = 2\left(C_u \frac{dC_u}{du} + S_u \frac{dS_u}{du}\right) = 0\,. \tag{303}$$

Weiter erhalten wir aus Gleichung (277)

$$\frac{dC_u}{du} = \cos u^2 \quad \text{und} \quad \frac{dS_u}{du} = \sin u^2. \tag{304}$$

Setzen wir jetzt (304), (301) und (300) in (303) ein, so erhalten wir folgende Bedingungsgleichung:

$$\cos\left(u^2 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{M_n}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u^3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{u^7} + \cdots\right). \tag{305}$$

Der auf der rechten Seite stehende Ausdruck ist jedoch für alle in diesem Gebiet in Betracht kommenden Werte von u sehr klein und kann deshalb in erster Näherung gleich null gesetzt werden. Dann ist

$$\cos\left(u^2 - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \tag{306}$$

unsere Bedingungsgleichung, und deren Lösungen, also die Stellen der Maxima und Minima, sind

$$u^2 = \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{7\pi}{4}, \quad \frac{11\pi}{4}, \quad \frac{15\pi}{4}, \ldots \tag{307}$$

bzw.

$$u_1 = \sqrt{\frac{3\pi}{4}}, \quad u_2 = \sqrt{\frac{7\pi}{4}}, \quad u_3 = \sqrt{\frac{11\pi}{4}}, \quad u_4 = \sqrt{\frac{15\pi}{4}}, \quad u_5 = \sqrt{\frac{19\pi}{4}} \tag{308}$$

usw.

Wir erhalten eine unendliche Reihe von Maxima und Minima. Ob es sich dabei tatsächlich um ein Maximum oder Minimum handelt, können wir am einfachsten dadurch entscheiden, daß wir den Wert von u aus Gleichung (308) in Gleichung (302) einsetzen. Da M_n und N_n kleine positive Zahlen sind, hängt der Wert von I hauptsächlich von dem Gliede $N_n \sin\left(u^2 - \frac{\pi}{4}\right)$ ab. Dessen Vorzeichen ist bezüglich der Frage ausschlaggebend, ob I ein Maximum oder Minimum besitzt. An den Stellen $u_1, u_3, u_5, \ldots$ treten also Maxima, an den Stellen $u_2, u_4, u_6, \ldots$ Minima auf. Mit zunehmendem u rücken diese Maxima und Minima immer näher und fließen endlich vollständig zusammen.

Wenn der Diffraktionspunkt so nahe an der Z-Achse liegt, daß u kleine negative oder positive Werte etwa zwischen $-1{,}5$ und $+1{,}5$ annimmt, dann ist es zur Berechnung der FRESNELschen Integrale am zweckmäßigsten, die konvergenten Reihen (283) und (284) zu benutzen. Unsere Gleichung (277) schreiben wir deshalb jetzt

$$C_u = \int\limits_{-\infty}^{0} \cos u^2 du + \int\limits_{0}^{u} \cos u^2 du \tag{309}$$

und

$$S_u = \int\limits_{-\infty}^{0} \sin u^2 du + \int\limits_{0}^{u} \sin u^2 du. \tag{310}$$

Setzen wir letztere Gleichungen in (279) ein, so folgt unter Berücksichtigung der Gleichungen (283) und (284)

$$I = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi}{4} + \sqrt{\pi}\, K \cos\left(u^2 - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{\pi}\, L \sin\left(u^2 - \frac{\pi}{4}\right) + K^2 + L^2\right\}. \tag{311}$$

Die Stellen der Maxima und Minima erhalten wir wieder aus der Gleichung $\frac{dI}{du} = 0$. Die Berechnung führt nach dem obigen Gedankengang auf die Bedingungsgleichung

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos\left(u^2 - \frac{\pi}{4}\right) + K = 0. \tag{312}$$

Setzen wir hier den Wert von K aus Gleichung (285) ein, so folgt

$$\cos\left(u^2 - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(u - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} u_5 \cdots\right) = 0. \tag{313}$$

In Gleichung (313) ist das erste Glied immer positiv, weil u^2 – da u sich nur zwischen den Werten $+1{,}5$ und $-1{,}5$ ändert – nicht solche Werte annehmen kann, daß der Kosinus negativ wird. Das zweite Glied ist eine ungerade Funktion, die ihr Vorzeichen mit dem von u ändert. Ihr absoluter Wert kann jedoch den der Kosinusfunktion niemals erreichen. Das kann man am leichtesten auf dem Wege zeigen, daß man den Wert der fraglichen Reihe für den Grenzwert $u = 1{,}5$ tatsächlich berechnet. Aus all dem Gesagten folgt, daß $\frac{dI}{du}$ im ganzen Gebiet positiv ist und daß I hier weder Minima noch Maxima besitzt. Wenn sich der Punkt A von negativen Werten von u in Richtung der positiven bewegt, wird I monoton zunehmen, bis es sein erstes Maximum erreicht, das wir mit u_1 bezeichnet haben.

Wenn sich der Punkt A, in dem wir die Intensität des gebeugten Lichtes berechnen, noch weiter in Richtung der negativen u verschiebt, wenn also $u < -1{,}5$ wird, dann können wir wieder die halbkonvergenten Reihen benutzen. Es sei $u = -u'$ ($|u| > 1{,}5$), dann folgt

$$C_{-u} = \int_{-\infty}^{-u'} \cos u^2 du = \int_{u'}^{\infty} \cos u^2 du \tag{314}$$

und

$$S_{-u} = \int_{-\infty}^{-u'} \sin u^2 du = \int_{u'}^{\infty} \sin u^2 du. \tag{315}$$

Wenn wir jetzt für diese Integrale die schon in den Gleichungen (289) und (290) erhaltenen Resultate unter Weglassung der Restglieder verwenden und dann das Resultat in Gleichung (279) einsetzen, so erhalten wir die Gleichung

$$I = \frac{1}{\pi}(M_n^2 + N_n^2). \tag{316}$$

Die Bedingungen des Auftretens der Maxima und Minima erhalten wir aus der Gleichung

$$\frac{dI}{du} = 2\left(C_{u'}\frac{dC_{u'}}{du} + S_{u'}\frac{dS_{u'}}{du}\right) = 0. \tag{317}$$

Wenn wir hier für C_{-u} und S_{-u} die Ausdrücke (289) und (290) und für $\frac{dC_{u'}}{du}$ und $\frac{dS_{u'}}{du}$ Gleichung (304) einsetzen, dann reduziert sich die Bedingung (317) auf

$$M_n = 0. \tag{318}$$

Diese Bedingung kann nirgends erfüllt werden, wie wir aus Gleichung (292) ersehen können. Die Lichtintensität nimmt also in diesem Gebiet (mit wachsendem u') monoton ab.

Endlich ist im Falle von sehr großen Werten von u'

$$I = \frac{1}{4\pi u^2}. \tag{319}$$

I verschwindet im Falle $u = -\infty$ bzw. $u' = \infty$, wie es ja auch die unmittelbare physikalische Anschauung verlangt.

Die jetzt hergeleiteten Resultate liefern schon die allgemeinste Lösung des Problems, weil durch jeden Punkt A eine Kurve der durch die Gleichung $\frac{x_0}{\sqrt{z_0}} = \text{const}$ definierten Parabelschar hindurchgeht und die Lichtintensität auf jeder Parabel konstant ist, und zwar bis zu dem Punkt, in dem sich alle Parabeln berühren. Wenn wir eine durch den Punkt A gezogene und zur X-Achse paralle Gerade der X-Achse so nähern, daß diese Gerade immer zu sich parallel bleibt, so werden sich die Maxima und Minima – ohne ihre Größe zu ändern – immer mehr einander nähern und fließen schließlich im Punkte 0 zusammen. Hier fällt unsere betrachtete Gerade mit der X-Achse zusammen. Der positive Teil der Geraden bildet jetzt den Parabelast, an dem $I = +1$ ist, der negative Teil den, an dem $I = 0$ ist. Wenn wir im entgegengesetzten Fall die den Punkt A enthaltende Gerade parallel von der X-Achse entfernen, so schieben sich die Maxima und Minima immer mehr auseinander, ohne ihre Werte zu ändern.

§ 26. Die FRAUNHOFERschen Diffraktionserscheinungen

Die FRAUNHOFERschen Diffraktionserscheinungen sind eigentlich der spezielle Fall der FRESNELschen Beugungserscheinungen, bei dem $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_0} = 0$ ist. Diese Bedingung kann auf verschiedenen Wegen verwirklicht werden: Zunächst kann man sowohl r_1 als auch r_0 unendlich groß machen. Das bedeutet, daß die Lichtquelle wie auch der Punkt, in dem wir die Intensität des gebeugten Lichtes beobachten, unendlich weit von dem die Beugungserscheinung verursachenden Schirm entfernt sind. Auf experimentellem Wege kann man diesen Fall so verwirklichen, daß man an beiden Seiten der die Beugung verursachenden Öffnung Linsen anbringt. Im Brennpunkt einer Linse befindet sich die Lichtquelle, im Brennpunkt der anderen beobachtet man die Intensität des gebeugten Lichtes.

Die Größe $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_0}$ kann aber auch verschwinden, wenn $\frac{1}{r_1} = -\frac{1}{r_0}$ ist. Dieser Fall ist dann verwirklicht, wenn eine Linse das Bild des leuchtenden Punktes auf einen weißen Schirm projiziert. Wenn diese Linse z. B. an der Seite der die Beugung verursachenden Öffnung ist, an der sich auch die Lichtquelle befindet, durchqueren die Lichtstrahlen die Öffnung so, daß sie auf den Bildpunkt gerichtet sind. In diesem Fall ist also r_1 negativ. Ist die Linse an der anderen Seite, so ist r_0 negativ. Auf experimentellem Wege kann man die FRAUNHOFERschen Diffraktionserscheinungen dadurch beobachten, daß man ein Fernrohr auf einen leuchtenden Punkt einstellt und dann vor das Objektiv den undurchsichtigen Schirm mit der gewünschten Öffnung stellt.

Die FRAUNHOFERschen Diffraktionserscheinungen sind von den FRESNELschen auch darin verschieden, daß sie schon bei viel größeren Öffnungen gut beobachtbare Erscheinungen liefern. Im Falle derselben Größe des Diffraktionsbildes sind also die FRAUNHOFERschen Beugungserscheinungen viel intensiver. Die Ursache dieser Verschiedenheit liegt darin, daß die FRESNELschen Diffraktionserscheinungen um so ausgedehnter sind, je kleiner die die Beugung verursachende Öffnung und je weiter entfernt der das Diffraktionsbild auffangende Schirm ist. Je weiter entfernt der auffangende Schirm ist, desto größer kann im Falle der gleichen Größe des Diffraktionsbildes die die Beugung verursachende Öffnung sein.

Die mathematische Theorie der FRAUNHOFERschen Beugungserscheinungen ist viel einfacher als die der FRESNELschen Beugungserscheinungen. Dazu kommt, daß die FRAUNHOFERschen Erscheinungen nicht nur in der praktischen Optik von Bedeutung sind, sondern auch in der Theorie der optischen Gitter.

Zur Durchführung der theoretischen Berechnungen bedienen wir uns eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Wir wählen es so, daß seine X- und Y-Achse in der Ebene des die Diffraktion verursachenden Schirmes liegen. Die Koordinaten eines beliebigen Punktes dieser Ebene sind also x, y und $z = 0$. Die Z-Achse des Koordinatensystems steht senkrecht auf der erwähnten Ebene. Die Koordinaten des Punktes A, in dem wir die von der Diffraktionserscheinung verursachte Lichtintensität beobachten, bezeichnen wir mit x_0, y_0 und z_0. Da der Punkt A sehr weit von der die Diffraktion verursachenden Öffnung liegt, können wir alle in seiner Richtung fortschreitenden Lichtstrahlen als zueinander parallel betrachten. Deshalb genügt es in dem vorliegenden Fall, statt des Punktes A, in dem wir die Diffraktionserscheinung beobachten, nur von einer Diffraktionsrichtung (Beugungsrichtung) zu sprechen, die durch die Winkel ϑ und φ mit Hilfe der Zusammenhänge

$$\frac{x_0}{R} = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad \frac{y_0}{R} = \sin\vartheta\sin\varphi \quad \text{und} \quad \frac{z_0}{R} = \cos\vartheta \tag{319}$$

festgelegt wird. x_0, y_0, z_0 und R sind unendlich große Zahlen. Beim Einsetzen dieser Werte in die Gleichungen (237) und (238) müssen wir berücksichtigen, daß r_0 im Nenner wie ϑ bei der Integration als konstant zu betrachten sind. Dagegen ist im Zähler eben die Änderung der Größe r_0/λ wesentlich. Bezeichnen wir mit r_0 die Entfernung eines Punktes der die Diffraktion verursachenden Öffnung von einem Punkte des das Diffraktionsbild auffangenden Schirmes, dann folgt aus

$$r_0^2 = (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2, \tag{320}$$

da $z = 0$ und x und y kleine Größen sind,

$$r_0^2 = R^2 - 2x_0x - 2y_0y, \tag{321}$$

also auch

$$r_0 = R - \frac{x_0x + y_0y}{R}, \tag{322}$$

wobei

$$R^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \tag{323}$$

ist.

Wenn wir den hier erhaltenen Wert von r_0 in die Gleichungen (237) und (238) einsetzen, so können C und S folgendermaßen geschrieben werden:

$$C = \cos \frac{2\pi R}{\lambda} c + \sin \frac{2\pi R}{\lambda} \cdot s \tag{324}$$

und

$$S = \sin \frac{2\pi R}{\lambda} c - \cos \frac{2\pi R}{\lambda} \cdot s, \tag{325}$$

mit

$$c = \frac{1}{\lambda R} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \int d\sigma \cdot \cos(\alpha x + \beta y), \tag{326}$$

$$s = \frac{1}{\lambda R} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \int d\sigma \cdot \sin(\alpha x + \beta y). \tag{327}$$

α und β haben die Bedeutungen

$$\alpha = \frac{2\pi x_0}{\lambda R} = \frac{2\pi \sin\vartheta \cos\varphi}{\lambda} \tag{328}$$

und

$$\beta = \frac{2\pi y_0}{\lambda R} = \frac{2\pi \sin\vartheta \sin\varphi}{\lambda}. \tag{329}$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (324) und (325) in Gleichung (239) folgt für die Lichtintensität

$$I = c^2 + s^2. \tag{330}$$

Wenn der Beugungswinkel $\vartheta = 0$ ist, der Diffraktionspunkt also auf der Z-Achse liegt, dann ist $\alpha = \beta = 0$, d.h., daß auch s gleich null ist. Man erhält für diese „axiale“ Lichtintensität aus den Gleichungen (330) und (326)

$$I_0 = \frac{\sigma^2}{\lambda^2 R^2}, \tag{331}$$

wobei σ den Flächeninhalt der Öffnung bedeutet.

Da uns im Falle des gebeugten Lichtes nie die absolute Lichtintensität interessiert, ist es zweckmäßig, die Intensität des gebeugten Lichtes auf die axiale Intensität zu beziehen, also statt Gleichung (330) die Gleichung

$$I = I_0(c^2 + s^2) \tag{332}$$

einzuführen, wobei jetzt die Größen c und s eine neue und einfachere Bedeutung haben, und zwar

$$c = \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \frac{1}{\sigma} \int d\sigma \cdot \cos(\alpha x + \beta y) \tag{333}$$

und

$$s = \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \frac{1}{\sigma} \int d\sigma \cdot \sin(\alpha x + \beta y). \tag{334}$$

§ 27. Die von einer rechteckigen Öffnung verursachten Beugungserscheinungen

Die Länge der Grundlinie des rechtwinkligen Vierecks sei a und seine Höhe m, also ist $\sigma = am$. Den Anfangspunkt unseres Koordinatensystems legen wir in die Mitte des Rechtecks; dann erstreckt sich die Integration über x von $-\frac{a}{2}$ bis $+\frac{a}{2}$ und über y von $-\frac{m}{2}$ bis $+\frac{m}{2}$. Setzen wir diese Grenzen in unsere Gleichungen (333) und (334) ein, so folgt

$$c = \cos^2\frac{\vartheta}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha a}{2}}{\frac{\alpha a}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\beta m}{2}}{\frac{\beta m}{2}} \tag{335}$$

und

$$s = 0.$$

Wenn wir diese Resultate in Gleichung (332) einsetzen, so erhalten wir

$$I = I_0\cos^4\frac{\vartheta}{2}\cdot\frac{\sin^2\frac{\alpha a}{2}}{\left(\frac{\alpha a}{2}\right)^2}\cdot\frac{\sin^2\frac{\beta m}{2}}{\left(\frac{\beta m}{2}\right)^2}. \tag{336}$$

Damit ist die Intensität des gebeugten Lichtes explizit als eine Funktion von ϑ und φ ausgedrückt, da nach den Gleichungen (328) und (329) α und β als Funktionen von ϑ und φ bekannt sind. Wenn $\vartheta = 0$ ist, so ist $I = I_0$, wie ja das auch sein muß. Diese „axiale" Lichtintensität ist die größte, welche überhaupt vorkommt. Von hier an liegen Maxima und Minima an beiden Seiten sowie nach oben und unten. Die waagerechte Reihe ist eine Folge des ersten gebrochenen Faktors in Gleichung (336) und die senkrechte eine Folge des zweiten. Weiter nehmen die Intensitäten dieser Maxima, wenn man sich vom Orte der axialen Intensität entfernt, immer mehr ab; die Änderung der Intensität nimmt zwischen den Maxima und den Minima immer mehr ab, bis man sie nicht mehr beobachten kann. Aus dem ersten gebrochenen Faktor erhält man für unsere Größe α an den Stellen, an welchen die Intensität minimal ist, für das Verhältnis x_0/R

$$\alpha = \frac{2\pi x_0}{\lambda R} = \frac{2\pi}{a},\quad \frac{4\pi}{a},\quad \frac{6\pi}{a},\quad \frac{8\pi}{a},\quad \cdots. \tag{337}$$

Ähnlich folgt aus dem zweiten Faktor für die Nullstellen

$$\beta = \frac{2\pi y_0}{\lambda R} = \frac{2\pi}{m},\quad \frac{4\pi}{m},\quad \frac{6\pi}{m},\quad \frac{8\pi}{m},\quad \cdots. \tag{337a}$$

Zwischen zwei Nullstellen liegt immer ein Maximum, dessen Intensität mit zunehmender Ordnungszahl abnimmt. Daneben muß man die beständige Abnahme der Intensität mit zunehmendem Winkel ϑ berücksichtigen.

Wenn wir nach der schon erwähnten Methode das Beugungsbild mit Hilfe einer Linse auf einen weißen Schirm projizieren oder es durch ein Fernrohr

beobachten, so erscheint ein helles Kreuz, dessen Teile durch schwarze Streifen unterbrochen sind, die zu den Kanten der die Beugungserscheinung verursachenden Öffnung parallel laufen. Je schmaler die Seiten des Rechtecks sind und je größer die Wellenlänge des benutzten Lichtes ist, desto stärker werden sich diese Linien auseinanderschieben. Wenn die Länge der einen Seite des Rechtecks, z. B. die der Grundlinie, sehr klein wird, dann geht das Rechteck in einen Spalt über. Demzufolge fließt das eine System der Streifen (im besprochenen Fall das vertikale) vollständig zusammen, und nur das andere Streifensystem, dessen Streifen parallel zur Längsrichtung des Spaltes stehen, bleibt erhalten.

§ 28. Die von mehreren Öffnungen gleicher Form und Größe verursachten Diffraktionserscheinungen. Die Theorie des optischen Gitters

Nehmen wir jetzt an, daß sich an dem die Diffraktion verursachenden Schirm mehrere kongruente Öffnungen befinden. Ihre Zahl sei N und ihre Lage ganz willkürlich; nur ihre Orientierung sei dieselbe. Dann kann man die gesamte Intensitätsverteilung des Diffraktionsbildes auf das von einer solchen Öffnung (allein) verursachte Diffraktionsbild zurückführen.

Bezeichnen wir die Koordinaten der n-ten Öffnung, bezogen auf einen willkürlichen, jedoch innerhalb dieser Öffnung gelegenen Punkt, den wir mit O_n bezeichnen, mit x' und y'. Wir nennen weiter die Koordinaten dieses Punktes O_n von einem beliebigen, sich jedoch auf das ganze System beziehenden Anfangspunkt x_n und y_n. Die Koordinaten des Punktes (x', y') sind dann bezüglich des Anfangspunktes des ganzen Systems

$$\left.\begin{aligned} x &= x_n + x' \\ \text{und} \qquad y &= y_n + y' \end{aligned}\right\}. \tag{338}$$

Bei allen übrigen Öffnungen messen wir ebenfalls die Koordinaten innerhalb der Öffnung an einer bei der n-ten Öffnung erwähnten Stelle.

Setzen wir die Koordinaten (338) in unsere Gleichungen (333) und (334) ein, so zerfallen alle dort stehenden Integrale in einzelne Integrale der Anzahl N, die alle nur über eine Öffnung erstreckt werden. Außerdem sind die Grenzen der Integration bei allen einzelnen Integralen dieselben. Wir erhalten

$$c = \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \frac{1}{\sigma} \sum_{n=1}^{N} \iint \cos \{\alpha (x_n + x') + \beta (y_n + y')\}\, dx'\, dy' \tag{339}$$

und

$$s = \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \frac{1}{\sigma} \sum_{n=1}^{N} \iint \sin \{\alpha (x_n + x') + \beta (y_n + y')\}\, dx'\, dy'\,. \tag{340}$$

Analog zu den Gleichungen (333) und (334) führen wir die Bezeichnungen

$$c_1 = \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \frac{1}{\sigma_1} \iint \cos (\alpha x' + \beta y')\, dx'\, dy' \tag{341}$$

und

$$s_1 = \cos^2\frac{\vartheta}{2}\cdot\frac{1}{\sigma_1}\iint\sin(\alpha x' + \beta y')\,dx'\,dy' \tag{342}$$

ein, in denen wir jetzt die sich auf eine einzelne Öffnung beziehenden Größen mit dem Index Eins bezeichnet haben. Nun ist

$$\sigma = N\sigma_1. \tag{343}$$

Ähnlich benutzen wir für die auftretenden Summen die Bezeichnungen

$$c_N = \sum_{n=1}^{N}\cos(\alpha x_n + \beta y_n) \tag{344}$$

und

$$s_N = \sum_{n=1}^{N}\sin(\alpha x_n + \beta y_n). \tag{345}$$

Mit diesen Bezeichnungen geht Gleichung (339) in den Ausdruck

$$c = \frac{1}{N}(c_N c_1 - s_N s_1) \tag{346}$$

und Gleichung (340) in

$$s = \frac{1}{N}(s_N c_1 + c_N s_1) \tag{347}$$

über. Wenn wir die Gleichungen (346) und (347) in Gleichung (332) einsetzen, so erhalten wir die Formel

$$I = \frac{I_0}{N^2}(c_1^2 + s_1^2)(c_N^2 + s_N^2) \tag{348}$$

als Lösung des Problems, die wir unter Berücksichtigung der Gleichungen (343) und (331) auch in der Form

$$I = I_{01}(c_1^2 + s_1^2)(c_N^2 + s_N^2) \tag{349}$$

schreiben können. Unter Berücksichtigung der Gleichung (332) erhalten wir

$$I = I_1(c_N^2 + s_N^2), \tag{350}$$

wobei jetzt I_1 die in Gleichung (332) mit I bezeichnete Intensität bedeutet.

Aus Gleichung (350) können wir ersehen, daß bei den FRAUNHOFERschen Diffraktionserscheinungen das bei Anwendung von mehreren Öffnungen entstehende Diffraktionsbild nicht darin besteht, daß sich dieses Bild auf eine größere Fläche ausdehnt, sondern daß das von einer Öffnung auftretende Beugungsbild intensiver wird, was der in Gleichung (350) stehende Faktor zum Ausdruck bringt. Dieser Faktor kann jedoch ganz verschiedene Werte annehmen, je nach dem, ob die Öffnungen nach einer strengen Ordnung oder

ganz regellos verteilt sind. Nach den Gleichungen (344) und (345) ist dieser Faktor

$$
\begin{aligned}
c_N^2 + s_N^2 = &\sum_{n=1}^{N} \cos^2(\alpha x_n + \beta y_n) \\
&+ 2\sum_{n=1}^{N-1} \sum_{n'=n+1}^{N} \cos(\alpha x_n + \beta y_n)\cos(\alpha x_{n'} + \beta y_{n'}) \\
&+ \sum_{n=1}^{N} \sin^2(\alpha x_n + \beta y_n) \\
&+ 2\sum_{n=1}^{N-1} \sum_{n'=n+1}^{N} \sin(\alpha x_n + \beta y_n)\sin(\alpha x_{n'} + \beta y_{n'}) \\
= &\, N + 2\sum_{n=1}^{N-1} \sum_{n'=n+1}^{N} \cos\{\alpha(x_{n'} - x_n) + \beta(y_{n'} - y_n)\}. \qquad (351)
\end{aligned}
$$

Wenn die erwähnten Öffnungen kongruent sind und außerdem auch dieselbe Orientierung besitzen, jedoch regellos verteilt sind, dann wird in Gleichung (351) im zweiten Gliede (in der letzten Zeile) die Kosinusfunktion bei der Summierung regellos alle Werte annehmen und sich deshalb (da sie im allgemeinen ebenso oft mit positivem wie mit negativem Vorzeichen auftreten wird) herausmitteln. In diesem Falle ist die von einer Öffnung herrührende Intensität mit N zu multiplizieren. Wir müssen die von allen Öffnungen herrührenden Intensitäten addieren. Handelt es sich dagegen um eine geringe Zahl von Öffnungen, so werden selbstverständlich ganz unregelmäßige Abweichungen von dieser Regel auftreten.

Das Resultat wird anders sein, wenn die Öffnungen regelmäßig verteilt sind. Wenn z. B. ihre Entfernungen gerade so groß sind, daß bei gewissen Werten von α und β (welche von den Winkeln ϑ und φ abhängen) die in der letzten Zeile der Gleichung stehenden Argumente alle ganzzahlige Vielfache von 2π sind, dann wird die dort stehende Doppelsumme gleich $N(N-1)$. Wenn wir dazu das erste Glied addieren, so erhalten wir gerade N^2. In diesem Falle addieren sich also nicht die Intensitäten, sondern die von jedem Ausschnitt herrührenden Lichtvektoren, die alle gleich groß sind. Durch Berechnung des Quadrates dieser Summe tritt der Faktor N^2 in der Formel der Intensität auf. Selbstverständlich kann hier auch der Fall eintreten, daß das zwischen zwei benachbarten Öffnungen auftretende Argument ein ungeradzahliges Vielfaches von π ist. Die Doppelsumme verschwindet auch in diesem Falle.

Ganz analoge Verhältnisse treten bei der Streuung von Röntgenstrahlen auf. Die Röntgenstreuung eines Kristalles entspricht ihrem Wesen nach dem Fall, in dem die Öffnungen in strenger Ordnung verteilt sind, dagegen die von Gasatomen oder Gasmolekülen den ganz regellos verteilten Öffnungen. Selbstverständlich besteht jedoch der Unterschied, daß es sich bei den erwähnten Röntgendiffraktionserscheinungen nicht um Verteilungen in einer Ebene, sondern um räumliche Verteilungen handelt.

Zuletzt wollen wir die erhaltenen Resultate auf ein wirkliches optisches Gitter anwenden. Es seien die Breite einer „Linie“ des Gitters gleich b und die

Entfernung der entsprechenden Punkte zweier aufeinanderfolgender „Linien“ (d. h. eigentlich schmaler Spalte) – also die „Gitterkonstante“ – gleich d. Diese ist gleich der Summe der Entfernung zweier Linien und der Breite einer Linie. In unseren Gleichungen (344) und (345) verschwinden jetzt alle y. Außerdem haben wir

$$x_1 = 0, \quad x_2 = d, \quad x_3 = 2d \quad \text{usw.} \tag{352}$$

Die Gleichungen (344) und (345) können wir jetzt zusammenfassen:

$$c_N + i s_N = \sum_{n=1}^{N} e^{i\alpha x_n} = \sum_{n=1}^{N} e^{i\alpha(n-1)d} = \frac{e^{i\alpha N d} - 1}{e^{i\alpha d} - 1}. \tag{353}$$

Der Vorteil der komplexen Schreibweise besteht darin, daß wir eine geometrische Reihe erhalten, die leicht zu summieren ist. Andererseits benötigen wir zur Berechnung der Intensität den Ausdruck $c_N^2 + s_N^2$. Wir erhalten den Ausdruck $c_N^2 + s_N^2$, wenn wir Gleichung (353) mit ihrem konjugiert komplexen Wert multiplizieren:

$$c_N^2 + s_N^2 = \frac{2(1 - \cos\alpha N d)}{2(1 - \cos\alpha d)} = \frac{\sin^2 N \frac{\alpha d}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha d}{2}}. \tag{354}$$

Setzen wir dieses Resultat in Gleichung (350) ein, so nimmt der Ausdruck für die Intensität die Form an

$$I = I_1 \frac{\sin^2 N \frac{\alpha d}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha d}{2}}. \tag{355}$$

Die Stellen der maximalen Intensität sind

$$\alpha = \frac{2\pi x_0}{\lambda R} = 0, \quad \frac{2\pi}{d}, \quad \frac{4\pi}{d}, \quad \ldots, \quad \frac{2n\pi}{d}. \tag{356}$$

Die Entfernungen der Maxima sind der Wellenlänge direkt und der Gitterkonstante umgekehrt proportional. Für den axialen Strahl liegt das Maximum selbstverständlich für alle Wellenlängen an derselben Stelle, und zwar an dem Ort, für den $\vartheta = 0$ ist. Ein Spektrum kann hier nicht entstehen. Jedes weitere Maximum wird jedoch, weil nach Gleichung (356) α eine Funktion von λ ist, in ein Spektrum auseinandergezogen. Alle Eigenschaften dieser Gitterspektren können wir aus der Gleichung (355) bzw. aus den Bedingungen (356) ersehen.

§ 29. Die von einer kreisförmigen Öffnung verursachte Lichtbeugung

Bezüglich der Leistungsfähigkeit unserer optischen Instrumente ist es wichtig zu wissen, welche Diffraktionserscheinungen auftreten, wenn sich in dem die Diffraktion verursachenden Schirm eine kreisförmige Öffnung befindet. Den Anfangspunkt unseres Koordinatensystems setzen wir in die Mitte dieses Kreises, dessen Halbmesser wir mit R bezeichnen. Von den sich auf unsere Größen c

und s beziehenden Gleichungen (333) und (334) verschwindet die zweite, und zwar aus demselben Grunde wie bei einer rechteckigen Öffnung. Es bleibt nur die Gleichung für c übrig, die wir durch Einführen eines ebenen Polarkoordinatensystems (ϱ, ω) umformen. Es gilt dann

$$x = \varrho \cos \omega, \quad y = \varrho \sin \omega \tag{357}$$

und

$$dx dy = \varrho d\varrho d\omega. \tag{358}$$

Außerdem führen wir die Größe ϱ' mit Hilfe der Definition

$$\varrho' = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \tag{359}$$

ein. α und β können wir dann schreiben:

$$\alpha = \varrho' \cos \omega' \quad \text{und} \quad \beta = \varrho' \sin \omega'. \tag{360}$$

Alle neu eingeführten Größen setzen wir in Gleichung (333) ein:

$$\left.\begin{aligned} c &= \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \frac{1}{\sigma} \int_0^R \int_{\omega'}^{2\pi+\omega'} \varrho d\varrho d\omega \cos\{\varrho\varrho' \cos(\omega - \omega')\} \\ &= \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \frac{1}{\sigma} \int_0^R \int_0^{2\pi} \varrho d\varrho d\omega \cos\{\varrho\varrho' \cos\omega\}. \end{aligned}\right\} \tag{361}$$

Wenn wir die Bezeichnung $\varrho\varrho' = z$ einführen, folgt

$$c = \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\varrho'^2} \int_0^{R\varrho'} z dz \int_0^{2\pi} d\omega \cos(z \cos\omega). \tag{362}$$

Durch TAYLORentwicklung der Kosinusfunktion erhalten wir

$$\cos(z\cos\omega) = 1 - \frac{z^2 \cos^2\omega}{1 \cdot 2} + \frac{z^4 \cos^4 \omega}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots (-1)^n \frac{z^{2n} \cos^{2n}\omega}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n}. \tag{363}$$

Diese Reihe kann man mit Hilfe der bekannten Formel

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\omega \, d\omega = \frac{1 \cdot 3 \cdots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdots 2n} 2\pi \tag{364}$$

gliedweise integrieren. Man erhält unter Berücksichtigung der Gleichungen (363) und (364) für c

$$c = \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \frac{1}{\sigma} \frac{2\pi}{\varrho'^2} \int_0^{R\varrho'} z dz \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n z^{2n} \frac{1}{(2 \cdot 4 \cdots 2n)^2}. \tag{365}$$

Diese Reihe kann man ohne Schwierigkeiten weiter integrieren:

$$c = \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \frac{1}{\sigma} \frac{2\pi}{\varrho'^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+2}}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n)^2 (2n+2)} \Bigg|_{z=0}^{z=R\varrho'}. \tag{366}$$

Da man an der oberen Grenze $z = R\varrho'$ einzusetzen hat, fällt ϱ'^2 im Nenner heraus:

$$c = \cos^2\frac{\vartheta}{2}\cdot\frac{1}{\sigma}\,2\pi R^2\left(\frac{1}{2}-\frac{z^2}{2^2\cdot 4}+\frac{z^4}{(2\cdot 4)^2\,6}-\frac{z^6}{(2\cdot 4\cdot 6)^2\,8}+\cdots\right)\Bigg|_{z=0}^{z=R\varrho'}. \quad (367)$$

Diese Reihe nennt man AIRYsche Reihe.

Bezüglich des in Gleichung (367) stehenden Klammerausdruckes hat LOMMEL sehr sorgfältige Berechnungen veröffentlicht. Er bezeichnet den Klammerausdruck mit J_1/z und gibt dann bezüglich der Abhängigkeit des Ausdruckes $2\,J_1/z$ (dessen Quadrat nach Gleichung (332) der Intensität proportional ist) von z eine numerische Tabelle an. Die Tabelle von LOMMEL enthält folgende Werte:

z	$\left(\frac{2J_1}{z}\right)^2$	
0	$+1$	Maximum
1,6	0,5075	
1,7	0,4620	
3,2	0,0267	
3,3	0,0179	
3,4	0,0111	
3,832	0,—	Minimum
5,136	0,0175	Maximum
7,016	0,—	Minimum
8,417	0,0041	Maximum
10,173	0,—	Minimum
11,620	0,0016	Maximum

Bezüglich der Bedeutung der Buchstaben wollen wir bemerken, daß z hier $R\varrho'$ ist. R ist der Halbmesser der kreisförmigen Öffnung. Andererseits ist

$$\varrho' = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{x_0^2+y_0^2}{r^2}}, \quad (368)$$

wobei x_0/r und $y/_0r$ die Richtungskosinus der Diffraktionsrichtung sind. r bedeutet hier die bei Besprechung der rechteckigen Öffnungen mit R bezeichnete Größe, also ist $r^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$.

Da wir in unseren bisherigen Betrachtungen immer angenommen haben, daß das Licht auf die die Diffraktion verursachende Öffnung senkrecht einfällt, so folgt daraus zwangsläufig, daß in dem jetzt betrachteten Falle das Diffraktionsbild nur aus Kreisringen bestehen kann, deren Halbmesser wir aus der obigen Tabelle erhalten. Da $z = R\varrho'$ ist, folgt aus Gleichung (368)

$$z = \frac{2\pi}{\lambda}\,R\sin\vartheta \approx \frac{2\pi}{\lambda}\,R\vartheta \quad (\vartheta = \text{Beugungswinkel}). \quad (369)$$

Nach unserer Tabelle ist z. B. die Größe des Durchmessers der mittleren lichten Scheibe in Winkelmaß ausgedrückt:

$$2\vartheta_1 = \frac{\lambda}{\pi R} \cdot 3{,}832 = \frac{1{,}220}{R}\,\lambda \tag{370}$$

und die des darauffolgenden dunklen Ringes

$$2\vartheta_2 = \frac{2{,}233}{R}\,\lambda \quad \text{usw.} \tag{371}$$

Selbstverständlich nehmen die Intensitäten der aufeinanderfolgenden hellen Ringe sehr schnell ab, wie es aus der Tabelle ersichtlich ist.

§ 30. Die CORNUsche Spirale

Zur Besprechung der FRAUNHOFERschen Diffraktionserscheinungen hat CORNU eine sehr anschauliche graphische Methode angegeben, die auf dem Prinzip der Vektoraddition der Lichtvektoren beruht. Wenn man zwei zueinander parallele Schwingungen zu addieren hat, deren Amplituden a und b und deren Phasenkonstanten φ_1 und φ_2 sind, so gilt für die Amplitude der resultierenden Schwingung (vgl. § 14)

$$A^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{372}$$

und für $\operatorname{tg}\varphi$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a\sin\varphi_1 + b\sin\varphi_2}{a\cos\varphi_1 + b\cos\varphi_2}. \tag{373}$$

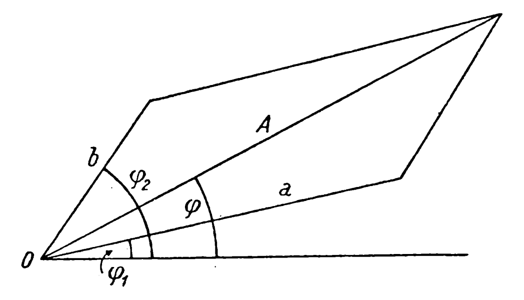


Abb. 22. Graphische Bestimmung der Resultierenden zweier paralleler Lichtvektoren

Diese Additionsmethode veranschaulicht unsere Abb. 22. Die Amplituden der beiden Lichtvektoren zeichnen wir als Vektoren, welche mit der Abszisse einen Winkel, der der Phasenkonstante entspricht, einschließen. Die vektorielle Summe dieser beiden Vektoren ist dann nach unseren Formeln (372) und (373) der resultierende Lichtvektor. Diese Methode wird analog in der Wechselstromtechnik angewendet, wenn man die Resultierende zweier Wechselströme gleicher Frequenz mit verschiedenen Amplituden und Phasen sucht. Zu der erhaltenen Resultierenden kann man nach demselben Verfahren einen dritten Vektor hinzuaddieren usw. Wir messen unsere Lichtvektoren vom Anfangspunkt unseres Koordinatensystems, und zwar so, daß der erste Lichtvektor in dem Anfangspunkt beginnt. Von dessen Endpunkt tragen wir den zweiten Lichtvektor auf, usw., aber immer so, daß jeder Lichtvektor (dessen Länge in dieser Darstellungsweise der Amplitude proportional ist) mit der horizontalen

Achse einen seiner Phasenkonstanten entsprechenden Winkel einschließt. Auf diese Weise bekommen wir bei der Addition sehr vieler Lichtvektoren eine vieleckige Linie. Wenn wir den Endpunkt mit dem Aufpunkt unseres Koordinatensystems verbinden, so erhalten wir die Amplitude des von der Interferenz aller Lichtvektoren herrührenden resultierenden Lichtvektors. Die Phasenkonstante ist der Winkel, den diese Verbindungslinie mit der Abszisse einschließt.

Diese graphische Methode hat CORNU zur Auswertung von Diffraktionserscheinungen angewendet. Zur Veranschaulichung seiner Methode betrachten wir zunächst einen Ausschnitt in unserem Diffraktionsschirm, der die Form eines unendlich ausgedehnten vertikalen Streifens hat. Wir wollen wissen, wie groß die Lichtintensität im Punkte A sein wird. Wir zerlegen zu diesem Zwecke den Streifen durch senkrecht zum Streifen gelegte Geraden in kleine Elemente. Der von der horizontalen Achse gerechnete erste Elementarteil liefert eine Schwingung von ganz kleiner Phasenkonstante, jedoch ziemlich großer Amplitude, der folgende schon eine Schwingung von größerer Phasenkonstante, jedoch kleinerer Amplitude (weil er schon weiter entfernt ist) usw. Wenn wir alle diese Lichtvektoren nach der erwähnten Methode graphisch darstellen, dann erhalten wir einen Polygonzug, der sich spiralenförmig aufrollt. Da wir unseren Streifen nach oben und unten als unendlich ausgedehnt angenommen haben, so wird diese gebrochene Linie aus zwei Teilen bestehen, die wir oberhalb und unterhalb der waagerechten Achse veranschaulichen können. Wenn wir die Elementarteile des die Diffraktion verursachenden Streifens genügend klein annehmen, wird unsere bei der graphischen Darstellung auftretende gebrochene Linie in eine kontinuierliche Kurve übergehen, die in dem vorliegenden Fall eine doppelte Spirale ist. Sie wird durch unsere Abb. 23 veranschaulicht. Im Falle des unendlichen Streifens beschreiben die zwei Äste der Spirale um die Punkte K und L immer engere Kurven. Sie erreichen die Punkte K und L nach unendlich vielen Windungen. Die Amplitude der resultierenden Schwingung – also die des im Punkte A auftretenden Lichtes – liefert die Gerade, welche die Punkte L und K verbindet. Ihre Phase ist der Winkel, den diese Gerade mit der Horizontalen einschließt. Wenn wir z. B. den unteren Teil des vertikalen Streifens – angefangen von der horizontalen Achse – verdecken, so bleibt nur der obere Teil der Spirale übrig. Der resultierende Lichtvektor wird jetzt durch die Gerade, welche den Anfangspunkt mit dem Punkt K verbindet, dargestellt. Wenn wir nicht den ganzen unteren Teil des Streifens verdecken, sondern nur einen Teil desselben, so daß von der Horizontalen abwärts ein Teil

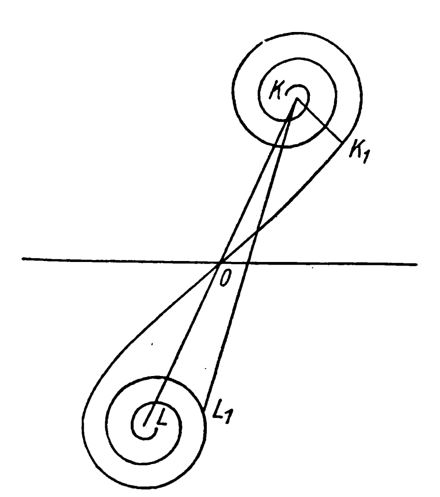


Abb. 23. CORNUsche Spirale

dieses Streifens noch frei bleibt, dann wird z. B. der resultierende Lichtvektor durch die Gerade $L_1 K$ dargestellt usw. Sehr schön veranschaulicht die CORNUsche Spirale auch die Erscheinung, daß bei Diffraktionserscheinungen bei Vergrößerung der Öffnung die Lichtintensität im allgemeinen nicht monoton zunimmt, sondern daß sie fluktuiert. Um das zu zeigen, nehmen wir an, daß nur der untere Teil unseres Streifens frei bleibt. Den oberen Teil haben wir verdeckt. Wir machen den oberen Teil des Streifens, angefangen von der Horizontalen, in kleinen Schritten frei. Die Gerade LO liefert zuerst den resultierenden Lichtvektor. Mit der stufenweisen Abdeckung des oberen Teiles wird der Lichtvektor durch eine Gerade, die den Punkt L mit einem Punkt der oberen Spirale verbindet, dargestellt. Dieser Punkt durchläuft vom Anfangspunkt unseres Koordinatensystems die obere Spirale. Aus der Anschauung folgt, daß die Länge dieser Verbindungsgeraden nicht monoton zunimmt, sondern daß sie nach einer anfänglichen Zunahme Gebiete besitzt, in denen sie abwechselnd ab- und zunimmt. Es treten Maxima und Minima auf, die bei fortschreitender Entfernung entlang der Kurve vom Anfangspunkt (also bei der sukzessiven Abdeckung des oberen Teiles des die Diffraktion verursachenden Streifens) immer näher rücken und zuletzt unbemerkbar werden.

Die Anwendung der CORNUschen Spirale haben wir hier nur an einem ganz einfachen Beispiel veranschaulicht. Es können jedoch auch viel verwickeltere Fälle mit ihrer Hilfe besprochen werden. Denken wir z. B. an einen undurchsichtigen Schirm, der eine Halbebene bedeckt und der außerdem zwischen dem leuchtenden Punkt und dem Punkt A so angebracht ist, daß er vom Punkt A aus betrachtet nicht den ganzen Halbraum bedeckt. Hier können wir den vom Schirm nicht bedeckten Teil ebenfalls in kleine Elementargebiete aufteilen und die Lichtvektoren nach der obigen Methode addieren. Der unbedeckte Halbraum liefert eine komplette CORNUsche Spirale. Nehmen wir an, daß es die in unserer Abbildung nach oben gezeichnete Spirale ist. Der nur teilweise bedeckte andere Halbraum gibt nur einen Teil der unteren Spirale, z. B. den, der bis zum Punkte L_1 reicht. Die Gerade, die diesen Punkt mit dem Mittelpunkt der oberen Spirale verbindet, kennzeichnet den im Punkt A beobachteten Lichtvektor. Wenn der Schirm nicht nur den einen Halbraum, sondern auch noch einen Teil des anderen bedeckt, dann bleibt nur ein Teil der oberen Spirale übrig, z. B. der, welcher im Punkte K_1 beginnt. Die Gerade, welche diesen Punkt mit dem Punkt K verbindet, veranschaulicht jetzt den im Punkt A auftretenden Lichtvektor usw.

§ 31. Die ABBÉsche Theorie der Bildentstehung im Mikroskop

Die Theorie der Entstehung des Bildes in einem optischen Instrument von einem Gegenstand, der selbst Licht emittiert, verursacht keine besonderen Schwierigkeiten. Wie wir schon bei der Besprechung des FERMATschen Prinzips gesehen haben, vereinigt ein Linsensystem die von einem leuchtenden Punkt ausgehenden Strahlen wieder in einem Punkt, ohne eine Phasendifferenz zu verursachen.

Die Verhältnisse liegen jedoch anders, wenn der Gegenstand nicht selbst Licht emittiert, sondern von einer anderen Lichtquelle beleuchtet wird. Wenn der Gegenstand außerdem sehr klein ist, so verursacht er verwickelte Beugungserscheinungen. Das Linsensystem baut dann aus den ursprünglichen und den gebeugten Strahlen das Bild auf. Das Problem der Entstehung des Bildes im Mikroskop und das Problem bezüglich der theoretischen Grenze des Auflösungsvermögens des Mikroskopes haben erst die theoretischen Untersuchungen von ABBÉ gelöst.

Nehmen wir an, daß der Gegenstand, den wir durch das Mikroskop beobachten, ein kleines Gitter mit der Gitterkonstante d ist. Dieses Gitter wird durch den Kondensor beleuchtet. Dieses Licht wird teils unmittelbar (also ohne Ablenkung) durch das Gitter hindurchdringen, teils treten Beugungsspektren verschiedener Ordnung auf, die mit zunehmender Ordnungszahl unter einem immer größeren Winkel abgelenkt werden. Nach dem Gedankengang von ABBÉ ist es vollständig unmöglich, das Gitter als solches durch das Mikroskop zu sehen, wenn nur das unmittelbar das Gitter durchdringende Licht in das Objektiv des Mikroskopes gelangt. Zur Sichtbarmachung der Gitterstruktur ist es wenigstens notwendig, daß auch das erste Beugungsspektrum ins Objektiv gelangt, weil ja sonst das in das Objektiv fallende Licht von keiner charakteristischen Eigenschaft des Gitters abhängt. Wenn nur das in seiner Richtung ungeänderte Licht ins Objektiv gelangt, werden wir im Mikroskop nur eine gleichmäßige Helligkeit ohne jede Gitterstruktur beobachten. Wenn wenigstens noch das erste Beugungsspektrum ins Objektiv fällt, dann kommt im Mikroskop das Bild des Gitters zustande, wenigstens derart, daß wir äquidistante helle und dunkle Streifen beobachten. Damit man die Struktur des untersuchten Körpers im Mikroskop überhaupt erkennen kann, ist es notwendig, daß wenigstens noch das Beugungsspektrum erster Ordnung ins Objektiv fällt. Auf Grund dieser Erkenntnis kann man das Auflösungsvermögen des Mikroskopes angeben. Die Entfernung zweier benachbarter „Linien", d.h. die Gitterkonstante des untersuchten Gitters, sei d. Die Richtung der Ablenkung des ersten Beugungsspektrums schließt dann mit der ursprünglichen Strahlrichtung den Winkel α ein (Abb. 24), den man entsprechend der elementaren Gittertheorie aus der Formel

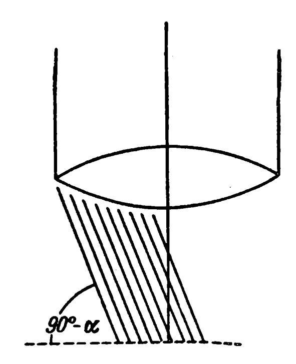


Abb. 24. Das Gitterspektrum erster Ordnung fällt noch in das Objektiv des Mikroskops

$$d \sin\alpha = \lambda \tag{374}$$

erhält, wobei λ die Wellenlänge des benutzten Lichtes ist. Damit dieses Spektrum noch ins Objektiv kommt, muß der Öffnungswinkel des Mikroskopes wenigstens 2α betragen. Bei Benutzung einer Immersionsflüssigkeit mit dem Brechungsindex n werden die Verhältnisse noch etwas günstiger, weil wir dann statt Gleichung (374) die Gleichung $d \sin\alpha = \lambda/n$ erhalten. Aus Gleichung (374) folgt, daß die

theoretische Grenze des Auflösungsvermögens des Mikroskopes die Wellenlänge des benutzten Lichtes ist, weil ja $\sin\alpha$ nicht größer als Eins sein kann. Zwei Punkte kann man mikroskopisch nur dann unterscheiden, wenn ihre Entfernung größer als die Wellenlänge des Lichtes ist. Mit Hilfe einer schiefen Beleuchtung kann man jedoch dieses Auflösungsvermögen noch in einem gewissen Maße erhöhen. Es ist nicht unbedingt notwendig, daß beide Beugungsspektren erster Ordnung ins Mikroskop gelangen. Wenn wir eine schiefe Beleuchtung anwenden, so daß der ursprüngliche (unabgelenkte) Strahl an einem Rand des Objektives und das eine abgelenkte Spektrum erster Ordnung am gegenüberliegenden Rand ins Objektiv gelangt, so erhalten wir statt Gleichung (374)

$$2d \sin\alpha = \lambda. \tag{375}$$

In diesem Falle ist die Grenze des theoretischen Auflösungsvermögens die halbe Wellenlänge des benutzten Lichtes. Das größte Auflösungsvermögen können wir dadurch erreichen, daß wir ultraviolettes Licht benutzen und das Bild dann photographieren oder ein fluoreszierendes Okular anwenden. Auf diese Weise kann man noch höchstens zwei voneinander sich in einer Entfernung von $0{,}1\,\mu$ befindende Punkte unterscheiden. Weiter kann man das Auflösungsvermögen des Mikroskopes nicht mehr erhöhen. Die Vergrößerung kann man ohne theoretische Grenze weiter steigern. Dies ist aber nur eine sogenannte „leere Vergrößerung", welche das Auflösungsvermögen nicht mehr erhöht.

In neuerer Zeit ist es besonders bei der Untersuehung biologischer Objekte gelungen, die Güte des mikroskopischen Bildes noch weiter durch das sogenannte Phasenkontrastverfahren von ZERNICKE zu erhöhen. Der Erfolg dieser Methode widerspricht nicht der ABBÉschen Theorie. Es handelt sich um die Lösung eines anderen Problems. Besonders bei der Untersuchung von biologischen Objekten kommt es häufig vor, daß das Auflösungsvermögen des Mikroskopes zur Erkennung der gewünschten Details genügen würde, doch ist das Bild viel zu kontrastarm (weil man ja sehr dünne Schnitte benutzen muß), d. h. die Lichtabsorption der verschiedenen Teile des Objekts ist viel zu gering. Eine bekannte Methode zur Beseitigung dieses Übels ist die Färbung des Präparates. Dieses Verfahren ist mit der Schwierigkeit verbunden, daß man auch bei toten Gegenständen durch die Färbung etwas an der untersuchten Struktur unkontrollierbar verändert. Lebende Objekte zu färben ist ein sehr schwieriges Problem. Wenn es auch in einigen Fällen gelingt (sogenannte Vitalfärbung), so besteht die Schwierigkeit der dadurch entstehenden Störung des Objektes in einem noch erhöhten Maße. Auch Objekte, die für unser Auge als vollständig durchsichtig erscheinen, können in ihren verschiedenen Teilen verschiedene Phasenverschiebungen des hindurchtretenden Lichtes verursachen, was jedoch für unser Auge unbeobachtbar ist. An diesem Punkt greift die erwähnte Methode ein. ZERNICKE zerlegt das einfallende Licht in zwei Teilstrahlen. Der eine Strahl durchdringt das zu untersuchende Objekt, der andere tritt durch ein in der Austrittspupille des Mikroobjektives vorhandenes $\lambda/4$-Plättchen (Phasenring). Diese zwei Strahlen interferieren miteinander. Da die Strahlen, welche verschiedene Teile des Objektes durchdrungen haben, verschiedene Verzöge-

rungen erleiden, werden sie nach der Interferenz mit dem das $\lambda/4$-Plättchen passierenden Teilstrahl in ganz verschiedenem Maße durch Interferenz geschwächt. Das erhaltene Bild weist ohne Färbung starke Kontraste auf. Selbstverständlich sind auch nach diesem Verfahren nur solche Strukturen auflösbar, die noch oberhalb der ABBEschen Grenze liegen.

Bekanntlich ist es gelungen, das Auflösungsvermögen durch Anwendung des Elektronenmikroskopes weiter zu steigern. Das liegt erstens daran, daß man bei Elektronenstrahlen durch geeignet gewählte magnetische oder elektrostatische Felder eine Linsenwirkung erreichen kann, und zweitens daran, daß man nach der aus der Wellenmechanik folgenden DE BROGLIEschen Beziehung

$$\lambda = \frac{h}{m\,v},$$

wobei λ die Wellenlänge der Elektronenstrahlen, m die Elektronenmasse, v die Geschwindigkeit der Elektronen und h die PLANCKsche Konstante bedeuten, durch geeignete Wahl von v die Wellenlänge beliebig klein, also das theoretische Auflösungsvermögen beliebig groß wählen kann. Eine praktische Grenze des Auflösungsvermögens ergibt sich dadurch – abgesehen von der Schwierigkeit der Herstellung von sehr starken Feldern –, daß die zu untersuchenden Objekte von einer zu starken Elektronenbestrahlung zerstört werden. Dies ist bei biologischen Objekten in erhöhtem Maße der Fall. Immerhin übertrifft aber schon jetzt das Auflösungsvermögen des Elektronenmikroskopes das des Lichtmikroskopes um viele Größenordnungen.

Schon oft tauchte der Gedanke auf, daß man alle erwähnten Schwierigkeiten umgehen könnte, wenn man Röntgenstrahlen benutzen würde. Doch entsteht hier eine neue Schwierigkeit: Der Brechungsindex jeder bekannten Materie ist für Röntgenstrahlen so wenig von Eins verschieden, daß man praktisch keine Linsenwirkung erreichen kann. Ein interessanter Gedanke war deshalb, doch eine Linsenwirkung dadurch zu erzielen, daß man die kleine Ablenkung der Röntgenstrahlen, die bei der Totalreflexion auftritt und dort immerhin einige Bogenminuten beträgt, ausnutzt. A. KOMAR, P. KIRKPATRIK, A. V. BAEZ u. a. benutzten deshalb zwei senkrecht zueinander stehende Zylinderspiegel, die sie in den Strahlengang eines „weißen“ (also viele verschiedene Wellenlängen enthaltenden) Röntgenstrahles brachten. Auf diesem Wege erzielten sie eine Linsenwirkung. Diese interessante Methode lieferte jedoch noch wenig praktische Erfolge. Ein anderer Gedanke zur Fokussierung der Röntgenstrahlen bestand darin, die selektive Reflexion der Röntgenstrahlen nach der bekannten BRAGGschen Gleichung

$$n\lambda = 2d\sin\Theta$$

auszunutzen. Der Gedanke dieser Methode rührt von H. H. JOHANN und T. JOHANNSSON her, die mit Hilfe von zylindrisch gebogenen Kristallplatten fokussierende Röntgenspektrometer konstruierten. Um nach diesem Prinzip eine Linsenwirkung erreichen zu können, müssen jedoch Kristallplatten sphärisch gebogen werden. Bezüglich dieses Problems seien die Arbeiten von G. N. RAMACHANDRAN und Y. CAUCHOIS erwähnt. Als dünne Kristallplatten be-

nutzten diese Autoren Steinsalz, Metalleinkristalle, Glimmer usw. Da man hier das Bestehen der BRAGGschen Beziehung ausnutzt, muß selbstverständlich mit monochromatischen Röntgenstrahlen gearbeitet werden. All diese Versuche, einen „Kugelzonenspiegel" zu benutzen, stehen noch in ihrem Anfangsstadium. Wir bemerken nur noch, daß sich mit der Theorie dieser Methode F. ASSELMEYER beschäftigt hat.

DIE THEORIE DER LICHTSTREUUNG

§ 32. Die Formel von RAYLEIGH

Die Lichtstreuung ist eigentlich eine Diffraktionserscheinung im Falle sehr kleiner und recht vieler Teilchen, die alle einzeln das Licht beugen. Trotzdem beschäftigen wir uns in einem gesonderten Kapitel mit dieser Erscheinung, was einerseits in der großen physikalischen Wichtigkeit dieser Erscheinung seine Ursache hat und andererseits darin, daß man bei der Besprechung der Theorie der Lichtstreuung meist von der korpuskularen Struktur der Materie ausgeht. Deshalb ist die theoretische Behandlungsweise dieser Frage von der mathematischen Methode, die wir bei der Berechnung der besprochenen Diffraktionserscheinungen angewendet haben, ganz verschieden.

Nehmen wir zunächst an, daß Gasatome (die notwendigerweise kugelsymmetrisch sind) das Licht streuen. Der elektrische Vektor der einfallenden Lichtwelle sei

$$\mathfrak{E}_z = A \cos 2\pi \nu t. \tag{376}$$

Die Polarisierbarkeit der Atome bezeichnen wir mit α. Unter der Wirkung des (zur Z-Achse parallelen) elektrischen Feldes $\mathfrak{E}_z$ wird in einem Atom ein elektrisches Moment der Größe

$$p = \alpha A \cos 2\pi \nu t \tag{377}$$

induziert. Dessen skalares Potential ist bekanntlich

$$\varphi = \frac{p}{r^2} \cos\vartheta, \tag{378}$$

wobei ϑ den Winkel bedeutet, den die Dipolachse (hier die Z-Achse) und die den Beobachtungsort mit dem Orte des Dipols verbindende Gerade miteinander einschließen. Zur Berechnung des Vektorpotentials des oszillierenden Dipols ist notwendig, die in diesem Dipol fließende Stromstärke zu kennen. Man erhält die Stromstärke aus der Gleichung

$$\dot{p} = l\dot{e} = lI, \tag{379}$$

wobei l die Länge des Dipols und e die Größe der an seinen Endpunkten sich befindenden positiven und negativen Ladungen bedeutet. Die zeitliche Ände-

rung der Ladung muß gleich der Stromstärke sein. Da wir jetzt die Stromstärke bereits kennen, so erhalten wir die Vektorpotentiale aus den Gleichungen

$$A_x = A_y = 0 \quad \text{und} \quad A_z = \frac{I\,l}{c\,r} = \frac{\dot{p}}{c\,r}. \tag{380}$$

Da sich jedoch die Größe des Dipols in der Zeit (periodisch) ändert, muß man die Potentiale retardieren. Gleichung (380) wird streng richtig folgende Form haben

$$A_x = A_y = 0 \quad \text{und} \quad A_z = \frac{\dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{c\,r} \tag{381}$$

und ähnlich

$$\varphi = -\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{p\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}\right]. \tag{382}$$

Zur Berechnung der magnetischen Feldstärke müssen wir unsere Resultate in die Gleichung $\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}$ einsetzen:

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_z}{\partial r}\cdot\frac{y}{r}, \quad H_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\partial A_z}{\partial r}\cdot\frac{x}{r} \quad \text{und} \quad H_z = 0. \tag{383}$$

Die Richtung der magnetischen Feldstärke ist überall senkrecht zur Z-Achse als auch senkrecht zur Richtung des Dipols. Die Absolutgröße der magnetischen Feldstärke beträgt

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2} = \left|\frac{\partial A_z}{\partial r}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{r^2}}\right| = \left|\frac{\partial A_z}{\partial r}\sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}}\right| \\ &= \left|\frac{\partial A_z}{\partial r}\cdot\sqrt{1-\cos^2\vartheta}\right| = \left|\frac{\partial A_z}{\partial r}\sin\vartheta\right| = \left|\left(-\frac{\dot{p}}{r^2 c} + \frac{1}{r c}\,\frac{\partial \dot{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial r}\right)\sin\vartheta\right| \\ &= \left|\left(\frac{\dot{p}}{r^2 c} + \frac{\ddot{p}}{r c^2}\right)\sin\vartheta\right|. \end{aligned} \tag{384}$$

Bei der Herleitung der beiden letzten Zeilen der Gleichung (384) haben wir Gleichung (381) berücksichtigt. In einer großen Entfernung von den Dipolen (und bei der Lichtstreuung von Atomen ist selbstverständlich jede makroskopische Entfernung groß) wird das zu dem Quadrat von r umgekehrt proportionale Glied im Verhältnis zu dem r umgekehrt proportionalen Glied verschwindend klein sein. Wir erhalten demnach

$$H = \left|\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{p}}{r}\sin\vartheta\right|. \tag{385}$$

In großer Entfernung vom Dipol, d.h. in der Wellenzone, stehen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ aufeinander und auf der Ausbreitungsrichtung senkrecht. Außerdem sind die absoluten Werte von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ (im Vakuum) einander gleich, so daß gilt:

$$H = E = \left|\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{p}}{r}\sin\vartheta\right|. \tag{386}$$

Dieses Resultat können wir leicht auch aus Gleichung (382) erhalten. Durch den POYNTINGschen Vektor

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}] \tag{387}$$

kann man aus den Gleichungen (385) und (386) die pro Sekunde und cm² erfolgende Energieabstrahlung unseres Dipols angeben:

$$S(\vartheta) = \frac{1}{4\pi c^3}\left(\frac{\ddot{p}}{r}\sin\vartheta\right)^2. \tag{388}$$

Aus Gleichung (388) erhalten wir die Abhängigkeit der Intensität der Streustrahlung von der Wellenlänge. Nach Gleichung (377) ist

$$\ddot{p} = -4\pi^2\nu^2\alpha A\cos 2\pi\nu t. \tag{389}$$

Wenn wir diesen Wert (retardiert) in Gleichung (388) einsetzen, so wird

$$S(\vartheta) = \frac{4\pi^3}{c^3}\nu^4\alpha^2\frac{A^2}{r^2}\cos^2 2\pi\nu\left(t-\frac{r}{c}\right)\sin^2\vartheta. \tag{390}$$

Die gestreute Intensität ist der vierten Potenz der Frequenz direkt oder der vierten Potenz der Wellenlänge umgekehrt proportional. Dies ist das RAYLEIGHsche Gesetz. Bei der Herleitung haben wir stillschweigend angenommen, daß α von der Frequenz unabhängig ist. Das ist bei Atomen und Molekülen im sichtbaren Gebiet, abgesehen von speziellen Verhältnissen, in erster Näherung erlaubt.

Da wir immer nur relative Lichtintensitäten messen, ist nicht die absolute Größe der aus Gleichung (390) folgenden Lichtintensität von besonderer Bedeutung, sondern deren Abhängigkeit von der Wellenlänge und vom Winkel ϑ. Wenn wir mit I_0 die Intensität des einfallenden Lichtes und mit $I(\vartheta, \lambda)$ die des gestreuten Lichtes bezeichnen, so können wir Gleichung (390) in der Form

$$I = I(\vartheta, \lambda) = I_0 C\frac{1}{\lambda^4}\sin^2\vartheta \tag{391}$$

schreiben, wobei C eine Konstante ist. Wir müssen hier berücksichtigen, daß sich Gleichung (390) bzw. (391) auf linear polarisiertes einfallendes Licht bezieht und ϑ der Winkel ist, den die Richtung des elektrischen Vektors der einfallenden Welle (die Richtung des induzierten Dipols) und die Beobachtungsrichtung miteinander einschließen. Wenn wir natürliches Licht benutzen – und das ist der gewöhnliche Fall –, dann müssen wir dies in Gedanken in zwei Strahlen gleicher Intensität, die senkrecht zueinander polarisiert sind, zerlegen:

$$I(\lambda, \vartheta_1, \vartheta_2) = I_0 C\frac{1}{\lambda^4}\frac{\sin^2\vartheta_1+\sin^2\vartheta_2}{2}. \tag{392}$$

ϑ_1 und ϑ_2 sind hierbei die Winkel, die die senkrecht aufeinanderstehenden elektrischen Vektoren mit der Beobachtungsrichtung bilden. Bezeichnen wir den

Winkel, den die Beobachtungsrichtung mit der Richtung des einfallenden Strahles einschließt, mit φ, dann gilt

$$\cos^2\vartheta_1 + \cos^2\vartheta_2 + \cos^2\varphi = 1, \quad \text{also} \quad 1 + \cos^2\varphi = \sin^2\vartheta_1 + \sin^2\vartheta_2 .$$

Setzen wir diesen Zusammenhang in Gleichung (392) ein, so folgt

$$I(\lambda, \varphi) = I_0 C \frac{1}{\lambda^4} \frac{1 + \cos^2\varphi}{2} . \tag{393}$$

Diese Gleichung liefert für einfallendes natürliches Licht die Intensität des gestreuten Lichtes als Funktion der Wellenlänge und des Streuwinkels. Da in Gleichung (393) $\cos^2\varphi$ steht, erfolgt die Streuung ebenso stark nach vorn wie nach hinten. Diese Gesetzmäßigkeit besteht so lange, wie die Teilchen klein im Verhältnis zur Wellenlänge des Lichtes sind. Bei der Streuung an größeren Teilchen tritt dagegen der sogenannte Mie-Effekt auf (siehe § 34).

Nach Gleichung (390), d.h. nach dem Rayleighschen Gesetz, wird das rote Licht am wenigsten und das blaue und violette am stärksten gestreut. Darauf beruht z.B. die Benutzung des roten Lichtes als Haltesignal. Da es in großer Entfernung bereits sichtbar wird, gibt es die größte Sicherheit. Ähnlich beruht die Benutzung des blauen Lichtes bei der Luftschutzbeleuchtung darauf, daß es nur auf kleine Entfernungen sichtbar ist. Daraus erklärt sich die blaue „Farbe“ des Himmels; die untergehende Sonne ist dagegen rot. Noch viel weniger wird nach dem Rayleighschen Gesetz das infrarote Licht gestreut. Es dringt durch Nebel fast ungeschwächt hindurch.

Bei Wasser können wir diese einfachen Gesetzmäßigkeiten nicht ohne weiteres anwenden, weil das Wasser im nahen infraroten und auch noch im roten Gebiet Absorptionsstellen besitzt, und deshalb dringt z.B. das rote Licht nicht am tiefsten in das Meerwasser ein, was interessante biologische Folgen hat.

§ 33. Die Theorie der molekularen Lichtstreuung

Im vorigen Paragraphen haben wir nur den Fall besprochen, daß kugelsymmetrische Atome die Streuung verursachen. Wenn es sich jedoch um ein aus Molekülen bestehendes Gas handelt – abgesehen von den Edelgasen und Metalldämpfen bestehen ja alle Gase aus Molekülen –, dann müssen wir berücksichtigen, daß mit ganz wenigen Ausnahmen die Moleküle nicht kugelsymmetrisch sind. Im Paragraphen über die Polarisierbarkeit haben wir besprochen, daß die Polarisierbarkeit dann ein Tensor ist und daß wir das Polarisationsellipsoid des Moleküls auf Hauptachsen transformieren können. In diesem Falle bleiben von den Komponenten des Tensors nur drei übrig, die wir mit b_1, b_2 und b_3 bezeichnet haben. Das Gesetz von Rayleigh bleibt auch jetzt unverändert gültig. Die Erscheinung der Lichtstreuung ändert sich jedoch insofern, als das gestreute Licht im allgemeinen nicht mehr in derselben Richtung polarisiert ist wie das einfallende, d.h., es tritt eine partielle Depolarisation auf.

Wir führen ein molekülgebundenes Koordinatensystem ein, dessen Achsen mit den Richtungen der Hauptpolarisierbarkeiten des Moleküls zusammen-

fallen. Die Koordinaten dieses Systems bezeichnen wir mit ξ, η und ζ. Ähnlich führen wir ein „raumfestes" Koordinatensystem ein, in dem wir die Koordinaten mit x, y und z bezeichnen. Die Richtungskosinus der Winkel, welche die Achsen der zwei Systeme miteinander einschließen, sind in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt. Den elektrischen Vektor der einfallenden Lichtwelle beschreiben wir wieder mit Hilfe der Gleichung (376). Die elektrische Feldstärke zerlegen wir jetzt in Richtung der Achsen des molekülfesten Koordinatensystems. Die Komponenten sind nach unserer Tabelle

	x	y	z
ξ	α_1	α_2	α_3
η	β_1	β_2	β_3
ζ	γ_1	γ_2	γ_3

$$\mathfrak{E}_z \alpha_3, \quad \mathfrak{E}_z \beta_3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{E}_z \gamma_3. \tag{394}$$

Wir suchen jetzt die parallel der Z-Achse und X-Achse unseres raumfesten Koordinatensystems im betrachteten Molekül induzierten elektrischen Momente, die wir mit p_z und p_x bezeichnen. Mit Hilfe der Hauptpolarisierbarkeiten b_1, b_2 und b_3 und der Komponenten der Feldstärke in Gleichung (394) erhalten wir für die entlang der Achsen des molekülfesten Koordinatensystems auftretenden Momente

$$b_1 \mathfrak{E}_z \alpha_3, \quad b_2 \mathfrak{E}_z \beta_3 \quad \text{und} \quad b_3 \mathfrak{E}_z \gamma_3. \tag{395}$$

Zur Berechnung der Momente p_z und p_x müssen wir jetzt die in Gleichung (395) stehenden drei Komponenten mit den oben angegebenen Richtungskosinus multiplizieren:

$$p_z = \{b_1 \alpha_3 \alpha_3 + b_2 \beta_3 \beta_3 + b_3 \gamma_3 \gamma_3\} \, \mathfrak{E}_z \tag{396}$$

und

$$p_x = \{b_1 \alpha_3 \alpha_1 + b_2 \beta_3 \beta_1 + b_3 \gamma_3 \gamma_1\} \, \mathfrak{E}_z. \tag{397}$$

Da in einem Gas die Verteilung und Orientierung der Moleküle ganz regellos ist, so müssen wir, um die von einem Gasvolumen verursachte Streuung zu erhalten, die Quadrate von p_z und p_x über alle möglichen Orientierungen der Moleküle mitteln. Bei der Berechnung dieses Problems treten folgende Mittelwerte auf:

$$\overline{\alpha_l^4} = \frac{1}{5},$$

$$\overline{\beta_l^2 \, \gamma_l^2} = \frac{1}{15},$$

$$\overline{\alpha_l^2 \alpha_k^2} = \frac{1}{15}$$

und

$$\overline{\alpha_l \beta_l \alpha_k \beta_k} = -\frac{1}{30}. \tag{398}$$

Die in Gleichung (398) angegebenen numerischen Werte der Mittelwerte können wir z. B. dadurch berechnen, daß wir die in diesen Ausdrücken stehenden

Richtungskosinus alle mit Hilfe der EULERschen Winkel ausdrücken und dann über alle möglichen Werte integrieren.

Wenn wir die Quadrate der Gleichungen (396) und (397) berechnen und dann das erhaltene Resultat über alle möglichen Orientierungen mitteln, wobei wir die in Gleichung (398) angegebenen Mittelwerte berücksichtigen, so erhalten wir

$$\overline{p_z^2} = \mathfrak{E}_z^2 \left[\frac{1}{5}(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + \frac{2}{15}(b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1)\right] \tag{399}$$

und

$$\overline{p_x^2} = \mathfrak{E}_z^2 \left[\frac{1}{15}(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - \frac{2}{30}(b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1)\right]. \tag{400}$$

Andererseits sind die gestreuten Lichtintensitäten, wie wir das aus den Gleichungen (388) und (377) ersehen können, $\overline{p_x^2}$ bzw. $\overline{p_z^2}$ proportional:

$$I_z = C\left[\frac{1}{5}(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + \frac{2}{15}(b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1)\right] \tag{401}$$

und

$$I_x = C\left[\frac{1}{15}(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - \frac{2}{30}(b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1)\right], \tag{402}$$

wobei wir mit C einen Proportionalitätsfaktor bezeichnen, den wir nach dem Vorhergehenden ohne weiteres berechnen können. Diese Frage ist jedoch wenig interessant, weil wir ja sowieso immer nur relative Intensitäten messen. Aus den Gleichungen (388) oder (390) können wir ebenfalls ersehen, daß das RAYLEIGHsche Gesetz auch hier besteht.

Aus den Gleichungen (401) und (402) erhalten wir

$$\Delta' = \frac{I_x}{I_z} = \frac{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - b_1 b_2 - b_2 b_3 - b_3 b_1}{3(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + 2(b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1)}. \tag{403}$$

Δ' bezeichnen wir als Depolarisation des linear polarisierten einfallenden Lichtes, dessen elektrischer Vektor entlang der raumfesten Z-Achse schwingt. Der physikalische Sinn dieser Depolarisation ist folgender: Wenn wir senkrecht zur Richtung des einfallenden Lichtes und ebenfalls senkrecht zu dessen Schwingungsrichtung das gestreute Licht beobachten, so werden wir nicht nur Licht (I_z), dessen elektrischer Vektor parallel zu dem des einfallenden Lichtes orientiert ist, erhalten, sondern im allgemeinen auch Licht (I_x), dessen elektrischer Vektor parallel zur raumfesten X-Achse schwingt. Wenn unsere Moleküle kugelsymmetrisch sind, dann ist $b_1 = b_2 = b_3$, und demzufolge ist auch $\Delta' = 0$. Der Depolarisationsgrad ist ein Maß für die Abweichung der Moleküle von der Kugelsymmetrie. Wenn es sich nicht um linear polarisiertes, sondern um natürliches Licht handelt, dann ist

$$\Delta = \frac{2 I_x}{I_x + I_z} = \frac{2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - b_1 b_2 - b_2 b_3 - b_3 b_1)}{4(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1} \tag{404}$$

der Depolarisationsgrad, welcher bei kugelsymmetrischen Molekülen ebenfalls verschwindet.

Oft benutzt man die Größe

$$\frac{10\Delta}{6-7\Delta} = \frac{(b_1 - b_2)^2 + (b_2 - b_3)^2 + (b_3 - b_1)^2}{(b_1 + b_2 + b_3)^2}, \tag{405}$$

die in der Fachliteratur als Anisotropie eines Moleküls bezeichnet wird. Diese Größe verschwindet ebenfalls, wenn das Molekül kugelsymmetrisch ist. Die Messung der Depolarisation ist ein sehr wichtiges Hilfsmittel zur Erforschung der Struktur der Moleküle. Einige Daten bezüglich der Größe der Depolarisation sind in einer kleinen Tabelle zusammengestellt. (Da Δ im allgemeinen eine kleine Zahl ist, geben wir bei jedem Gas 100Δ an.)

H_2	O_2	Cl_2	CO	N_2O	C_2H_2	C_2H_4	C_2H_6	C_6H_6	C_6H_{12}	CH_4
1,7	6,4	4,3	3,2	12,5	4,5	2,9	1,6	4,6	1,6	0,0

§ 34. Der MIE-Effekt

Bei unseren bisherigen sich auf die Lichtstreuung beziehenden Besprechungen haben wir immer angenommen, daß die Atome oder Moleküle klein im Verhältnis zur Wellenlänge des Lichtes sind, daß sich also innerhalb der Ausdehnung dieser Partikel das elektrische Feld der einfallenden Lichtwelle nicht merklich ändert. Bei sichtbarem Licht und bei nicht zu stark polymerisierten Molekülen ist diese Annahme tatsächlich erlaubt. Deshalb besteht hier das RAYLEIGHsche Gesetz zu Recht. Als einen interessanten Umstand wollen wir anführen, daß bei der Streuung von Röntgenstrahlen an freien Elektronen das RAYLEIGHsche Gesetz nicht gültig ist, und zwar deshalb, weil die „Polarisierbarkeit" der freien Elektronen proportional ν^{-2} ist, wie es bereits in § 3 des dritten Teiles dieses Werkes [Gleichung (32)] hergeleitet worden ist. Bei der zweimaligen Ableitung nach der Zeit fällt die Abhängigkeit von ν gerade heraus, d. h., daß die Streuung von Röntgenstrahlen an freien Elektronen (und gegenüber Röntgenstrahlen kann man auch die gebundenen Elektronen eines Atoms in erster Annäherung als frei betrachten) unabhängig von der Wellenlänge ist.

Nach dieser Abweichung wollen wir noch sehen, wie sich das RAYLEIGHsche Gesetz modifiziert, wenn die Größe der Teilchen nicht mehr vernachlässigbar klein im Verhältnis zur Wellenlänge des Lichtes ist (dieser Fall tritt bei sehr langen Kettenmolekülen und auch im Falle von größeren Teilchen auf). Die diesbezüglichen ziemlich verwickelten Berechnungen rühren für kugelsymmetrische Teilchen von MIE her. Wir wollen hier nur den physikalischen Inhalt seiner Berechnungen besprechen. Bei größeren Teilchen muß man berücksichtigen, daß zwischen den von den verschiedenen Teilen desselben Teilchens gestreuten Vektoren schon Phasenunterschiede auftreten. Die geometrische Anschauung lehrt, daß die Phasendifferenz um so kleiner ist, je kleiner der Winkel der Streurichtung und der Richtung des ursprünglichen einfallenden Strahles ist. Daraus folgt, daß größere Teilchen eine vorwiegende Vorwärtsstreuung des Lichtes zeigen. Diese Erscheinung nennt man MIE-Effekt. Ferner wird zwischen

den von den verschiedenen Punkten des Teilchens gestreuten elektrischen Vektoren eine um so größere Phasendifferenz auftreten, d.h. in einem desto höheren Maße werden sie sich abschwächen, je kleiner die Wellenlänge des Lichtes ist. Diese Erscheinung wirkt dem RAYLEIGHschen Gesetz entgegen. Je größere Partikeln die Lichtstreuung verursachen, desto weniger wird diese Streuung von der Wellenlänge abhängen. Bei makroskopisch großen Teilchen erhalten wir die Erscheinung der gewöhnlichen Lichtreflexion. Mittels des MIE-effektes läßt sich z. B. erklären, daß die Farbe des reinen Himmels intensiv blau, dagegen die des nebeligen grauweiß ist. Die schwebenden Wassertröpfchen sind nicht mehr vernachlässigbar klein im Verhältnis zu den Wellenlängen des sichtbaren Lichtes, dagegen sind die Moleküle der Luft tatsächlich klein genug.

LITERATURAUSWAHL

Im folgenden seien einige Lehrbücher, Spezialwerke und zusammenfassende Darstellungen erwähnt, aus denen sich der Leser über die in diesem Lehrbuch erwähnten Fragen weiter oder von einem anderen Gesichtspunkt aus orientieren kann. Von einem vollständigen Literaturverzeichnis kann dabei selbstverständlich keine Rede sein.

I. Lehrbücher

R. Becker, Theorie der Elektrizität Bd. I. Einführung in die Maxwellsche Theorie. 15. Aufl. B. G. Teubner 1951. Leipzig. Bd. II. Elektronentheorie. 7. Aufl. B. G. Teubner 1949. Leipzig. (Dieses berühmte Lehrbuch, mit dem ganze Physikergenerationen aufgewachsen sind, ist zuerst unter dem Namen von Abraham, dann als Abraham-Föppl, später Abraham-Becker und zuletzt nur unter dem Namen Becker erschienen.)

M. Planck, Einführung in die Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. (Einführung in die theoretische Physik, Bd. III.) S. Hirzel, Leipzig 1927.

M. Planck, Einführung in die theoretische Optik. (Einführung in die theoretische Physik. Bd. IV.) S. Hirzel, Leipzig 1927.

A. Sommerfeld, Elektrodynamik. (Vorlesungen über theoretische Physik. Bd. III.) 1. Aufl. Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig und Dieterichsche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1949.

A. Sommerfeld, Optik. (Vorlesungen über theoretische Physik. Bd. IV.) Dieterichsche Verlagsbuchhandlung. Wiesbaden. 2. Aufl. Im Erscheinen.

F. Hund, Einführung in die theoretische Physik. Bd. II. Theorie der Elektrizität des Magnetismus. 2. Aufl. Bibliographisches Institut, Leipzig 1951.

F. Hund, Einführung in die theoretische Physik. Bd. III. Optik. 2. Aufl. Bibliographisches Institut, Leipzig 1951.

H. Falkenhagen, Optik. S. Hirzel, Stuttgart 1949.

M. Born, Optik. Ein Lehrbuch der elektromagnetischen Lichttheorie. J. Springer, Berlin 1933. Dieses Werk ist eigentlich eine entsprechende Modernisierung des berühmten Lehrbuches der Optik von P. Drude. (3. Aufl. S. Hirzel, Leipzig 1912.)

S. G. Starling – A. J. Woodall, Electricity and Magnetism for Degree Students. 8. Aufl. Longmans, Green and Co., London 1953. (Das verbreiteteste Lehrbuch über Elektrizitätslehre in England.)

R. W. Ditchburn, Light. Blackie and Son Ltd., London 1952.

P. Drude, Physik des Äthers. 2. Aufl. F. Enke, Stuttgart 1912.

II. Technische Lehrbücher

A. v. Weiss, Übersicht über die theoretische Elektrotechnik. Erster Teil. Die physikalisch-mathematischen Grundlagen. Akademische Verlagsges., Leipzig 1954. Zweiter Teil. Ausgewählte Kapitel und Aufgaben. (Mit H. Kleinwächter.) Akademische Verlagsges., Leipzig 1956.

R. REINHARDT, Die Elektrotechnik. 3. Aufl. Fachbuchverlag, Leipzig 1954. (Ein elementares Lehrbuch der Elektrotechnik.)

F. VILBIG, Lehrbuch der Hochfrequenztechnik. 5. Aufl. Bd. I. Akademische Verlagsges., Leipzig 1953. (Bd. II. in Vorbereitung.)

K. KUHLMANN, Theoretische Elektrotechnik. Bd. I–III. Birkhäuser A.G., Basel 1945–1951.

III. Spezialwerke und zusammenfassende Darstellungen

TEIL I

§ 8. A. KORN, Lehrbuch der Potentialtheorie. Zwei Bände. Berlin 1899–1901.
O. D. KELLOGG, Foundations of Potential Theory. J. Springer, Berlin 1929.

§ 64. E. ORLICH, Kapazität und Induktivität. Vieweg, Braunschweig 1909.
E. B. ROSA u. F. W. GROVER, Formulas and Tables for the Calculation of Mutual and Self-Induction. Government Press, Washington 1911.
E. B. ROSA u. F. W. GROVER, Bull. of Bureau of Standards 8, Nr. 1. (1912).

§§ 74–87. R. BECKMANN, Die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen. 2. Aufl. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1947.
S. A. SCHELKUNOW, Electromagnetic Waves. D. Van Nostrand, New York 1943.
E. C. BOWDEN, A Text Book of Radar. 2. Aufl. University Press, Cambridge 1954.

TEIL II

§§ 1–4. L. ROSENFELD, Theory of the Electrons. North Holland Publishing Co., Amsterdam 1951.
E. R. COHEN, J. W. M. DU MOND, T. W. LAYTON u. J. S. ROLLETT, Reviews of Modern Physics 27, 363 (1955). (Atomare Konstanten.)
H. HÖNL, Feldmechanik des Elektrons und der Elementarteilchen. Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, Bd. 26, S. 291, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1952.

§ 6. D. IWANENKO u. A. SOKOLOW, Klassische Feldtheorie. Akademie-Verlag. Berlin 1953.
S. I. WAWILOW, Die Mikrostruktur des Lichtes. Akademie-Verlag. Berlin 1954.

TEIL III

§§ 5–6. J. H. VAN VLECK, The Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities. Clarendon Press, Oxford 1932.
E. BACK u. A. LANDÉ, Zeemaneffekt und Multiplettstruktur der Spektrallinien, J. Springer, Berlin 1925. (Teilweise veraltet.)
W. KUHN, Atomspektren. (Hand- und Jahrbuch der chemischen Physik. Bd. 9/1.) Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1934.

§ 7. Werke über Quantenelektrodynamik:
HEITLER, The Quantum Theory of Radiation. 3. Aufl. Clarendon Press, Oxford 1954.
G. SÜSSMANN, Einführung in die Quantenelektrodynamik. Institut für theoretische Physik der freien Universität, Berlin 1950.
W. THIRRING, Einführung in die Quantenelektrodynamik. F. Deuticke, Wien 1955.
J. M. JAUCH u. F. ROHRLICH, The Theory of Photons and Electrons. Addison-Wesley Publishing Co. Cambridge, Mass. 1955.

§ 8. P. DEBYE, Polare Molekeln. S. Hirzel, Leipzig 1929.

§§ 9–13. H. A. STUART, Molekülstruktur. J. Springer, Berlin 1934.
H. A. STUART, Die Struktur des freien Moleküls. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1952.

§§ 14–17. J. H. Van Vleck, l. c.

§ 18. W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik. B. G. Teubner, Leipzig 1908.
M. Born u. P. Jordan, Elementare Quantenmechanik. J. Springer, Berlin 1930. (§ 49. Faradayeffekt.)

§ 19. W. Voigt, l. c.
H. A. Stuart, l.c.
H. A. Stuart, Elektrischer Kerreffekt. (Hand- und Jahrbuch der chemischen Physik. Bd. 10./III). Akademische Verlagsgesellschaft. Leipzig 1939.

§ 21. R. Gans, Einführung in die Theorie des Magnetismus. B. G. Teubner, Leipzig 1908.
G. Joos, Fortschritte auf dem Gebiet des Dia- und Paramagnetismus, Zeitschrift für angewandte Physik 6, 43 (1934).

§ 22. W. Klemm, Magnetochemie. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1936.
P. W. Selwood, Magnetochemistry. Interscience Publishers, New York 1943.

§§ 25–28. R. Becker u. W. Döring, Ferromagnetismus. J. Springer, Berlin 1939.
F. Bitter, Introduction to Ferromagnetism. Mc Graw-Hill, New York 1937.
R. M. Bozorth, Ferromagnetism. D. Van Nostrand Comp., Toronto-New York-London 1951.

§ 29. Fr. Fröhlich, Ferromagnetische Werkstoffe. Verlag Technik, Berlin 1952.
F. Pawlek, Magnetische Werkstoffe. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1952.

§ 31. R. Ochsenfeld, Der Antiferromagnetismus. Zeitschrift für angewandte Physik 4, 350 (1952).
T. Nagima, K. Josida u. R. Kubo, Antiferromagnetism. Advances in Physics, Vol. 4. N. 13. January 1955.
Fröhlich, Ausgewählte Probleme der Theorie des Ferro- und Ferrimagnetismus. Verlag Technik, Berlin 1954.

§ 32. H. Haalck, Physik des Erdinnern. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1954.
H. Alfvén, Cosmical Electrodynamics. Clarendon Press, Oxford 1950.

§ 33. H. Baumgartner, F. Jona, W. Känzig, Seignetteelektrizität. Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften. Bd. 23. S. 234. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950.
A. T. Jaynes, Ferroelectricity. University Press, Princeton 1953.
W. P. Mason, Piezoelectric Crystals and their Application to Ultrasonics. D. Van Nostrand Company, Toronto-New York-London 1950.
H. Sachse, Ferroelektrika. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.

§§ 36–42. H. Fröhlich, Elektronentheorie der Metalle. J. Springer, Berlin 1936.
A. H. Wilson, The Theory of Metals. 2. Aufl. University Press, Cambridge 1950.
N. F. Mott u. H. Jones, Theory of the Properties Metals and Alloys. Clarendon Press, Oxford 1936.

§§ 45–51. K. Steiner u. P. Grassmann, Supraleitung. Fr. Vieweg, Braunschweig 1937.
M. v. Laue, Theorie der Supraleitung. 2. Aufl. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1949.
D. Schönberg, Supraconductivity. University Press, Cambridge 1952.
F. London, Superfluids Vol. I. J. Wiley, New York 1950.
Ch. F. Squire, Low Temperature Physics. Mc Graw Hill, New York 1953.
C. J. Gorter, Progress in Low Temperature Physics. North Holland Publishing Co., Amsterdam 1955.

TEIL IV

§ 1. C. CARATHÉODORY, Geometrische Optik. J. Springer, Berlin 1937.
L. C. MARTIN, Geometrical Optics. Pitman, London 1955.
G. v. STUDNITZ, Physiologie des Sehens. 2. Aufl. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1952.

§ 2. E. GERLAND, Geschichte der Physik. R. Oldenbourg, München 1913.
A. HELLER, Geschichte der Physik. Zwei Bände. 1882–1884.

§ 3. L. DE BROGLIE, Licht und Materie. (Deutsche Übersetzung.) H. Goverts, Hamburg 1939.

§§ 4–8. H. v. HELMHOLTZ, Vorlesungen über theoretische Physik. Bd. V. Elektromagnetische Theorie des Lichtes. J. A. Barth, Leipzig 1897.
J. CLASSEN, Mathematische Optik. Göschensche Verlagsbuchhandlung, Leipzig 1901.

§ 16. C. RAMSAUER, Elektronenmikroskopie. 2. Aufl. Springer-Verlag, Berlin 1942.
E. K. H. DÖRING, Byfaltera. Urania-Verlag, Jena 1949. (S. 73. Interferenzapparat der Schmetterlingsschuppen.)

§ 17. M. v. ROHR, Die optischen Instrumente. Bd. I. J. Springer, Berlin 1904.
A. GLEICHEN, Theorie der modernen optischen Instrumente. 2. Aufl. Stuttgart 1923.
S. CZAPSKI u. O. EPPENSTEIN, Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente. 3. Aufl. J. A. Barth, Leipzig 1924.

§ 19. L. DE BROGLIE, Ondes et mouvements. Gauthier-Villars, Paris 1926.

§ 31. E. ABBÉ, Die Lehre von der Bildentstehung im Mikroskop, Braunschweig 1910.
E. v. BORRIES, Die Übermikroskopie. W. Saenger, Berlin 1949.
F. ASSELMEYER, Der Einfluß des Glanzwinkels auf die Abbildung von Achsenpunkten bei dem Kugelzonenspiegel für monochromatische Röntgenstrahlung. Zeitschrift für angewandte Physik. 6, 272 (1954).

§§ 32–34. H. A. STUART, l. c.
H. A. STUART u. H. C. TRIESCHMANN, Lichtzerstreuung. (Hand- und Jahrbuch der chemischen Physik. Bd. 8/II.) Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1936.

SACHREGISTER